Sur les ensembles linéaires dénombrables non équivalents par décomposition finie.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Théorème 1. *Soit E un ensemble linéaire infini. Il existe un sous-ensemble infini H de E, tel que les ensembles E et H ne sont pas équivalents par décomposition finie,* c.-à-d. il n'existe aucun nombre naturel m tel qu'on ait

$$(1) \qquad E = E_1 + E_2 + \ldots + E_m \quad \text{et} \quad H = H_1 + H_2 + \ldots + H_m,$$

où $E_k E_l = H_k H_l = 0$ pour $1 \leqslant k < l \leqslant m$, et où l'ensemble E_k est superposable (par translation ou rotation) avec H_k (pour $k = 1, 2, ..$). (c.-à-d. $E_k \simeq H_k$ pour $k = 1, 2, \ldots$).

Démonstration. Distinguons deux cas.

1) L'ensemble E n'est pas borné. L'ensemble linéaire E étant infini, il existe, pour tout n naturel, un intervalle d_n de longueur $\bar{d}_n$ contenant au moins n points distincts de E. Je définirai par l'induction une suite infinie $p_1, p_2, \ldots$ de points de E comme il suit. Soit p_1 un point quelconque de E. Soit n un nombre naturel >1, et supposons que nous avons déjà défini les points $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$. L'ensemble E n'étant pas borné, il existe dans E des points dont la distance à chacun des points $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ surpasse chacun des nombres $\bar{d}_1, \bar{d}_2, \ldots, \bar{d}_{n^2}$: soit p_n un de ces points.

Posons $H = \{p_1, p_2, \ldots\}$. On voit sans peine que, si $k \geqslant m > 1$ et si n est un nombre naturel $\neq k$, la distance de p_k à p_n est $> \bar{d}_{m^2}$. Il en résulte tout de suite qu'il n'existe dans H aucun système de $m > 1$ points distincts ayant deux à deux des distances $\leqslant \bar{d}_{m^2}$ (puisque un au moins de ces points aurait l'indice $k \geqslant m$).

Admettons qu'on a les formules (1), où m est un nombre naturel que nous pouvons supposer >1. L'intervalle d_{m^2} contenant au moins m^2 points distincts de E, un au moins des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_m$ contient au moins m points de d_{m^2}, soit E_k. Si l'on avait $E_k \simeq H_k$, l'ensemble H_k et, à plus forte raison, l'ensemble H

contiendrait au moins m points distincts ayant deux des distances $\leqslant \bar{d}_{m^2}$, ce qui est, comme nous avons démontré, impossible. Les ensembles E et $H \subset E$ ne sont donc pas équivalents par décomposition finie.

2) L'ensemble E est borné. L'ensemble E étant infini (et borné), il existe, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, un point d'accumulation a de E (c.-à-d. $a \in E'$). Nous définirons une suite infinie $p_1, p_2, \ldots$ des points de E par l'induction comme il suit. Soit p_1 un point quelconque de E autre que a. Soit n un nombre naturel >1 et supposons que nous avons déjà défini les points $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$, et qu'ils sont tous distincts de a. Soit ε_n un nombre positif tel que $2\varepsilon_n$ est plus petit que la distance entre deux quelconques des points $a, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$. Comme $a \in E'$, il existe un point p_n de E dont la distance $\varrho(p_n, a)$ au point a est moindre que chacun des nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$. Posons

$$H = \{p_{2^2+1}, p_{3^2+1}, \ldots, p_{n^2+1}, \ldots\}.$$

Si H contenait $m>1$ points distincts, deux au moins d'entre eux, soient p_{k^2+1} et p_{l^2+1}, auraient des indices $\geqslant m^2+1$, et, vu la définition des points p_n, on aurait $\varrho(p_{k^2+1}, a) < \varepsilon_{m^2+1}$ et $\varrho(p_{l^2+1}, a) < \varepsilon_{m^2+1}$, d'où $\varrho(p_{k^2+1}, p_{l^2+1}) < 2\varepsilon_{m^2+1}$. Il n'existe donc pas dans H pour m naturel >1, m points distincts ayant deux à deux la distance $\geqslant 2\varepsilon_{m^2+1}$.

Admettons qu'on a les formules (1), où m est un nombre naturel >1. La distance entre deux points (distincts) de la suite $p_1, p_2, \ldots, p_{m^2}$ étant $>2\varepsilon_{m^2+1}$, un au moins des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_m$, soit E_k, contient au moins m points de E ayant deux à deux une distance $>2\varepsilon_{m^2+1}$. Il est donc de même de l'ensemble $H_k \simeq E_k$ et, à plus forte raison, de l'ensemble H, ce qui est, comme nous avons démontré, impossible.

Dans les cas 1) et 2) les ensembles E et H ne sont donc pas équivalents par décomposition finie et notre théorème se trouve démontré. Il peut être généralisé sans peine aux ensembles infinis situés dans les espaces euclidiens à un nombre fini quelconque de dimensions, mais pas aux espaces métriques infinis quelconques.

Théorème 2. *$E_1, E_2, \ldots$ étant une suite infinie d'ensembles linéaires infinies tels que pour tout n naturel l'ensemble E_{n+1} est équivalent par décomposition finie à un sous-ensemble de E_n, il existe un ensemble infini E tel que pour tout n naturel E est équivalent par décomposition finie à un sous-ensemble de E_n, mais ne l'est pas à E_n.*

Démonstration. D'après l'hypothèse il existe un ensemble $H_2 \subset E_1$, tel que $E_2 \stackrel{f}{=} H_2$ (c.-à-d. que E_2 est équivalent par décomposition finie à H_2) Pareillement, il existe un ensemble $H \subset E_2$, tel que $E_3 \stackrel{f}{=} H$. Les formules $E_3 \stackrel{f}{=} H$, $H \subset E_2$ et $E_2 \stackrel{f}{=} H_2$ prouvent qu'il existe un ensemble $H_3 \subset H_2$, tel que $E_3 \stackrel{f}{=} H_3$. Par l'induction on arrive ainsi à une suite infinie d'ensembles (infinis) $E_1 = H_1 \supset H_2 \supset H_3 \supset \ldots$ tels que $E_n \stackrel{f}{=} H_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$

Nous définirons maintenant par l'induction deux suites infinies de points $p_1, p_2, \ldots$ et $q_1, q_2, \ldots$, comme il suit. Soient p_1 et q_1 deux points distincts de H_1. Soit n un nombre naturel >1 et supposons que nous avons déjà défini tous les points $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ et $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$. L'ensemble H_n étant infini (en tant qu'équivalent par décomposition finie à l'ensemble infini E_n), il existe des points distincts p_n et q_n de H_n, distincts de chacun des points $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$, $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$. Posons $H_0 = \{p_1, p_2, \ldots\}$: vu que $H_1 \supset H_2 \supset \ldots$, on aura évidemment, pour tout n naturel:

$$\{p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, \ldots\} \subset H_n \quad \text{et} \quad \{q_n, q_{n+1}, q_{n+2}, \ldots\} \subset H_n - H_0.$$

D'après le théorème 1, il existe un sous-ensemble infini E de H_0 qui n'est pas équivalent par décomposition finie à H_0.

Vu les propriétés des suites $p_1, p_2, \ldots$ et $q_1, q_2, \ldots$, on trouve sans peine les décompositions en deux ensembles disjoints

$$H_0 = \{p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}\} + \{p_n, p_{n+1}, \ldots\}$$

et

$$T_n = \{q_n, q_{n+1}, \ldots, q_{2n-2}\} + \{p_n, p_{n+1}, \ldots\},$$

où évidemment $\{p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}\} \underset{n-1}{=} \{q_n, q_{n+1}, \ldots, q_{2n-1}\}$ ($A \underset{k}{=} B$ désignant que les ensembles A et B sont équivalents par décomposition en k parties). On en déduit tout de suite que l'ensemble H_0 est équivalent par décomposition en n parties au sous-ensemble T_n de H_n. Comme $E \subset H_0$ et $H_n \stackrel{f}{=} E_n$, on en conclut que l'ensemble E est équivalent par décomposition finie à un sous-ensemble de E_n (pour $n = 1, 2, \ldots$).

Or, admettons que pour un nombre naturel n on a $E \stackrel{f}{=} E_n$. Comme $E \subset H_0$ et $H_0 \stackrel{f}{=} T_n \subset H_n$, il existe un ensemble G tel que $E \stackrel{f}{=} G \subset T_n \subset H_n$ et, comme $E \stackrel{f}{=} E_n$ et $E_n \stackrel{f}{=} H_n$, cela donne, comme on sait [1]) $T_n \stackrel{f}{=} H_n$, donc, vu que $H_0 \stackrel{f}{=} T_n$ et $H_n \stackrel{f}{=} E_n$, on trouve $H_0 \stackrel{f}{=} E_n$, et, comme $E \stackrel{f}{=} E_n$, cela donne $H_0 \stackrel{f}{=} E$, contrairement à la définition de l'ensemble E.

Le théorème 2 est ainsi démontré.

[1]) Voir S. Banach et A. Tarski, Fund. Math. **6**, p. 252 (Cor. 9); aussi W. Sierpiński, Fund. Math. **33**, p. 230, Lemme 1.

Il résulte facilement des théorèmes 1 et 2 par l'induction transfinie qu'il existe pour tout ensemble linéaire infini E une suite transfinie du type Ω d'ensembles $E_\xi \subset E$ $(\xi<\Omega)$, tels que pour $\xi<\eta<\Omega$ l'ensemble E_η est équivalent par décomposition finie à un sous-ensemble de E_ξ, mais qu'on a E_η non $\overset{f}{=} E_\xi$.

Théorème 3. *Un ensemble borné de nombres rationnels n'est équivalent par décomposition finie à aucune de ses parties aliquotes.*

Démonstration. Soit A un ensemble borné de nombres rationnels et supposons que $A\overset{f}{=}B$, où $B\subset A$ et $B\neq A$. Il existe donc un nombre naturel n et des décompositions en ensembles disjoints (non vides)

$$A=A_1+A_2+\ldots+A_n \quad \text{et} \quad B=B_1+B_2+\ldots+B_n,$$

où $A_k \simeq B_k$ pour $k=1,2,\ldots,n$.

Il existe donc pour $k=1,2,\ldots,n$ une transformation f_k de A_k en B_k qui est une translation ou une rotation. On en déduit tout de suite qu'il existe (pour $k=1,2,\ldots,n$) un nombre réel a_k tel que $f(x)=a_k+x$ ou bien $f(x)=a_k-x$ pour $x\in A_k$, et, vu que les ensembles A_k et B_k sont formés de nombres rationnels, on voit que a_k est un nombre rationnel.

Posons $f(x)=f_k(x)$ pour $x\in A_k$; la fonction $f(x)$ sera ainsi définie pour $x\in A$ et, comme on voit sans peine, elle transforme de façon biunivoque l'ensemble A en B. On constate aussi que, pour $x\in A$:

$$f(x)=l_1(x)\cdot a_1+l_2(x)\cdot a_2+\ldots+l_n(x)\cdot a_n\pm x,$$

où $l_1(x),l_2(x),\ldots,l_n(x)$ sont des entiers dépendants de x (en effet, pour $x\in A_k$ on a: $l_k(x)=1$ et $l_i(x)=0$ si $i\neq k$), et le signe $\pm$ dépend de x.

En désignant par $f^{(m)}(x)$ la m-ième itérée de la fonction $f(x)$, on en déduit tout de suite que pour $x\in A$ on a

$$f^{(m)}(x)=k_1(x)\cdot a_1+k_2(x)\cdot a_2+\ldots+k_n(x)\cdot a_n\pm x,$$

où $k_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ sont des entiers dépendants de x (et de m) et le signe $\pm$ dépend de x (et de m).

Soit q le dénominateur commun des nombres rationnels $a_1,a_2,\ldots,a_n$. On a donc

$$f^{(m)}(x)=\frac{c(x)}{q}\pm x \quad \text{pour } x\in A,$$

où $c(x)$ est un entier (dépendant de x et de m).

L'ensemble A étant borné, on en déduit aussitôt que la fonction $c(x)$ est également bornée, donc, en tant que fonction à valeurs entières, elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes. On en conclut sans peine que, x étant un nombre donné de A, la suite infinie

$$x,\ f(x),\ ff(x),\ fff(x),\ \ldots$$

ne peut pas être formée de nombres deux à deux distincts.

Comme $B\subset A$ et $B\neq A$, il existe un nombre $x_0\in A-B$. Il existe donc des nombres naturels k et p, tels que

$$f^{k-1}(x_0)=f^{k-1+p}(x_0)$$

et, la fonction f étant à valeurs distinctes dans A, on en déduit tout de suite que

$$x_0=f^{(p)}(x_0),$$

ce qui est impossible, puisque x_0 *non* $\in B$ et $f^{(p)}(x)\in B$ pour $x\in A$ et p naturel. L'hypothèse que $A\overset{f}{=}B$ implique donc une contradiction et le théorème 3 se trouve démontré.

Soit, pour x réel, $0\leqslant x<1$, E_x l'ensemble de tous les nombres rationnels $>x$ et <1, et soit F la famille de tous les ensembles E_x, où $0\leqslant x<1$. D'après le théorème 3 deux ensembles distincts de la famille F sont non équivalents par décomposition finie.

Il existe donc une famille de puissance du continu d'ensembles de nombres rationnels de l'intervalle $(0,1)$ deux à deux non équivalents par décomposition finie.

Il est à remarquer qu'*il existe des ensembles linéaires bornés dénombrables équivalents par décomposition finie à une de ses parties aliquotes.*

Tel est p. e. l'ensemble $E=\{p_1,p_2,\ldots\}$, où $p_k=k\alpha-Ek\alpha$ pour $k=0,1,2,\ldots$, et où α est un nombre irrationnel de l'intervalle $(0,1)$ (p. e. $\alpha=\sqrt{2}-1$). On a en effet, $E\underset{2}{=}E-\{p_0\}$. Pour s'en convaincre, désignons par E_1 l'ensemble de tous les nombres $p_k<1-\alpha$ de E et posons $E_2=E-E_1$.

On vérifie facilement que

$$E=E_1+E_2,\quad E_1E_2=0,\quad E-\{p_0\}=E_1(\alpha)+E_2(\alpha-1),\quad E_1(\alpha)\cdot E_2(\alpha-1)=0,$$

ce qui donne tout de suite $E\underset{2}{=}E-\{p_0\}$.

Théorème 4. *Il existe une famille de puissance du continu d'ensembles infinis de nombres naturels deux à deux non équivalents par décomposition finie.*

Telle est la famille de tous les ensembles $\{\mathrm{E}x, \mathrm{E}2x, \mathrm{E}3x, \dots\}$, *où* x *parcourt tous les nombres réels* $\geqslant 1$ (et où $\mathrm{E}t$ désigne l'entier le plus grand $\leqslant t$).

Démonstration. Soient A et B deux ensembles infinis de nombres naturels équivalents par décomposition finie. On a donc des décompositions en ensembles disjoints:

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_m, \quad B = B_1 + B_2 + \dots + B_m,$$

où $A_i \simeq B_i$ pour $i = 1, 2, \dots, m$.

Admettons que pour $i = 1, 2, \dots, p$ les ensembles A_i et B_i sont superposables par translation, soit $B_i = A_i(a_i)$ pour $i = 1, 2, \dots, p$, et que, pour $i = p+1, p+2, \dots, m$, il le sont par rotation. Les nombres a_i $(i = 1, 2, \dots, p)$ sont évidemment des entiers, et les ensembles A_i $(i = p+1, p+2, \dots, m)$ sont finis (deux ensembles infinis de nombres naturels ne pouvant pas être superposables par rotation).

n étant un nombre naturel donné, désignons par $P^{(n)}$ le nombre de tous les nombres de l'ensemble de nombres naturels P qui sont $\leqslant n$. On voit sans peine que pour tout a entier on a $|P^{(n)}(a) - P^{(n)}| \leqslant |a|$. Il en résulte tout de suite que $|B_i^{(n)} - A_i^{(n)}| \leqslant |a_i|$ pour $i = 1, 2, \dots, p$, et on en conclut que

$$|A^{(n)} - B^{(n)}| \leqslant q, \quad \text{où} \quad q = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_p| + \overline{\overline{A_{p+1}}} + \overline{\overline{A_{p+2}}} + \dots + \overline{\overline{A_m}}$$

est un entier indépendant de n.

Soient x et y deux nombres réels distincts $\geqslant 1$, p. e. $x < y$, et posons

$$A = \{\mathrm{E}x, \mathrm{E}2x, \mathrm{E}3x, \dots\} \quad \text{et} \quad B = \{\mathrm{E}y, \mathrm{E}2y, \mathrm{E}3y, \dots\}.$$

On vérifie facilement que

$$\mathrm{E}\frac{n+1}{x} - 1 \leqslant A^{(n)} \leqslant \mathrm{E}\frac{n+1}{x} \quad \text{et} \quad \mathrm{E}\frac{n+1}{y} - 1 \leqslant B^{(n)} \leqslant \mathrm{E}\frac{n+1}{y},$$

d'où

$$A^{(n)} > \frac{n+1}{x} - 2, \quad B^{(n)} \leqslant \frac{n+1}{y}, \quad \text{donc} \quad A^{(n)} - B^{(n)} > (n+1)\frac{y-x}{xy} - 2,$$

ce qui donne

$$\lim_{n=\infty} (A^{(n)} - B^{(n)}) = +\infty,$$

contrairement à l'inégalité $|A^{(n)} - B^{(n)}| \leqslant q$ trouvée plus haut dans l'hypothèse que $A \overset{f}{=} B$. Les ensembles A et B ne peuvent donc être équivalents par décomposition finie et le théorème 4 se trouve démontré.

On the inducing of homomorphisms by mappings.

By

Roman Sikorski (Warszawa).

Let $\boldsymbol{X}$ and $\boldsymbol{Y}$ be two fields of subsets of sets $\mathscr{X}$ and $\mathscr{Y}$ respectively and let f be a homomorphism (i. e. an additive and complementative transformation) of $\boldsymbol{Y}$ in $\boldsymbol{X}$. I say that the homomorphism f is *induced* by a mapping $y = \varphi(x)$ of $\mathscr{X}$ into $\mathscr{Y}$ if

(*) $$f(Y) = \varphi^{-1}(Y) \quad \text{for every} \quad Y \in \boldsymbol{Y}\text{[1]}).$$

More generally, if $\boldsymbol{I}$ and $\boldsymbol{J}$ are two ideals of sets of the fields $\boldsymbol{X}$ and $\boldsymbol{Y}$ respectively and f is a homomorphism of the quotient algebra $\boldsymbol{Y}/\boldsymbol{J}$ in $\boldsymbol{X}/\boldsymbol{I}$, I say that a mapping φ of $\mathscr{X}$ into $\mathscr{Y}$ *induces* the homomorphism f if

(**) $$\varphi^{-1}(Y) \in \boldsymbol{X} \quad \text{and} \quad f([Y]) = [\varphi^{-1}(Y)] \quad \text{for every} \quad Y \in \boldsymbol{Y}.$$

$[Y]$ denotes here the element of $\boldsymbol{X}/\boldsymbol{J}$ (i. e. a class of sets belonging to $\boldsymbol{Y}$) which contains the set $Y \in \boldsymbol{Y}$ and $[\varphi^{-1}(Y)]$ denotes the element of $\boldsymbol{X}/\boldsymbol{I}$ which contains the set $\varphi^{-1}(Y) \in \boldsymbol{X}$.

This paper contains several theorems [2]) on the inducing of homomorphisms by mappings [3]).

Terminology and notation. A mapping f of a Boolean algebra $\boldsymbol{A}$ in a Boolean algebra $\boldsymbol{B}$ is called a *homomorphism*, if

$$f(A_1 + A_2) = f(A_1) + f(A_2) \quad \text{and} \quad f(A_1') = (f(A_1))',$$

for every $A_1, A_2 \in \boldsymbol{A}$. The symbols „+" and „′" denote here the Boolean operations of addition and complementation which correspond to the operations of addition and complementation of sets in the general theory of sets.

---

[1]) Hence $\varphi^{-1}(Y) \in \boldsymbol{X}$ for any $Y \in \boldsymbol{Y}$. Conversely, if $\varphi^{-1}(Y) \in \boldsymbol{X}$ for every $Y \in \boldsymbol{Y}$, then the formula (*) defines a homomorphism f of $\boldsymbol{Y}$ in $\boldsymbol{X}$.

[2]) An application of one of these theorems (th. 3.1) to the theory of the integral is given in my paper [1].

[3]) This paper was presented by me at a session of the Warsaw Section of the Polish Mathematical Society on December 12, 1947.

A similar problem on the inducing of isomorphisms between fields of sets has been considered by E. Marczewski in paper [2].