Sur une classe des fonctions non mesurables.

Par

Ákos Császár (Budapest).

C'est une propriété triviale des fonctions monotones d'une variable réelle que la valeur $f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ est comprise entre les valeurs $f(x)$ et $f(y)$. Mais cette propriété ne caractérise pas les fonctions monotones, comme le montre toute solution discontinue de l'équation fonctionnelle

$$f(x+y)=f(x)+f(y). \tag{1}$$

L'existence de telles solutions a été démontrée par G. Hamel [1]; elles jouissent de la propriété indiquée, car (1) entraîne

$$f(2x)=2f(x)$$

et par conséquent

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\tfrac{1}{2}[f(x)+f(y)].$$

Nous introduisons donc la définition suivante:

Définition. La fonction $f(x)$ est dite *interne* dans l'intervalle (a,b), si pour

$$a<x<y<b$$

on a

$$\min\,[f(x),f(y)]\leqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant \max\,[f(x),f(y)],$$

le signe d'égalité n'étant valable que pour $f(x)=f(y)$.

Dans la note présente, nous allons étudier les propriétés des fonctions internes, non monotones. Nous verrons qu'une telle fonction ne peut être continue pas même en un seul point et surtout qu'elle ne peut pas être mesurable. Cela fournit une démonstration nouvelle du théorème connu que toute solution mesurable de (1) est de la forme $f(x)=Cx$, où C est une constante; car cette égalité étant vraie pour tout x rationnel, comme l'a montré Cauchy [2], reste valable pour les x irrationnels à cause de la monotonité de $f(x)$.

α et β étant deux nombres quelconques, nous désignerons par $R(\alpha,\beta)$ l'ensemble des nombres de la forme

$$\alpha+r(\beta-\alpha),$$

r parcourant les nombres rationnels.

Lemme 1. *Soit $f(x)$ interne dans l'intervalle (a,b) et $a<\alpha<\beta<b$. $f(x)$ est constante, croissante ou décroissante sur l'ensemble $(a,b)\cdot R(\alpha,\beta)$ suivant que $f(\alpha)=f(\beta)$, $f(\alpha)<f(\beta)$ ou $f(\alpha)>f(\beta)$.*

Démonstration. On voit aussitôt que la proposition est valable pour q fixe sur l'ensemble $\left\{\alpha+\frac{p}{q}(\beta-\alpha)\right\}$ où

$$\frac{a-\alpha}{\beta-\alpha}<\frac{p}{q}<\frac{b-\alpha}{\beta-\alpha}.$$

Comme deux points quelconques de $(a,b)\cdot R(\alpha,\beta)$ peuvent être écrits dans la forme

$$\alpha+\frac{p'}{q}(\beta-\alpha),\quad \alpha+\frac{p''}{q}(\beta-\alpha)$$

avec q commun, le cas général s'y ramène.

Lemme 2. *Si $f(x)$ est interne dans l'intervalle (a,b) et constante, resp. croissante, resp. décroissante dans un sous-intervalle I de (a,b), elle l'est dans tout (a,b).*

Démonstration. Soit $a<\alpha<\beta<b$. L'ensemble $R(\alpha,\beta)$ étant partout dense, il y a deux points distincts $\xi<\eta$ appartenant à $R(\alpha,\beta)$ et à I simultanément. On a par hypothèse $f(\xi)=f(\eta)$, resp. $f(\xi)<f(\eta)$, resp. $f(\xi)>f(\eta)$. On voit aisément que $R(\xi,\eta)=R(\alpha,\beta)$, de sorte que $f(\alpha)=f(\beta)$, resp. $f(\alpha)<f(\beta)$, resp. $f(\alpha)>f(\beta)$ en vertu du lemme précédent, c. q. f. d.

Lemme 3. *Soit $f(x)$ interne dans l'intervalle (a,b) et $a<\alpha<b$. Si pour un $\delta>0$ on a*

$$f(\alpha)\leqslant f(\alpha+h) \qquad (0<h<\delta), \tag{2}$$

$f(x)$ est non décroissante dans (a,b).

Démonstration. En vertu du lemme 2, il suffit de montrer que $f(x)$ est non décroissante dans l'intervalle $(\alpha,\alpha+\delta)$, car elle y est alors ou bien croissante, ou bien constante dans un sous-intervalle de $(\alpha,\alpha+\delta)$, et par conséquent dans tout (a,b). Supposons donc que $f(x)$ ne soit pas non décroissante dans $(\alpha,\alpha+\delta)$, c'est-à-dire que pour certains points ξ,η $(\alpha<\xi<\eta<\alpha+\delta)$ on a

$$f(\xi)>f(\eta)\geqslant f(\alpha).$$

D'après le lemme 1, $f(x)$ est décroissante sur l'ensemble $R(\xi,\eta)$; par conséquent on peut trouver dans l'intervalle $(\alpha-\delta,\alpha)$ des points y avec

$$f(y)>f(\xi)\geqslant f(\alpha),$$

mais pour un tel y le point $x=2\alpha-y$ se trouve dans $(\alpha,\alpha+\delta)$ et $f(x)<f(\alpha)$, en contradiction avec (2), c. q. f. d.

On conclut du lemme précédent que, si $f(x)$ est une fonction interne, non monotone dans l'intervalle (a,b) et si $a<\alpha<b$, on peut trouver dans tout intervalle $(\alpha,\alpha+\delta)$ $(\delta>0)$ des points x avec

$$f(x)<f(\alpha).$$

Nous obtenons naturellement des résultats analogues en y remplaçant $<$ par $>$ ou $(\alpha,\alpha+\delta)$ par $(\alpha-\delta,\alpha)$, ou tous les deux simultanément. De là le

Lemme 4. *Si $f(x)$ est une fonction interne, non monotone dans l'intervalle (a,b) et si $a<\alpha<b$, alors les ensembles $E[f(x)>f(\alpha)]$ et $E[f(x)<f(\alpha)]$ sont partout denses dans l'intervalle (a,b).*

Démonstration. Considérons par exemple l'ensemble $E[f(x)>f(\alpha)]$. Soient ξ et η des points tels que $\xi<\alpha$, $\eta>\alpha$ et $f(\xi)>f(\alpha)$, $f(\eta)>f(\alpha)$. Selon le lemme 1, on a pour tout $x\in R(\alpha,\xi)$ et $x<\alpha$ ou $x\in R(\alpha,\eta)$ et $x>\alpha$,

$$f(x)>f(\alpha), \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Théorème 1. *$f(x)$ étant une fonction interne, non monotone dans l'intervalle (a,b), elle ne peut avoir une limite déterminée, pas même d'un côté, en aucun point de (a,b). De plus, on a identiquement*

$$\bar{f}^{+}(x)=\bar{f}^{-}(x)=+\infty,\quad \underline{f}^{+}(x)=\underline{f}^{-}(x)=-\infty,$$

$\bar{f}^{+}(x)$ désignant p. ex. le nombre dérivé supérieur à droite de $f(x)$.

Démonstration. Soit $a<\alpha<b$; ξ et η étant deux points avec

$$f(\xi)>f(\alpha),\quad f(\eta)<f(\alpha)$$

(lemme 4), les ensembles $E[f(x)>f(\xi)]$ et $E[f(x)<f(\eta)]$ sont partout denses, ce qui donne l'énoncé.

Théorème 2. *Aucune fonction interne $f(x)$, non monotone dans l'intervalle (a,b), n'est mesurable.*

Démonstration. Supposons au contraire que $f(x)$ soit mesurable et soit $a<\alpha<b$. Désignons par $E(x)$ $(x>\alpha)$ la mesure de la partie commune de l'ensemble $E[f(x)>f(\alpha)]$ et de l'intervalle (α,x). $E(x)$ est une fonction continue de la variable x. Soit $\alpha<\xi$ et $f(\xi)>f(\alpha)$. On a alors

$$f\left(\frac{\alpha+\xi}{2}\right)>f(\alpha).$$

E_1 désignant la partie commune de l'ensemble $E\left[f(x)\geqslant f\left(\frac{\alpha+\xi}{2}\right)\right]$ et de l'intervalle $\left(\frac{\alpha+\xi}{2},\xi\right)$, on a

$$(3)\qquad |E_1|\leqslant E(\xi)-E\left(\frac{\alpha+\xi}{2}\right).$$

Soit E_2 l'ensemble symétrique à E_1 par rapport au point $\frac{\alpha+\xi}{2}$ et E_3 le complémentaire de E_2 par rapport à l'intervalle $\left(\alpha,\frac{\alpha+\xi}{2}\right)$. On voit aussitôt que E_3 est la partie commune de $E\left[f(x)>f\left(\frac{\alpha+\xi}{2}\right)\right]$ et de l'intervalle $\left(\alpha,\frac{\alpha+\xi}{2}\right)$, de sorte que

$$(4)\qquad |E_3|\leqslant E\left(\frac{\alpha+\xi}{2}\right).$$

En ajoutant (3) et (4), on obtient l'inégalité

$$\frac{\xi-\alpha}{2}=|E_1|+|E_3|\leqslant E(\xi).$$

En partant de l'inégalité $f(\xi)<f(\alpha)$, nous trouvons par un raisonnement analogue

$$\frac{\xi-\alpha}{2}\geqslant E(\xi).$$

Les points ξ avec $f(\xi) > f(a)$, tout comme ceux avec $f(\xi) < f(a)$, constituant un ensemble partout dense, on a en vertu de la continuité de $E(x)$

$$E(x) \equiv \frac{x-a}{2}.$$

Mais c'est incompatible avec le théorème suivant de Jacobsthal et Knopp [3]: si pour un ensemble E et pour tout intervalle I on a

$$\frac{|EI|}{|I|} = \text{const.},$$

ce rapport est égal à 0 ou à 1 (c'est incompatible aussi avec le théorème de Lebesgue sur les points de densité).

Bibliographie.

[1] G. Hamel, Math. Ann. **60** (1905), p. 460.

[2] A. L. Cauchy, *Analyse algébrique*, Paris 1821, Oeuvres II[e] série, t. III, pp. 98-105.

[3] Jacobsthal et Knopp, Sitzungsb. d. Berl. Math. Ges. **14** (1915), p. 121.

Cancellation laws in the arithmetic of cardinals.

By

Alfred Tarski (Berkeley, California, U.S.A.).

Dedicated to Professor Wacław Sierpiński in celebration of his forty years as teacher and scholar.

In this paper I should like to outline a proof of the following two cancellation laws for finite multiples of cardinal numbers:

I. *Given a natural number* $m \neq 0$ *and two arbitrary cardinals,* $\mathfrak{p}$ *and* $\mathfrak{q}$, *if* $m \cdot \mathfrak{p} = m \cdot \mathfrak{q}$, *then* $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$.

II. *Given a natural number* $m \neq 0$ *and two arbitrary cardinals,* $\mathfrak{p}$ *and* $\mathfrak{q}$, *if* $m \cdot \mathfrak{p} \leqslant m \cdot \mathfrak{q}$, *then* $\mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{q}$.

Both I and II belong to those theorems of the arithmetic of cardinals which can be proved in an effctive way, without the help of the axiom of choice, and which, as a consequence of the structure of their proofs, can be extended to a comprehensive class of abstract algebraic systems referred to as cardinal algebras [1]).

It may be noticed that the two theorems discussed can be derived as immediate corollaries from the familiar theorem of the arithmetic of cardinals by which a finite muliple $m \cdot \mathfrak{p}$ ($m \neq 0$) of an infinite cardinal $\mathfrak{p}$ always equals $\mathfrak{p}$. The proof of this last theorem, however, involves essentially the well-ordering principle; hence the possibility of deriving I and II from it will be disregarded in the present discussion, for we shall be interested only in arguments which avoid any explicit or implicit application of the axiom of choice.

[1]) The algebraic aspect of the problem will not be discussed in this paper. See in this connection Tarski [1] and Tarski [2] (the figures in brackets referring to the bibliography at the end of the paper). It may be mentioned that — with one exception — the results stated in this paper in a formal way (i. e., theorems and corollaries 1-14) can be extended to arbitrary cardinal algebras, and most of them are explicitly formulated in Tarski [2], Part I. Regarding this one exception (Theorem 7), see Footnote 16 below.