In the example given earlier the group T is connected and leaves only the endpoints invariant. But we have

Theorem 4. *If Z is connected and X metric then every endpoint and non-degenerate prime chain is invariant.*

To see this let p be a non-invariant endpoint so that for some z the points p and $z(p)$ are distinct. Then some point x separates p and $z(p)$ in X. But $Z(p)=f(Z\times p)$ is connected and so contains x. Thus x is the image of p under a homeomorphism so that x must be both and endpoint and a cutpoint, an absurdity. Let P be a non-invariant prime chain containing more than one point. Now P is a continuum and no point separates any two points of P in X. Accordingly P contains a non cutpoint, x, of X. But some point y of X separates $P-y$ and $z(P)-y$ and from an argument similar to the above we see that x must be a cut point.

Bibliography.

[1] W. L. Ayres, *Some generalizations of the Sherrer fixed-point theorem*, Fund. Math. **16** (1930), pp. 332-336.

[2] J. L. Kelley, *Fixed sets under homeomorphism*, Duke Mathematical Journal, **15** (1939), pp. 535-537.

[3] A. D. Wallace, *Monotone transformations*, Duke Mathematical Journal **9** (1942), pp. 487-506.

[4] —, *A substitute for the axiom of choice*, Bulletin of the American Mathematical Society **50** (1944), p. 278.

[5] —, *A fixed-point theorem*, Bulletin of the American Mathematical Society **51** (1945), pp. 413-416.

[6] G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, New York 1942.

Sur certains espaces abstraits.

Par

Jan G.-Mikusiński (Wrocław).

1. Soit A l'ensemble des fonctions réelles $f(x)$ finies sur un ensemble donné G. On dira qu'une suite $f_n(x)$ $(n=1,2,...)$ de fonctions de A satisfait à la condition (K), lorsqu'il existe une fonction $g(x)\in A$, telle qu'on a sur G, quel que soit q naturel,

(1) $\quad q|f_m(x)-f_n(x)|\leqslant g(x)$ pour m et n suffisamment grands.

Pareillement, on dira que $f_n(x)$ satisfait à la condition (K'), lorsque l'inégalité (1) a lieu presque partout dans G.

Cela posé, on a les théorèmes suivants:

Théorème 1. *Si l'ensemble A se compose de toutes les fonctions qui sont bornées sur chacun des ensembles d'une suite G_ν $(\nu=1,2,...)$ telle que $\sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu=G$, alors la condition (K) est nécessaire et suffisante pour que la suite $f_n(x)$ converge uniformément sur chacun des ensembles G_ν.*

Théorème 2. *Si l'ensemble A se compose de fonctions continues dans un ensemble ouvert G, la condition (K) est nécessaire et suffisante pour que la suite $f_n(x)$ converge uniformément dans l'intérieur de G, c'est-à-dire uniformément sur tout compact contenu dans G.*

Théorème 3. *Si l'ensemble A se compose de toutes les fonctions mesurables (L) et finies sur un ensemble G mesurable (L), la condition (K') est nécessaire et suffisante pour que la suite $f_n(x)$ converge presque partout dans G.*

Théorème 4. *Si l'ensemble A se compose des fonctions p-sommables $(p>0)$ sur un ensemble G, mesurable (L), la condition (K') est nécessaire et suffisante pour que la suite $f_n(x)$ converge presque partout dans G et que la suite des modules $|f_n(x)|$ soit bornée presque partout par une fonction p-sommable.*

La démonstration de ces théorèmes sera donnée au N° 2.

Comme les quatre types de convergence considérés dans les théorèmes 1—4 se caractérisent entièrement au moyen de l'inégalité (1), il paraît naturel de se servir de cette inégalité pour définir la convergence dans certains espaces abstraits plus généraux. Le sujet principal de cette note est de donner une définition axiomatique de tels espaces (N° 3). Nous tenons ensuite à montrer quelques relations entre les espaces introduits et certains autres espaces, en particulier celui de L. V. Kantorovitch[1]).

2. La suffisance des conditions énoncées dans les théorèmes 1—4 est évidente. Pour en démontrer la nécessité nous nous appuyerons sur le lemme suivant:

Lemme. *Soit $H_1, H_2, \ldots$ une suite d'ensembles disjoints et soit G leur somme. On suppose qu'une suite de fonctions $f_n(x)$ ($x \in G$, $n=1,2,\ldots$) converge uniformément vers $f(x)$ sur chacun des ensembles $H_1, H_2, \ldots$ et que*

$$(2) \qquad |f_n(x)| \leqslant b(x) \quad \textit{pour} \quad x \in G \quad \textit{et} \quad n=1,2,\ldots,$$

où $b(x)$ est une fonction finie, non négative sur G. Si $\beta_1, \beta_2, \ldots$ est une suite de nombres positifs, croissante indéfiniment et si $g(x)=\beta_\nu b(x)$ pour $x \in H_\nu$ ($\nu=1,2,\ldots$), alors, quel que soit q naturel et $x \in G$, on a pour m et n suffisamment grands

$$(3) \qquad q|f_m(x)-f_n(x)| \leqslant g(x).$$

Démonstration du lemme. Soit q un nombre naturel fixé arbitrairement et ν_0 le moindre indice tel que $\beta_{\nu_0} \geqslant 2q$. Alors l'inégalité (3) a certainement lieu pour $x \in H_\nu$, où $\nu \geqslant \nu_0$, et n quelconque, car $q|f_m(x)-f_n(x)| \leqslant q(|f_m(x)|+|f_n(x)|) \leqslant 2qb(x)$. Or, l'inégalité (3) a encore lieu pour x appartenant à l'un quelconque des ensembles $H_1, \ldots, H_{\nu_0-1}$, pourvu que n soit assez grand, car la suite $f_n(x)$ converge uniformément sur chacun de ces ensembles. Donc pour n assez grand l'inégalité (3) a lieu sur l'ensemble G tout entier.

La nécessité des conditions se déduit du lemme précédent comme il suit:

[1]) L. V. Kantorovitch, *Lineare halbgeordnete Räume*, Mat. Sbornik, T. **2** (44), 1, p. 121-168.

Dans le cas du théorème 1 on pose $H_1=G_1$ et $H_\nu=G_\nu-\sum_{i=1}^{\nu-1} G_i$ pour $\nu=2,3,\ldots$. Alors il existe évidemment une fonction $b(x)$ bornée sur chacun des ensembles H_ν et pour laquelle la condition (2) est remplie. La nécessité a donc lieu, d'après le lemme précédent, car la fonction $g(x)$ est alors bornée sur tout ensemble G_ν.

Cela établi, il suffit maintenant de remarquer, dans le cas du théorème 2, que

1° il existe une suite de compacts G_ν telle que $\sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu = G$,

2° toute fonction de A est bornée sur chacun des compacts G_ν,

3° toute fonction qui est bornée sur chacun des ensembles H_ν ($\nu=1,2,\ldots$) peut être majorée par une fonction continue dans G.

Dans le cas des théorèmes 3 et 4, remarquons qu'il est possible de décomposer G en une suite d'ensembles mesurables disjoints $H_0, H_1, H_2, \ldots$ de manière que la mesure de H_0 soit nulle et que la suite considérée de fonctions converge uniformément sur chacun des ensembles $H_1, H_2, \ldots$. Alors la nécessité des conditions résulte immédiatement du lemme précédent, il ne faut que choisir, dans le cas du théorème 4 la fonction $b(x)$ et la suite $\beta_1, \beta_2, \ldots$ de manière que $g(x)$ soit p-sommable; c'est ce qui est toujours possible[2]).

3. Nous introduirons maintenant un espace abstrait A, où la convergence sera définie de manière à contenir tous les quatre types de convergence considérés au N° 1 comme des cas particuliers.

On suppose que A est un *groupe abélien additif*. Cela posé, considérons un ensemble quelconque $A^* \subset A$ assujetti aux axiomes suivants:

1* $0 \in A^*$;
2* *Si $a \in A^*$ et $b \in A^*$, alors $a+b \in A^*$;*
3* *Si $a \in A^*$ et $b-qa \in A^*$, quel que soit q naturel, alors $a=0$.*

On pose par définition

$$a \leqslant b,$$

lorsque $b-a \in A^*$; l'ensemble A^* peut ainsi être envisagé comme celui des éléments non négatifs et l'axiome 3* joue le rôle de l'axiome d'Archimède.

[2]) Les théorèmes 3 et 4 peuvent aussi être déduits de la théorie de L. V. Kantorovitch (loc. cit. § 5 et § 10).

On introduit ensuite une opération, dite *module*, qui fait correspondre à chaque élément $a \in A$ un élément $|a| \in A^*$ et qui satisfait aux axiomes suivants:

1° $|a|=a$ *pour tout* $a \in A^*$;
2° $|a|=0$ *entraîne* $a=0$;
3° $|-a|=|a|$;
4° $|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

On dira qu'une suite infinie $a_n \in A$ est convergente, lorsqu'il existe un élément $c \in A^*$ tel que, quel que soit q naturel, on a

$$q|a_m-a_n|\leqslant c \text{ pour } m \text{ et } n \text{ suffisamment grands.}$$

Pareillement, on dira qu'une suite $a_n \in A$ converge vers un élément $a \in A$, lorsqu'il existe un élément $c \in A^*$ tel que, quel que soit q naturel, on a

$$q|a_n-a|\leqslant c \quad \text{pour } n \text{ suffisamment grand.} \tag{4}$$

On démontre facilement l'unicité de la limite. En effet, si $\lim a_n=a'$ et $\lim a_n=a''$, on a, pour tout q naturel,

$$q|a''-a'|=q|(a_n-a')-(a_n-a'')|\leqslant q|a_n-a'|+q|a_n-a''|\leqslant c'+c'',$$

pourvu que l'indice n soit assez grand. Il s'ensuit, d'après les axiomes 3* et 2° que $|a''-a'|=0$ et $a''-a'=0$, donc $a''=a'$.

Remarquons encore les relations suivantes (dont la démonstration ne présente aucune difficulté):

$$\lim(a_n+b_n)=\lim a_n+\lim b_n,$$
$$\lim(a_n-b_n)=\lim a_n-\lim b_n.$$

L'espace A est basé sur la notion de *groupe abélien*. On peut définir un espace analogue A_l en partant de l'*espace linéaire*. Alors on suppose que le produit de tout élément $a \in A^*$ par un nombre positif appartient encore à A^*. L'axiome 3° concernant le module est à remplacer dans ce cas par la relation

$$|\lambda\cdot a|=|\lambda|\cdot|a|, \quad \text{où } \lambda \text{ est un nombre quelconque.}$$

On peut démontrer sans peine que les deux espaces A et A_l sont du type L de Fréchet.

Pour obtenir les interprétations particulières, considérées au N° 1, il suffit de prendre pour A^* le sous-ensemble des fonctions non négatives dans le cas des théorèmes 1 et 2 et le sous-ensemble des fonctions non négatives presque partout dans le cas des théorèmes 3 et 4. L'interprétation du module est celle au sens ordinaire.

4. Numérotons les types de convergence considérés dans les théorèmes 1, 2, 3 et 4 dans le même ordre que ces théorèmes. On voit facilement que les convergences 1 et 2 peuvent se caractériser au moyen des suites de *pseudonormes* [3]): il suffit de poser généralement $\|f\|_\nu=\max\limits_{G_\nu}|f|$. Cependant les convergences 3 et 4 ne peuvent pas être caractérisées au moyen des pseudonormes, c'est ce qui résulte du fait que l'espace pseudonormé est métrique et que *l'espace des fonctions mesurables ne se laisse pas métriser de manière que la convergence suivant la métrique introduite coïncide avec la convergence presque partout* [4]). En effet, supposons qu'il existe une telle métrique. Soit f_n une suite qui converge en mesure vers f, mais qui ne converge presque partout. Alors on peut tirer de $\varrho(f_n,f)$ une suite partielle $\varrho(f_{p_n},f)$ dont les éléments sont supérieurs à un nombre positif ε. La suite f_{p_n} converge encore en mesure, on peut donc en tirer une sous-suite f_{q_n} qui converge presque partout. On a donc $\varrho(f_{q_n},f)\to 0$, d'où la contradiction. Cet exemple s'étend évidemment au cas des fonctions sommables.

D'autre part, les convergences 3 et 4 peuvent être considérées comme des cas particuliers de la convergence au sens de L. V. Kantorovitch [5]). Cependant il n'en est pas de même de la convergence 2, car l'ensemble C des fonctions continues ne satisfait pas à l'axiome V [6]) de Kantorovitch. En effet, la borne supérieure d'un sous-ensemble de C peut être une fonction discontinue.

On voit facilement que si un espace Y satisfait aux axiomes I, II, III et V de Kantorovitch, alors le sous-espace de Y formé d'éléments non négatifs satisfait aux axiomes de l'ensemble A^* et le module au sens Kantorovitch satisfait aux axiomes 1°-4° de cet article.

[3]) J. von Neumann, *On complete topological spaces*, Trans. Math. Soc., vol. 37 (1935), p. 18-19.
[4]) Je dois cette remarque et l'exemple qui suit à M. S. Mazur.
[5]) loc. cit., p. 131.
[6]) loc. cit., p. 129.

Une inégalité équivalente à (4) figure dans la théorie de Kantorovitch, comme une condition nécessaire et suffisante de la convergence dans l'espace Y qui est assujetti aux axiomes I, II, III, IV, V et VI. Dans la note présente, l'inégalité (4) a été cependant employée comme définition de la convergence. Ceci permet évidemment d'embrasser, entre autres, les suites à termes complexes.

La *norme de Banach* peut être considérée comme un cas particulier du module défini dans l'espace A_l. En effet, étant donné un espace de Banach, prenons l'un quelconque de ses éléments, soit c, et posons généralement $|a|=\|a\|\cdot c$, où $\|a\|$ est la norme de a. A^* sera alors l'ensemble des éléments de la forme λc, où λ est un nombre non négatif.

Sur certaines inégalités dans les espaces abstraits de J. G.-Mikusiński.

Par

Adam Bielecki (Lublin).

1. Nous nous occuperons ici d'une propriété du module introduit par J. G.-Mikusiński dans son travail *Sur certains espaces abstraits* [1].

Dans certains raisonnements il est important de savoir si l'inégalité

(1) $$||a|-|b||\leqslant|a\pm b|$$

a lieu dans les espaces considérés. Nous verrons que la réponse sera positive dans le cas de l'espace A_l et négative dans celui de l'espace A. Or dans certaines applications l'inégalité (1) peut être remplacée avec succès par les inégalités plus faibles

(2) $$||a|-|b||\leqslant 3|a\pm b|$$

et

(3) $$|2|a|-2|b||\leqslant 2|a\pm b|.$$

qui sont vraies dans les espaces A et A_l.

2. Nous démontrerons tout d'abord le lemme suivant:

Si $a\in A$, $b\in A^*$, $a\leqslant b$ et $-a\leqslant b$, on a

(4) $$|a|\leqslant 3b \quad \textit{et} \quad |2a|\leqslant 2b.$$

En effet, posons $b-a=c$ et $b+a=d$. On a $c\in A^*$, $d\in A^*$ et $c+d=2b$. Il en résulte, d'après les axiomes [2] adoptés, que l'on a

$$|a|\leqslant|b|+|c|=b+c\leqslant b+c+d=3b$$

et

$$|2a|=|d-c|\leqslant d+c=2b,$$

d'où le lemme.

[1]) Ce volume, p. 128.

[2]) Loco cit.