L'ensemble A des valeurs de la fonction $a(t)$ est donc disjoint de l'ensemble B des valeurs de la fonction $b(t)$. Chacun d'eux contient des points communs avec tout ensemble parfait (non vide). Les ensembles A et $\mathcal{J}-A$ sont donc dépourvus de sous-ensembles parfaits (non vides)[16].

En outre, en posant dans la formule (7): $f(t)=[a(t), b(t)]$, on déduit du théorème du N°5 et des formules (9) et (10) que l'ensemble A est projectif.

[16]) Voir F. Bernstein, Leipz. Ber. **60** (1908), p. 329. Cf. *Topologie* I, p. 267.

Sur les ensembles presque contenus les uns dans les autres.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

1. E et H étant deux ensembles (formés d'éléments quelconques), nous dirons que l'ensemble E est *presque contenu* dans H et nous écrirons

$$E \ast\subset H,$$

si l'ensemble $E-H$ est fini (ou vide)[1]).

On démontre facilement les 4 énoncés suivants:

(1) *Si* $E\subset H$, *on a* $E\ast\subset H$,

(2) *Si* $E\ast\subset G$ *et* $G\ast\subset H$, *on a* $E\ast\subset H$

[puisque $E-H\subset(E-G)+(G-H)$],

(3) *Si* $E_i\ast\subset H$ pour $i=1,2,\dots,m$, *on a* $E_1+E_2+\dots+E_m\ast\subset H$

[car $(E_1+E_2+\dots+E_m)-H=(E_1-H)+(E_2-H)+\dots+(E_m-H)$],

(4) *Si* $E\ast\subset H_i$ *pour* $i=1,2,\dots,m$, *on a* $E\ast\subset H_1H_2\dots H_m$

[puisque $E-H_1H_2\dots H_m=(E-H_1)+(E-H_2)+\dots+(E-H_m)$].

***Théorème** T:* $E_1,E_2,\dots$ *et* $H_1,H_2,\dots$ *étant deux suites infinies d'ensembles, telles que* $E_i\ast\subset H_k$ *pour* i *et* k *naturels, il existe un ensemble* X *tel que* $E\ast\subset X\ast\subset H$ *pour* i *et* k *naturels.*

Démonstration. Posons

(5) $$X=E_1H_1+E_2H_1H_2+\dots+E_iH_1H_2\dots H_i+\dots$$

Comme $E_i\ast\subset H_k$ pour i et k naturels, on a, d'après (1) et (4): $E_i\ast\subset E_iH_1H_2\dots H_i$ pour $i=1,2,\dots$, donc, d'après (5), (1) et

[1]) Cf. W. Sierpiński, Fund. Math. **33** (1945), p. 9.

(2): $E_i \ast\subset X$ pour $i=1,2,\ldots$ D'autre part on a, pour k naturel: $E_iH_1H_2\ldots H_i\subset E_i$ pour $i=1,2,\ldots,k-1$ et $E_iH_1H_2\ldots H_i\subset H_k$ pour $i\geqslant k$, donc, d'après (5):

$$X\subset E_1+E_2+\ldots+E_{k-1}+H_k,$$

et, comme $E_i\ast\subset H_k$ pour i et k naturels, on trouve sans peine, d'après (1), (2) et (3): $X\ast\subset H_k$ pour $k=1,2,\ldots$

On a donc $E_i\ast\subset X\ast\subset H_k$ pour i et k naturels et notre théorème est démontré.

Pour les suites infinies de nombres naturels le théorème T a été démontré (sur une autre voie) par M. F. Rothberger[2]) qui a attiré l'attention sur une analogie de ce théorème à une proposition de F. Hausdorff dite „Erster Einschaltungssatz"[3]) Or, le problème P se pose:

***Problème** P: F_1 et F_2 étant deux familles d'ensembles telles que $E\ast\subset H$ pour $E\in F_1$ et $H\in F_2$, existe-t-il toujours un ensemble X tel que $E\ast\subset X\ast\subset H$ pour $E\in F_1$ et $H\in F_2$?*

Le feu professeur W. Nikliborc a modifié, ce problème en y remplaçant la condition $E\ast\subset H$ par $\overline{\overline{E-H}}\leqslant 1$. Appelons P_1 le problème ainsi modifié.

Je démontrerai que *la réponse au problème* P_1 (donc, à plus forte raison, aussi au problème P) *est négative.*

En effet, soit, pour i naturel, E_i l'ensemble de tous les nombres naturels de la forme $2^{i-1}(2j-1)$, où $j=1,2,\ldots$ et posons $F_1=\{E_1,E_2,\ldots\}$. Soit F_2 la famille de tous les ensembles H de nombres naturels tels que, quel que soit le nombre naturel i, l'ensemble E_i-H a au plus un élément. (On démontre facilement que la famille F_2 est de puissance du continu). On a évidemment $\overline{\overline{E-H}}\leqslant 1$, donc $E\ast\subset H$ pour $E\in F_1$, $H\in F_2$. Je dis qu'il n'existe aucun ensemble X tel que $E\ast\subset X\ast\subset H$ pour $E\in F_1$, $H\in F_2$.

Admettons, en effet, qu'un tel ensemble X existe. On a donc $E_i\ast\subset X$ pour $i=1,2,\ldots$ et, E_i étant un ensemble infini, il en résulte que $E_iX\neq 0$ pour $i=1,2,\ldots$ Il existe donc pour tout i naturel un nombre naturel n_i tel que $n_i\in E_iX$ et, comme $E_iE_k=0$ pour $i\neq k$, les nombres $n_1,n_2,\ldots$ sont tous distincts. L'ensemble $R=\{n_1,n_2,\ldots\}$ est donc infini et on a $RE_i=\{n_i\}$ pour $i=1,2,\ldots$ (c.-à-d. RE_i est

[2]) Annals of Math. **45** (1944), p. 400, Lemma 3 b.
[3]) Fund. Math. **26** (1936), p. 244.

formé d'un seul élément, n_i). N désignant l'ensemble de tous les nombres naturels, on a $E_i-(N-R)=\{n_i\}$, donc, pour $H=N-R$, $\overline{\overline{E_i-H}}=1$, pour $i=1,2,\ldots$, ce qui donne, vu la définition de la famille F_2, $H\in F_2$. Or, on n'a pas $X\ast\subset H$, puisque $X-H=X-(N-R)=R$ et R est un ensemble infini. L'hypothèse qu'il existe un ensemble X tel que $E\ast\subset X\ast\subset H$ pour $E\in F_1$, $H\in F_2$ implique donc une contradiction, c. q. f. d.

La solution négative du problème P rapprochée de l'hypothèse du continu, implique qu'on ne peut pas remplacer dans le théorème T les suites dénombrables d'ensembles par les suites transfinies du type Ω, $\{E_\xi\}_{\xi<\Omega}$ et $\{H_\xi\}_{\xi<\Omega}$. Ce résultat peut être également obtenu sans faire appel à l'hypothèse du continu, mais la démonstration est alors beaucoup plus compliquée.

En 1936 F. Hausdorff a démontré en admettant l'axiome du choix, mais sans faire appel à l'hypothèse du continu[4]), l'existence de deux suites transfinies $\{a^\xi\}_{\xi<\Omega}$ et $\{b^\xi\}_{\xi<\Omega}$ de suites infinies formées de nombres 0 et 1,

$$a^\xi=(a_1^\xi,a_2^\xi,\ldots) \quad \text{et} \quad b^\xi=(b_1^\xi,b_2^\xi,\ldots),$$

où

$$a^1\ast< a^2\ast<\ldots\ast< a^\xi\ast<\ldots \quad \ldots\ast< b^\xi<\ldots\ast< b^2\ast< b^1$$

($a\ast< b$, où $a=(a_1,a_2,\ldots)$ et $b=(b_1,b_2,\ldots)$ désignant qu'on a $a_n\leqslant b_n$ pour n suffisamment grand et $a_n\neq b_n$ pour une infinité d'indices n), et telles qu'il n'existe aucune suite x vérifiant la condition

$$a^\xi\ast< x\ast< b^\eta \text{ pour } \xi<\Omega \text{ et } \eta<\Omega.$$

Soit, pour tout nombre ordinal $\xi<\Omega$, E_ξ l'ensemble de tous les nombres naturels n tels que $a_n^\xi=1$ et soit H_ξ l'ensemble de tous les nombres naturels n tels que $b_n^\xi=1$.

Comme $a^\xi\ast< a^\eta\ast< b^\eta\ast< b^\xi$ pour $\xi<\eta<\Omega$, on trouve sans peine

$$E_\xi\ast\subset E_\eta\ast\subset H_\eta\ast\subset H_\xi \quad \text{et} \quad \overline{\overline{E_\eta-E_\xi}}=\overline{\overline{H_\xi-H_\eta}}=\aleph_0$$

pour $\xi<\eta<\Omega$.

Je dis qu'il n'existe aucun ensemble X tel que

$$(2) \qquad E_\xi\ast\subset X\ast\subset H_\eta \quad \text{pour} \quad \xi<\Omega,\ \eta<\Omega.$$

[4]) Ibidem.

Admettons, en effet, qu'un tel ensemble X existe et posons, pour $n=1,2,\dots$, $x_n=1$ si $n \in X$ et $x_n=0$, si $n \bar{\in} X$. Soit ξ un nombre ordinal donné $<\Omega$; d'après (2) les ensembles $E_{\xi+1}-X$ et $X-H_{\xi+1}$ sont finis et, vu la définition des ensembles $E_{\xi+1}$, $H_{\xi+1}$ et X, il n'existe qu'un nombre fini de nombres naturels n tels que $a_n^{\xi+1}=1$ et $x_n=0$, respectivement tels que $x_n=1$ et $b_n^{\xi+1}=0$. Vu la définition de la relation $*<$ et vu que $a^\xi *< a^{\xi+1}$ et $b^{\xi+1} *< b^\xi$, il en résulte que $a^\xi < x < b^\xi$ contrairement à la propriété des suites transfinies $\{a^\xi\}_{\xi<\Omega}$ et $\{b^\xi\}_{\xi<\Omega}$.

Il est donc démontré sans faire appel à l'hypothèse du continu qu'on ne peut pas remplacer dans le théorème T les suites du type ω par les suites du type Ω.

2. M. Lusin [5]) appelle *mutuellement orthogonaux* deux ensembles qui ont un nombre fini (ou nul) d'éléments communs. Il appelle deux familles F_1 et F_2 d'ensembles mutuellement orthogonales, si chaque ensemble de la famille F_1 est orthogonal à chaque ensemble de la famille F_2. Il appelle deux familles F_1 et F_2 d'ensembles *séparables*, s'il existe deux ensembles disjoints M et N, tels que pour $E \in F_1$ et $H \in F_2$ les ensembles $E-M$ et $H-N$ sont finis (ou vides).

On voit sans peine que, pour que deux ensembles E et H soient mutuellement orthogonaux, il faut et il suffit qu'on ait $E*\subset CH$ (ou bien, ce qui revient au même: $H*\subset CE$), le complémentaire étant pris par rapport à la somme de tous les ensembles des familles F_1 et F_2. Il en résulte tout de suite que pour que deux familles F_1 et F_2 d'ensembles soient séparables (dans le sens adopté par M. Lusin), il faut et il suffit qu'il existe un ensemble X, tel que $E*\subset X*\subset CH$ pour $E \in F_1$, $H \in F_2$.

Soient maintenant $F_1=\{E_1,E_2,\dots\}$ et $F_2=\{H_1,H_2,\dots\}$ deux familles finies ou dénombrables d'ensembles mutuellement orthogonales. On a donc $E_k*\subset CH_l$ pour k et l naturels et, d'après notre théorème T, il existe un ensemble X, tel que $E_k*\subset X*\subset CH_l$, ce qui donne $E_k*\subset X$ et $H_l*\subset CX$ pour k et l naturels. Les familles F_1 et F_2 sont donc mutuellement orthogonales. On a donc le théorème suivant:

[5]) *Sur les parties de la suite naturelle*, Izwestia de l'Académie des Sciences l'U. R. S. S. (en russe) **11** (1947), pp. 403-410. J'ai pris connaissance de cette note après avoir rédigé la première partie de ma note présente.

***Théorème** R. Deux familles au plus dénombrables d'ensembles mutuellement orthogonales sont toujours séparables* (au sens de M. Lusin).

Pour les familles d'ensembles de nombres naturels ce théorème a été démontré sur une autre voie par M. Lusin dans sa note citée (p. 404) et appelé par lui „Théorème de P. Du Bois Reymond".

En résolvant ci-dessus le problème P j'ai défini une famille dénombrable F_1 d'ensembles infinis de nombres naturels et une famille F_2 de puissance du continu d'ensembles de nombres naturels, telles qu'il n'existe aucun ensemble X pour lequel on ait $E*\subset X*\subset H$ pour $E \in F_1$, $H \in F_2$. Il en résulte tout de suite en vertu de l'hypothèse du continu qu'il existe une famille dénombrable F_1 d'ensembles de nombres naturels et une famille Φ de puissance $\aleph_1$ d'ensembles de nombres naturels (à savoir la famille de tous les complémentaires par rapport à l'ensemble de tous les nombres naturels des ensembles de la famille F_2) qui sont mutuellement orthogonales et non séparables. Cela rosoût à l'aide de l'hypothèse du continu le problème posé (l. c., p. 406, problème I) par M. N. Lusin [6]).

M. Lusin établit aussi dans sa note (p. 405), en utilisant le théorème de Zermelo (basé sur l'axiome du choix), mais sans admettre l'hypothèse du continu, l'existence de deux familles (de puissance $\aleph_1$) mutuellement orthogonales et non séparables (d'ensembles de nombres naturels). Cela donne tout de suite encore une démonstration (à l'aide de l'axiome du choix mais sans faire appel à l'hypothèse du continu) du fait qu'on ne peut pas remplacer dans le théorème T les suites dénombrables d'ensembles par les suites transfinies du type Ω, démonstration n'utilisant pas la proposition de F. Hausdorff.

M. Lusin démontre ensuite (l. c., pp. 406-407) l'existence d'une suite transfinie du type Ω d'ensembles de nombres naturels $\{E_\xi\}_{\xi<\Omega}$, telle que

$$E_\xi*\subset E_\eta \quad \text{et} \quad \overline{\overline{E_\eta - E_\xi}}=\aleph_0 \quad \text{pour} \quad \xi<\eta<\Omega.$$

C'est une démonstration intéressante (exposée d'une façon géométrique) d'un théorème qui a été trouvé par moi et imprimé en 1939 dans le tome 33 des *Fundamenta Mathematicae* (p. 9) paru en 1945.

[6]) Cf. ma note parue dans les Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, Ser. VIII, vol. IV (1948), p. 519.

M. Lusin démontre aussi (l. c. pp. 407-409) l'existence de deux suites transfinies $\{A_\xi\}_{\xi<\Omega}$ et $\{B_\xi\}_{\xi<\Omega}$ d'ensembles de nombres naturels tel que A_ξ est orthogonal à B_ξ pour $\xi<\Omega$, $A_\xi \ast\subset A_\eta$, $B_\xi \ast\subset B_\eta$ et $\overline{\overline{A_\eta-A_\xi}}=\overline{\overline{B_\eta-B_\xi}}=\aleph_0$ pour $\xi<\eta<\Omega$. Or, on voit sans peine qu'on obtient de telles suites en posant $A_\xi=E_\xi$ et $B_\xi=CH_\xi$ pour $\xi<\Omega$, $\{E_\xi\}_{\xi<\Omega}$ et $\{H_\xi\}_{\xi<\Omega}$ étant les suites dont l'existence j'ai déduit ci-dessus du théorème de Hausdorff.

Deux autres problèmes, posés par M. N. Lusin dans sa note citée peuvent être résolus en admettant l'hypothèse du continu.

Soit F la famille de tous les ensembles infinis de nombres naturels.

Convenons, pour $E \epsilon F$ et $H \epsilon F$, d'écrire $E \precsim H$ pour exprimer qu'on a $\overline{\overline{E-H}}<\aleph_0$ et $\overline{\overline{H-E}}=\aleph_0$. La relation $\precsim$ est évidemment asymétrique et transitive; c'est donc une relation d'ordre (partiel) pour les ensembles de la famille F.

Lemme 1. *Si l'on a, pour n naturel et pour $E_k \epsilon F$ $(k=1,2,\ldots,n)$, $E_1\precsim E_2\precsim\ldots\precsim E_n$, on a $\overline{\overline{E_n-(E_1+E_2+\ldots+E_{n-1})}}=\aleph_0$.*

Démonstration. Comme $E_1\precsim E_2\precsim\ldots\precsim E_{n-1}$, on a $E_k\precsim E_{n-1}$ pour $k=1,2,\ldots,n-1$, donc $\overline{\overline{E_k-E_{n-1}}}<\aleph_0$ pour $k=1,2,\ldots,n-1$, et, vu que

$$(E_1+E_2+\ldots+E_{n-1})-E_{n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}(E_k-E_{n-1}),$$

cela donne $\overline{\overline{(E_1+E_2+\ldots+E_{n-1})-E_{n-1}}}<\aleph_0$.

Or, comme $E_{n-1}\precsim E_n$, on a $\overline{\overline{E_n-E_{n-1}}}=\aleph_0$ et, vu que

$$E_n-(E_1+E_2+\ldots+E_{n-1})=(E_n-E_{n-1})-[(E_1+E_2+\ldots+E_{n-1})-E_{n-1}]$$

et que l'ensemble $(E_1+E_2+\ldots+E_{n-1})-E_{n-1}$ est fini (ou vide), on trouve $\overline{\overline{E_n-(E_1+E_2+\ldots+E_{n-1})}}=\aleph_0$, c. q. f. d.

Lemme 2. *Si, pour $E_k \epsilon F$ $(k=1,2,\ldots)$ et $H \epsilon F$, on a $E_1\precsim E_2\precsim\ldots\precsim H$, il existe un ensemble $E \epsilon F$ tel que $E_1\precsim E_2\precsim\ldots\precsim E\precsim H$.*

Démonstration. Comme $E_1\precsim H$, on a $\overline{\overline{H-E_1}}=\aleph_0$ et il existe un nombre $m_1 \epsilon H-E_1$. Soit maintenant k un nombre naturel >1 et supposons que le nombre m_{k-1} soit défini. D'après le lemme 1 on a

$$\overline{\overline{H-(E_1+E_2+\ldots+E_k)}}=\aleph_0$$

et il existe un nombre $m_k>m_{k-1}$ tel que

$$m_k \epsilon H-(E_1+E_2+\ldots+E_k).$$

Les nombres naturels $m_1<m_2<\ldots$ sont ainsi définis par induction. Soit $E=H-\{m_1,m_2,\ldots\}$.

Il vient $E\subset H$ et $\overline{\overline{H-E}}=\aleph_0$, donc $E\precsim H$. D'autre part

$$E_n-E=(E_n-H)+E_n\cdot\{m_1,m_2,\ldots\}\subset(E_n-H)+\{m_1,m_2,\ldots,m_{k-1}\}$$

(puisque $m_k \bar{\epsilon} E_n$ pour $k\geqslant n$). Vu que $\overline{\overline{E_n-H}}<\aleph_0$ on a donc $\overline{\overline{E_n-E}}<\aleph_0$ pour $n=1,2,\ldots$ Comme $E_n\precsim E_{n+1}$, on a $\overline{\overline{E_{n+1}-E_n}}=\aleph_0$, et, comme $\overline{\overline{E_{n+1}-E}}<\aleph_0$ et, vu que

$$E-E_n\supset(E_{n+1}-E_n)-(E_{n+1}-E),$$

on trouve $\overline{\overline{E-E_n}}=\aleph_0$. On a donc $E_n\precsim E$. Il est ainsi démontré que $E_1\precsim E_2\precsim\ldots\precsim E\precsim H$, c. q. f. d.

Admettons maintenant l'hypothèse du continu et soit $\{N_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ une suite transfinie formée de tous les ensembles infinis de nombres naturels. Posons:

$$E_k=\sum_{i=1}^{k}\{1.2^{i-1},3.2^{i-1},5.2^{i-1},\ldots\} \quad \text{pour} \quad k=1,2,\ldots$$

(c. à d. E_k est l'ensemble de tous les nombres $2^{i-1}(2j-1)$, où i est un nombre naturel $\leqslant k$ et j est un nombre naturel quelconque), et soit $H_1=\{1,2,3,\ldots\}$. Evidemment $E_1\precsim E_2\precsim\ldots\precsim H_1$. Soit α un nombre ordinal donné, $1<\alpha<\Omega$, et supposons que tous les ensembles H_ξ, où $\xi<\alpha$, soient définis et que

$$E_1\precsim E_2\precsim\ldots\precsim H_\xi \quad \text{pour} \quad \xi<\alpha \quad \text{et} \quad H_\eta\precsim H_\xi \quad \text{pour} \quad \xi<\eta<\alpha.$$

D'après le théorème T il existe un ensemble H tel que $\overline{\overline{E_k-H}}<\aleph_0$ pour $k=1,2,\ldots$ et $\overline{\overline{H-H_\xi}}<\aleph_0$ pour $\xi<\alpha$, et, comme $E_1\precsim E_2\precsim\ldots$, il vient $E_1\precsim E_2\precsim\ldots\precsim H$. D'après le lemme 2, il existe donc un ensemble E tel que $E_1\precsim E_2\precsim\ldots\precsim E\precsim H$, donc (vu que $\overline{\overline{H-H_\xi}}<\aleph_0$ pour $\xi<\alpha$), $E\precsim H_\xi$ pour $\xi<\alpha$. Il existe donc un ensemble $E \epsilon F$, tel que $E_1\precsim E_2\precsim\ldots\precsim E\precsim H_\xi$ pour $\xi<\alpha$. Soit H_α le premier terme de la suite $\{N_\xi\}_{\xi<\Omega}$ qui est un ensemble E de ce genre. La suite transfinie d'ensembles $\{H_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ est ainsi définie par l'induction transfinie et on a

$$E_1\precsim E_2\precsim\ldots\precsim H_\alpha \quad \text{pour} \quad \alpha<\Omega \quad \text{et} \quad H_\beta\precsim H_\alpha \quad \text{pour} \quad \alpha<\beta<\Omega.$$

Admettons maintenant qu'il existe un ensemble $X \epsilon F$, donc un terme N_μ de la suite $\{N_\xi\}_{\xi<\Omega}$, tel que

$$E_1 \precsim E_2 \precsim \ldots \precsim N_\mu \precsim H_\alpha \quad \text{pour} \quad \alpha<\Omega.$$

Il existe évidemment pour tout $\alpha<\Omega$ un nombre ordinal $\nu_\alpha<\Omega$ tel que $H_\alpha=N_{\nu_\alpha}$. Soit $\alpha<\Omega$; on a

$$E_1 \precsim E_2 \precsim \ldots N_\mu \precsim H_\xi \quad \text{pour} \quad \xi<\alpha.$$

D'après la définition de l'ensemble $H_\alpha=N_{\nu_\alpha}$, on a donc $\mu \geqslant \nu_\alpha$, pour $\alpha<\Omega$. Mais cela est impossible, puisque, vu que $H_\alpha \precsim H_\beta$ pour $\alpha<\beta<\Omega$, on a $\nu_\alpha \neq \nu_\beta$ pour $\alpha<\beta<\Omega$. Il n'existe donc aucun ensemble $X \epsilon F$ tel que

$$E_1 \precsim E_2 \precsim \ldots \precsim X \precsim H_\alpha \quad \text{pour} \quad \alpha<\Omega.$$

Nous avons ainsi déduit de l'hypothèse du continu l'existence d'ensembles de la famille F, $E_1, E_2, \ldots$ et H_α $(\alpha<\Omega)$, tels que

$$E_1 \precsim E_2 \precsim \ldots \precsim H_\alpha \precsim H_\beta \quad \text{pour} \quad \alpha<\beta<\Omega$$

et qu'il n'existe aucun ensemble $X \epsilon F$ tel que

$$E_1 \precsim E_2 \precsim \ldots \precsim X \precsim H_\alpha \quad \text{pour} \quad \alpha<\Omega.$$

Cela résoût à l'aide de l'hypothèse du continu le problème II de M. Lusin (l. c., p. 409).

M. Lusin a posé (l. c., p. 410) le problème IV suivant (qu'il considère comme le plus intéressant de quatre problèmes qu'il a posé dans sa note):

Existe-t-il ou non une suite transfinie du type Ω d'ensembles infinis de nombres naturels, $\{E_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$, telle que $E_\beta \precsim E_\alpha$ pour $\alpha<\beta<\Omega$ et qu'il n'existe aucun ensemble infini E de nombres naturels tel que $E \precsim E_\alpha$ pour $\alpha<\Omega$?

Je vais déduire de l'hypothèse du continu une réponse positive à ce problème.

Nous définirons la suite transfinie d'ensembles $\{E_\xi\}_{\xi<\Omega}$ par l'induction transfinie comme il suit. Soit $E_1=\{1,2,\ldots\}$. Soit α un nombre ordinal donné, $1<\alpha<\Omega$, et supposons que tous les ensembles E_ξ, où $\xi<\alpha$ soient définis et que $E_\eta \precsim E_\xi$ pour $\xi<\eta<\alpha$. Il résulte sans peine du lemme que j'ai démontré dans le tome 33 de ce journal, p. 9 qu'il existe un ensemble infini $H \epsilon F$ tel que $H \precsim E_\xi$ pour $\xi<\alpha$. Soit E_α le premier terme de la suite $\{N_\xi\}_{\xi<\Omega}$ (dont l'existence a été déduite ci-dessus de l'hypothèse du continu) qui est un ensemble H de ce genre. En raisonnant comme auparavant on démontre sans peine qu'il n'existe aucun ensemble infini E de nombres naturels tel que $E \precsim E_\alpha$ pour $\alpha<\Omega$. Notre assertion est ainsi démontrée.

Il est à remarquer que M. F. Rothberger a démontré récemment (voir ce volume, p. 33) que l'hypothèse du continu équivaut à l'existence d'une suite transfinie du type Ω d'ensembles de nombres naturels $\{E_\xi\}_{\xi<\Omega}$ telle qu'il existe pour tout ensemble infini E de nombres naturels un indice $\alpha<\Omega$ pour lequel $\overline{\overline{E_\alpha - E}}<\aleph_0$. Le même auteur a prouvé aussi (l. c.) qu'il n'existe aucune suite transfinie $\{E_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ d'ensembles de la famille F, telle que $\overline{\overline{E_\beta - E_\alpha}}<\aleph_0$ pour $\alpha<\beta<\Omega$ et que, quel que soit l'ensemble E de nombres naturels, on ait $\overline{\overline{E_\alpha - E}}<\aleph_0$ pour au moins un indice $\alpha<\Omega$.

En remplaçant tout nombre naturel par son double, on déduit tout de suite de notre solution du problème IV de M. Lusin à l'aide de l'hypothèse du continu qu'il existe une suite transfinie $\{P_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ d'ensembles infinis de nombres pairs telle que $P_\beta \precsim P_\alpha$ pour $\alpha<\beta<\Omega$ et qu'il n'existe aucun ensemble infini X (de nombres pairs) tel que $X \precsim P_\alpha$ pour $\alpha<\Omega$, et, pareillement qu'il existe une suite transfinie $\{Q_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ d'ensembles infinis de nombres impairs telle que $Q_\beta \precsim Q_\alpha$ pour $\alpha<\beta<\Omega$ et qu'il n'existe aucun ensemble infini Y (de nombres impairs) tel que $Y \precsim Q_\alpha$ pour $\alpha<\Omega$.

Posons

$$Q=\{1,3,5,\ldots\}, \quad E_\alpha=Q-Q_\alpha \quad \text{et} \quad H_\alpha=Q+P_\alpha \quad \text{pour} \quad \alpha<\Omega.$$

Il vient:

$$E_\alpha \precsim E_\beta \precsim Q \precsim H_\beta \precsim H_\alpha \quad \text{pour} \quad \alpha<\beta<\Omega.$$

Soit X un ensemble de nombres naturels tel que $E_\alpha \precsim X \precsim H_\alpha$ pour $\alpha<\Omega$. Cela donne $Q-X \precsim Q-E_\alpha=Q_\alpha$ pour $\alpha<\Omega$. La propriété de la suite $\{Q_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$, implique que l'ensemble $Q-X$ ne peut pas être infini. D'autre part, comme $X \precsim H_\alpha$ pour $\alpha<\Omega$, on a $X-Q \precsim H_\alpha-Q=P$ pour $\alpha<\Omega$. Vu la propriété de la suite $\{P_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$, l'ensemble $X-Q$ ne peut donc pas être infini. Nous avons ainsi démontré, à l'aide de l'hypothèse du continu, l'existence d'un ensemble Q et de deux suites transfinies du type Ω d'ensembles de nombres naturels, $\{E_\xi\}_{\xi<\Omega}$ et $\{H_\xi\}_{\xi<\Omega}$ telles que

$$E_\alpha \precsim E_\beta \precsim Q \precsim H_\beta \precsim H_\alpha \quad \text{pour} \quad \alpha<\beta<\Omega,$$

et que, pour tout X vérifiant la condition $E_\alpha \precsim X \precsim H_\alpha$ pour $\alpha<\Omega$, on a $\overline{\overline{Q-X}}<\aleph_0$ et $\overline{\overline{X-Q}}<\aleph_0$. Cela résout (à l'aide de l'hypothèse du continu) le problème III de M. Lusin, posé dans sa note citée, p. 409—410.

Sur l'équivalence des ensembles par décomposition en deux parties.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

A et B étant deux ensembles situés dans un espace euclidien (ou, plus généralement, dans un espace métrique) nous écrirons

$$A \underset{n}{=} B$$

et nous dirons que les ensembles A et B sont équivalents par décomposition en n parties, s'il existe des ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$ et $B_1, B_2, \dots, B_n$, tels que

1º $A=A_1+A_2+\dots+A_n$, $B=B_1+B_2+\dots+B_n$,
2º $A_kA_l=B_kB_l=0$ pour $1\leqslant k<l\leqslant n$,
3º $A_k \simeq B_k$ pour $k=1,2,\dots,n$

($P\cong Q$ signifie que les ensembles P et Q sont congruents, c.-à-d. superposables par translation ou rotation).

S'il existe, pour deux ensembles A et B, un nombre naturel n tel que $A \underset{n}{=} B$, nous dirons que les ensembles A et B sont équivalents par décomposition finie.

Nous nous occuperons ici de l'équivalence des ensembles par décomposition en *deux* parties, qui présente une généralisation immédiate de la congruence des ensembles mais qui en diffère aussi sensiblement.

P. e. si E est un ensemble (non vide) situé dans l'espace euclidien à n dimensions, R_n, il existe évidemment dans R_n au plus $2^{\aleph_0}$ ensembles distincts congruents à E. Or, comme on voit sans peine, il existe $2^{2^{\aleph_0}}$ ensembles linéaires distincts H tels que $H \underset{2}{=} I$, où I désigne l'intervalle $(0,1)$.

Théorème 1. *La droite est équivalente par décomposition en deux parties à l'ensemble qu'on obtient en enlevant de la droite un ensemble borné quelconque.*