Sur la décomposition des espaces métriques en ensembles disjoints.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Le but de cette Note est de démontrer pour les espaces métriques quelconques (séparables ou non) le théorème suivant, et d'en tirer ensuite quelques conséquences.

Théorème. *Tout espace métrique M dont tout ensemble ouvert non vide contient $\geqslant \mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ points est somme de $\mathfrak{m}$ ensembles disjoints dont chacun contient $\geqslant \mathfrak{m}$ points de tout ensemble ouvert non vide $\subset M$.*

Démonstration. Un point p d'un ensemble E contenu dans un espace métrique M est dit *point d'ordre* $\mathfrak{n}$ *de* E, si chaque sphère ouverte de centre p et de rayon suffisamment petit contient précisément $\mathfrak{n}$ points de E. (On démontre sans peine que tout point p d'un ensemble E est d'un ordre $\mathfrak{n}$ déterminé: à savoir $\mathfrak{n}$ est le plus petit de tous les nombres cardinaux $\overline{\overline{EU}}$, où U est une sphère ouverte quelconque de centre p).

Un ensemble $E \subset M$ est dit *homogène* d'ordre $\mathfrak{n}$, si tout point de E est un point d'ordre $\mathfrak{n}$ de E [1]).

Lemme 1. *Si M est un espace métrique dense en soi et U un ensemble ouvert non vide $\subset M$, il existe une sphère ouverte S, $0 \neq S \subset U$, qui est un ensemble homogène.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{n}$ le plus petit de tous les nombres cardinaux $\overline{\overline{S}}$, où S est une sphère ouverte non vide $\subset U$. Il existe donc une sphère ouverte $\subset U$, telle que $\overline{\overline{S}} = \mathfrak{n}$. Si l'ensemble S n'était pas homogène, il existerait une sphère ouverte non vide $S_1 \subset S$ telle que $\overline{\overline{S_1}} \neq \mathfrak{n}$, donc $\overline{\overline{S_1}} < \mathfrak{n}$, contrairement à la définition du nombre $\mathfrak{n}$. Notre lemme est ainsi démontré.

[1]) Cette notion est due à G. Cantor: Acta Math. **7** (1885), p. 118; cf. aussi W. Sierpiński, Fund. Math. **1**, p. 28.

Lemme 2. *Tout espace métrique M de puissance $\mathfrak{n} \geqslant \aleph_0$ dont chaque point est d'ordre $\mathfrak{n}$, est somme de $\mathfrak{n}$ ensembles disjoints et tels que tout entourage de tout point de M contient $\mathfrak{n}$ points de chacun de ces ensembles.*

Démonstration. Soit M un espace métrique de puissance $\mathfrak{n} = \aleph_\alpha$ et dont tout point est d'ordre $\mathfrak{n}$. Soit F la famille de toutes les sphères ouvertes dont le centre est un point de M et le rayon $=1/n$, où $n = 1, 2, \ldots$ La famille F est évidemment de puissance $\mathfrak{n} \cdot \aleph_0 = \aleph_\alpha \aleph_0 = \aleph_\alpha$ et, tout point de M étant d'ordre $\mathfrak{n}$, toute sphère de la famille F est un ensemble de puissance $\mathfrak{n} = \aleph_\alpha$. Or, comme l'a dénomtré M. Kuratowski [2]), si $F = \{E_\xi\}_{\xi < \omega_\alpha}$ est une suite transfinie du type ω_α d'ensembles de puissance $\aleph_\alpha$, il existe une suite transfinie du type ω_α d'ensembles disjoints de puissance $\aleph_\alpha$, $\{H_\xi\}_{\xi < \omega_\alpha}$, telle que $H_\xi \subset E_\xi$ pour $\xi < \omega_\alpha$. Or, H_ξ, en tant qu'un ensemble de puissance $\aleph_\alpha$, est (d'après l'égalité $\aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha$) somme de $\aleph_\alpha$ ensembles disjoints de puissance $\aleph_\alpha$; soit $H_\xi = \sum_{\eta < \omega_\alpha} H_{\xi,\eta}$. Posons $P_\eta = \sum_{\xi < \omega_\alpha} H_{\xi,\eta}$ pour $\eta < \omega_\alpha$. Comme $H_{\xi,\eta} \subset H_\xi \subset E_\xi$ pour $\xi < \omega_\alpha$, $\eta < \omega_\alpha$, l'ensemble P_η contient $\aleph_\alpha$ points de chaque sphère de centre p et de rayon $1/n$, pour $p \in M$, $n = 1, 2, \ldots$ Tout entourage de tout point de M contient donc $\mathfrak{n}$ points de chacun des ensembles P_η, pour $\eta < \omega_\alpha$. Or, les ensembles P_η $(\eta < \omega_\alpha)$ sont évidemment disjoints. Le lemme 2 est ainsi démontré.

Soit M un espace métrique donné dont tout ensemble ouvert non vide contient $\geqslant \mathfrak{m}$ points; soient

$$(1) \qquad x_1, x_2, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\xi, \ldots$$

une suite transfinie formée de toutes les points de M, et

$$(2) \qquad S_1, S_2, \ldots, S_\omega, S_{\omega+1}, \ldots, S_\xi, \ldots$$

une suite transfinie formée de toutes les sphères ouvertes non vides dont les centres sont des points de M. Nous définirons par l'induction transfinie une suite transfinie de sphères

$$(3) \qquad T_1, T_2, \ldots, T_\omega, T_{\omega+1}, \ldots, T_\xi, \ldots$$

comme il suit.

[2]) Voir Fund. Math. **34** (1947), p. 35, lemme 1.

L'espace M est évidemment dense en soi; d'après le lemme 1 il existe donc une sphère ouverte non vide $S\subset M$, telle que l'ensemble S est homogène, soit d'ordre $\mathfrak{n}$. Si p est un point de S, il existe une sphère $S^*\subset S$ de centre p, et S^* est un ensemble homogène d'ordre $\mathfrak{n}$ et de puissance $\mathfrak{n}$. Il existe donc dans la suite (2) le premier terme S_λ tel que S_λ est un ensemble homogène d'ordre $\overline{\overline{S_\lambda}}$. Soit $T_1=S_\lambda$.

Soit α un nombre ordinal <1 et supposons que nous avons déjà défini toutes les sphères T_ξ, où $\xi<\alpha$. Soit $H_\alpha=\overline{\sum_{\xi<\alpha} T_\xi}$ (où $\overline{E}$ désigne la fermeture de l'ensemble E). Si $M\subset H_\alpha$, la définition de la suite (3) est achevée (et elle est alors du type α). Si $M-H_\alpha\neq 0$, l'ensemble $M-H_\alpha$ est ouvert non vide et, comme plus haut, d'après le lemme 1, nous concluons qu'il existe dans la suite (2) le premier terme S_μ tel que S_μ est un ensemble homogène de puissance $\overline{\overline{S_\mu}}$. Nous poserons $T_\alpha=S_\mu$.

La suite (3) est ainsi définie par l'induction transfinie. Soit ϑ son type; les sphères T_ξ $(\xi<\vartheta)$ sont évidemment disjointes et on a $M\subset\overline{\sum_{\xi<\vartheta} T_\xi}$. L'ensemble T_ξ est homogène d'ordre $\overline{\overline{T_\xi}}\geqslant\mathfrak{m}=\aleph_\gamma$. D'après le lemme 2 on a donc $T_\xi=\sum_{\eta<\omega_\gamma} K_{\xi,\eta}$, où $K_{\xi,\eta}$ $(\eta<\omega_\gamma)$ sont des ensembles disjoints dont chacun contient $\overline{\overline{T_\xi}}\geqslant\mathfrak{m}$ points de chaque entourage d'un point quelconque de T_ξ. Posons $K_\eta=\sum_{\xi<\vartheta} K_{\xi,\eta}$ pour $\eta<\omega_\gamma$. Je dis que les ensembles K_η $(\eta<\omega_\gamma)$ satisfont à notre théorème.

Les ensembles $K_{\xi,\eta}$ $(\xi<\vartheta,\ \eta<\omega_\gamma)$ étant disjoints, les ensembles K_η $(\eta<\omega_\gamma)$ le sont également. Soit U un ensemble ouvert non vide $\subset M$. Comme $U\subset M\subset\overline{\sum_{\xi<\vartheta} T_\xi}$ et U est ouvert non vide, il existe un point p de l'ensemble $\sum_{\xi<\vartheta} T_\xi$ tel que $p\in U$, et il existe un nombre ordinal $\nu<\vartheta$, tel que $p\in T_\nu$. Or, l'ensemble $K_{\nu,\eta}$ contient $\overline{\overline{T_\nu}}\geqslant\mathfrak{m}$ points de chaque entourage d'un point quelconque de T_ν, donc $\mathfrak{m}$ points de U. L'ensemble $K_\eta\subset K_{\nu,\eta}$ contient donc $\mathfrak{m}$ points de U. Notre théorème est ainsi démontré.

Pour $\mathfrak{m}=\aleph_0$ notre théorème donne immédiatement le

Corollaire 1. *Tout espace métrique M dense en soi est somme d'une suite infinie d'ensembles disjoints denses dans M.*

J'ai donné ailleurs [3]) une démonstration directe de ce corollaire.

[3]) Proceedings of the Benares Mathematical Society New Series Vol. VII (1945), pp. 29-31; cf. E. Hewitt, Duke Math. Journ. **10** (1943), pp. 309-333.

Vu que les ensembles condensés coïncident avec les ensembles dont tout point est un point d'ordre $\geqslant\aleph_1$, il résulte tout de suite de notre théorème (pour $\mathfrak{m}=\aleph_1$) que:

Corollaire 2. *Tout espace métrique condensé, M, est somme d'une infinité indénombrable d'ensembles disjoints condensés et denses dans M.*