Let $Z(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ and $Z^*(\mathfrak{m})$ be the following axioms:

$Z(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ $\left\{\begin{array}{l}\textit{if } A \textit{ is a set with the cardinal number } \mathfrak{m} \textit{ and if every element} \\ \textit{of } A \textit{ is a non-void set with cardinal number } \leqslant\mathfrak{n}, \textit{ then there} \\ \textit{is a function } f \textit{ such that } f(X)\in X \textit{ for } X\in A;\end{array}\right.$

$Z^*(\mathfrak{m})$ $\left\{\begin{array}{l}\textit{if } A \textit{ is a set with cardinal number } <\mathfrak{m} \textit{ and if every element} \\ \textit{of } A \textit{ is a non-void set, then there is a function } f \textit{ such that} \\ f(X)\in X \textit{ for } X\in A.\end{array}\right.$

Modifying a little the foregoing proof, we can show that if $\mathfrak{m}$ is a cardinal number definable in the system $\mathfrak{S}_0$ due to Bernays[6]), then the implication $Z^*(\mathfrak{m})\rightarrow Z(\mathfrak{m},2)$ is not provable in $\mathfrak{S}$ (provided that $\mathfrak{S}$ is self consistent).

[6]) P. Bernays, Journal of Symbolic Logic **2** (1937), pp. 65-77 and **6** (1941), pp. 1-17.

Ensembles projectifs et ensembles singuliers [1]).

Par

Casimir Kuratowski (Warszawa).

D'après un résultat fondamental de M. Gödel[2]), l'hypothèse du continu est compatible avec le système d'axiomes de la Théorie des Ensembles. Plus encore: on ne parvient à aucune contradiction en admettant l'hypothèse suivante — que l'on peut nommer *hypothèse projective du continu* (ou tout court, *hypothèse H_p*) — *il existe une relation $x\prec y$ qui range l'ensemble de tous les nombres réels de l'intervalle* 01 *en une suite transfinie du type Ω et de façon que l'ensemble plan $\underset{xy}{E}(x\prec y)$ soit projectif*[3]).

L'hypothèse H_p implique aussitôt l'existence d'ensembles projectifs non mesurables au sens de Lebesgue. On constate, en effet, facilement que l'ensemble $\underset{xy}{E}(x\prec y)$ est non mesurable.

Une autre conséquence remarquable de l'hypothèse H_p est l'existence d'ensembles projectifs indénombrables dépourvus de sous-ensembles parfaits (non vides)[4]).

De façon plus générale, on peut établir — comme je montre dans cette note — des énoncés généraux qui permettent de démontrer qu'en admettant l'hypothèse H_p, les constructions utilisées d'habitude pour prouver l'existence de différents ensembles „singu-

[1]) Le manuscrit de cet ouvrage a été rédigé en Décembre 1939. Détruit par le feu en 1944, il fut reconstruit après la guerre et présenté au Congrès des Mathématiciens Polonais à Wrocław le 13 Déc. 1946.

[2]) Voir *The consistency of the Continuum Hypothesis*, Annals of Math. Studies, Princeton 1940. Signalé antérieurement dans Proc. Nat. Acad. of Sciences **24** (1938), p. 556 et **25** (1939).

[3]) On appelle *projectifs* les ensembles (situés dans l'espace euclidien à n dimensions) qui se déduisent à partir des ensembles fermés par l'application de deux opérations: projection et passage au complémentaire, effectuées un nombre fini de fois. Pour plus de détails, voir par exemple, ma *Topologie* I, Monogr. Matem. **3**, Warszawa 1933, § 34.

[4]) Cf. K. Gödel, l. c., Proc. Nat. Acad. of Sc. **25**.

liers" — tels que les ensembles toujours de première catégorie, ensembles à propriétés ν de Lusin, ensembles à propriété σ de Sierpiński[5]) etc. — conduisent à des ensembles singuliers projectifs.

La méthode habituelle de la démonstration de la projectivité d'un ensemble dont la définition est donnée repose sur l'interprétation géométrique des opérateurs logiques: si la définition de l'ensemble considéré, exprimée en symboles logiques se déduit des fonctions propositionnelles projectives[6]) à l'aide des opérateurs logiques $+$, $\cdot$, $'$, $\sum\limits_x$ et $\prod\limits_x$, cet ensemble est projectif[7]).

Or, dans le cas d'ensembles „singuliers", on ne connaît pas de démonstration *effective*: on démontre leur existence sans en donner d'exemple individuel bien défini. Cependant, si l'on disposait d'une relation $x \prec y$ établissant un ordre du type Ω dans l'espace, ces démonstrations deviendraient effectives: elles permettraient de définir un ensemble jouissant de la singularité en question.

On parvient ainsi à la conclusion qu'*en admettant l'hypothèse H_p, les ensembles singuliers qui se laissent définir (explicitement) à l'aide des fonctions propositionnelles projectives (y compris la relation $x \prec y$) sont projectifs.*

En ce qui concerne les définitions implicites, telles que les définitions par *l'induction transfinie*, nous allons voir que dans ce cas aussi on reste — sous des hypothèses très générales — dans le domaine des ensembles projectifs.

1. Projectivité du principe du choix. Soit $\mathfrak{X}$ un espace complet, séparable et indénombrable. $\boldsymbol{F}$ étant une famille de sous-ensembles (non vides) de cet espace, il existe — d'après le principe du choix — une fonction qui fait correspondre à tout ensemble-élément X de $\boldsymbol{F}$ un élément de X. En admettant l'hypothèse H_p, l'espace $\mathfrak{X}$, en tant qu'une image biunivoque et continue d'un sous-ensemble G_δ de l'intervalle[8]), se laisse ranger en une suite transfinie du type Ω et la relation $x \prec y$, qui établit cet ordre, est projective,

[5]) Pour les définitions voir No 3 et 4.

[6]) Une fonction propositionnelle $\varphi(x,y,\dots,z)$ est nommée *projective* lorsque l'ensemble $\underset{x\dots z}{E}\ \varphi(x,y,\dots,z)$ est projectif.

[7]) Voir la note de M. Tarski et de moi-même *Les opérations logiques et les ensembles projectifs*, Fund. Math. **17** (1931), p. 246, ou bien *Topologie* I, p. 244.

[8]) Voir, par exemple, *Topologie* I, p. 226, corollaire.

c.-à-d. que l'ensemble $\underset{xy}{E}(x \prec y)$ est projectif. Cette hypothèse permet de „réaliser" le principe du choix: les points de l'espace formant un ensemble bien ordonné, on fait correspondre à tout $X \in \boldsymbol{F}$ le premier élément de X, désignons-le par $p(X)$. En symbole:

$$(1)\qquad [x=p(X)] \equiv (x \in X)\cdot \prod_y [y \in X) \to (x \preceq y)].$$

Soit $C(\boldsymbol{F})$ l'ensemble „choisi" de $\boldsymbol{F}$, c.-à-d. l'ensemble des éléments $p(X)$ où X parcourt la famille $\boldsymbol{F}$. En symboles logiques:

$$(2)\qquad x \in C(\boldsymbol{F}) \equiv \sum_X [x=p(X)]\,(X \in \boldsymbol{F}).$$

Nous allons démontrer que, sous des hypothèses qui sont réalisées dans de nombreuses applications, l'ensemble $C(\boldsymbol{F})$ est projectif.

Rappelons à ce but qu'on appelle fonction universelle relativement à la famille $\boldsymbol{F}$ toute fonction $F(t)$ qui fait correspondre au paramètre t (parcourant un ensemble T situé dans l'intervalle 01) un ensemble $F(t)$ de la famille $\boldsymbol{F}$ de façon que tout ensemble-élément de $\boldsymbol{F}$ corresponde à une valeur, au moins, de t. En symbole:

$$(3)\qquad (X \in \boldsymbol{F}) \equiv \sum_t [X=F(t)].$$

Dans le cas où l'ensemble

$$\underset{tx}{E}\,[x \in F(t)]$$

est projectif (de classe $\boldsymbol{L}_n$), nous dirons que la fonction universelle $\boldsymbol{F}$, ainsi que *la famille $\boldsymbol{F}$, est projective* (de classe $\boldsymbol{L}_n$).

Par exemple les familles suivantes sont projectives[9]): la famille des ensembles dénombrables, celle des ensembles boreliens, celle des ensembles projectifs de classe $\boldsymbol{L}_n$.

Théorème 1. *L'hypothèse H_p implique que, $\boldsymbol{F}$ étant une famille projective d'ensembles, l'ensemble „choisi" $C(\boldsymbol{F})$ est projectif.*

On a en effet, d'après (2), (3) et (1):

$$[x \in C(\boldsymbol{F})] \equiv \sum_t \{x=p[F(t)]\}$$
$$\equiv \sum_t [x \in F(t)]\cdot \prod_y \{[y \in F(t)] \to (x \preceq y)\}.$$

[9]) Cf. ibid. pp. 172 et 241.

Les fonctions propositionnelles $x \in F(t)$ et $x \preceq y$ étant projectives par hypothèse, l'ensemble $C(\boldsymbol{F})$ est projectif en vertu de l'équivalence envisagée.

2. Projectivité de l'ensemble de Vitali. Décomposons l'ensemble des nombres réels en sous-ensembles (dénombrables) en rangeant deux nombres réels dans le même ensemble dans ce cas et dans ce cas seulement lorsque leur différence est rationnelle. Désignons par $\boldsymbol{F}$ la famille de ces ensembles.

On a donc par définition:

$$(X \in \boldsymbol{F}) \equiv (X \neq 0) \cdot \prod_{xy} \{(x \in X) \rightarrow [(y \in X) \equiv (x - y \in R)]\},$$

R désignant l'ensemble des nombres rationnels.

Tout ensemble qui contient un et un seul élément de chaque ensemble appartenant à la famille $\boldsymbol{F}$ est nommé ensemble de Vitali. $C(\boldsymbol{F})$ est donc un ensemble de Vitali. Nous allons démontrer, en admettant l'hypothèse H_p, que *l'ensemble $C(\boldsymbol{F})$ est projectif.*

Cela revient à dire en vertu du th. 1, que la famille $\boldsymbol{F}$ est projective, c.-à-d. qu'il existe une fonction $F(t)$, $t \in T$, universelle par rapport à $\boldsymbol{F}$ et telle que l'ensemble $\underset{tx}{E}[x \in F(t)]$ est projectif.

Or, $D(t)$, où $0 \leqslant t \leqslant 1$, désignant une fonction universelle par rapport aux ensembles dénombrables (infinis) et telle que l'ensemble $\underset{tx}{E}[x \in D(t)]$ est projectif, désignons par T l'ensemble des t tels que $D(t) \in \boldsymbol{F}$ et par $F(t)$ la fonction qui s'obtient de $D(t)$ en restreignant la variabilité de t à l'ensemble T. En symbole:

$$\begin{aligned} (t \in T) &\equiv [D(t) \in \boldsymbol{F}] \\ &\equiv \prod_{xy} \{(x \in D(t)) \rightarrow [(y \in D(t)) \equiv (x - y \in R)]\}, \\ [x \in F(t)] &\equiv [x \in D(t)]\,(t \in T). \end{aligned}$$

On constate aussitôt qu'en raison de la projectivité de l'ensemble $\underset{tx}{E}[x \in D(t)]$, les ensembles T et $\underset{tx}{E}[x \in F(t)]$ sont projectifs.

La projectivité de l'ensemble $C(\boldsymbol{F})$ de Vitali se trouve ainsi établie. Comme on sait[10]), cet ensemble est dépourvu de la propriété de Baire et — par une légère modification — il se transforme en un ensemble projectif non mesurable au sens de Lebesgue.

[10]) Cf. ibid. p. 53.

3. Projectivité des espaces à propriété ν de Lusin. On appelle ainsi un espace indénombrable dont tout sous-ensemble non-dense (infini) est dénombrable. On démontre l'existence des espaces à propriété ν en se basant sur l'hypothèse du continu[11]): on range tous les sous-ensembles fermés non-denses de l'intervalle 01 en une suite transfinie du type Ω:

$$F_0, F_1, \ldots, F_\alpha, \ldots$$

et on choisit un point de chaque différence

$$F_\alpha - \sum_{\xi < \alpha} F_\xi$$

qui est non vide.

Cette construction peut être précisée comme suit.

Soit $F(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, une fonction universelle projective pour la famille des ensembles fermés non-denses (la construction d'une fonction de ce genre ne présente aucune difficulté). Soit T l'ensemble des t tels que

$$F(t) - \sum_{u \prec t} F(u) \neq 0.$$

Autrement dit,

$$(t \in T) \equiv \sum_x [x \in F(t)] \prod_u \{(u \prec t) \rightarrow [x \text{ non-}\in F(u)]\}. \tag{4}$$

L'ensemble L défini par l'équivalence

$$(x \in L) \equiv \sum_t \{x = p[F(t)]\}\,(t \in T) \tag{5}$$

jouit de la propriété ν.

En outre, T est projectif en vertu de (4) et de H_p; donc L est projectif d'après (5) et (1).

4. Projectivité d'autres espaces singuliers. On démontre à l'aide de l'hypothèse du continu qu'il existe dans l'intervalle 01 *un ensemble indénombrable S qui ne contient aucun sous-ensemble mesurable au sens de Lebesgue qui soit indénombrable*[12]).

On range à ce but tous les ensembles $\boldsymbol{G}_\delta$ de mesure 0 (contenus dans l'intervalle 01) en une suite transfinie du type Ω:

$$G_0, G_1, \ldots, G_\alpha, \ldots$$

[11]) N. Lusin, C. R. Paris **158** (1914), p. 1259. Cf. *Topologie* I, p. 273.
[12]) W. Sierpiński, Fund. Math. **5** (1924). Cf. *Topologie* I, p. 272.

et on choisit un point de chaque différence

$$G_\alpha - \sum_{\xi<\alpha} G_\xi$$

qui est non vide.

L'ensemble S consiste des points choisis.

Pour avoir un ensemble S projectif, on se sert d'une méthode complètement analogue à celle du N°3: Soit $G(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, une fonction universelle projective pour la famille des sous-ensembles G_δ de l'intervalle 01 (il est d'ailleurs légitime d'admettre que l'ensemble $\underset{tx}{E}[x \in G(t)]$ est un G_δ). Soit

$$(6) \qquad T_0 = \underset{t}{E}[\text{mes } F(t) = 0].$$

On constate aussitôt (en analysant la démonstration du N°3) que la démonstration de la projectivité de l'ensemble S se ramène à établir la projectivité de T_0.

Envisageons, à cet effet, la définition de la mesure 0: pour qu'on ait mes $X=0$, il faut et il suffit qu'il existe pour tout $\varepsilon>0$ une suite d'intervalles recouvrant l'ensemble X et dont la somme de longueurs soit $<\varepsilon$; autrement dit: qu'il existe deux suites de nombres réels

$$\mathfrak{z} = [\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \ldots] \quad \text{et} \quad \mathfrak{w} = [\mathfrak{w}^1, \mathfrak{w}^2, \ldots]$$

telles que

$$X \subset \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{z}^n \mathfrak{w}^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{w}^n - \mathfrak{z}^n) < \varepsilon.$$

Ceci se laisse exprimer aussi comme suit:

$$(\text{mes } X = 0) \equiv \prod_k \sum_{\mathfrak{z}\mathfrak{w}} \Big\{ \prod_x [(x \in X) \to \sum_n (\mathfrak{z}^n < x < \mathfrak{w}^n)] \cdot \\ \cdot \prod_m [(\mathfrak{w}^1 - \mathfrak{z}^1) + \ldots + (\mathfrak{w}^m - \mathfrak{z}^m)] \leqslant \frac{1}{k} \Big\}.$$

En remplaçant X par $F(t)$, il en résulte en tenant compte de (6) que l'ensemble T_0 est projectif (autrement dit, la famille des ensembles G_δ de mesure 0 est projective).

L'ensemble S dont la projectivité vient d'être établie (en s'appuyant sur l'hypothèse H_p) jouit de différentes singularités: tout sous-ensemble dénombrable est un G_δ relatif à S (c.-à-d. que S est „raréfié"); en conséquence tout sous-ensemble dense en soi est de première catégorie sur lui-même (c.-à-d. que S est „toujours de première catégorie"); tout sous-ensemble relativement borelien est un G_δ relatif („propriété σ de Sierpiński").

5. Projectivité des ensembles définis par l'induction transfinie. De nombreuses constructions basées sur l'application de l'induction transfinie et de l'hypothèse du continu peuvent être déduites du schèma suivant. Imaginons l'espace (complet, séparable et indénombrable) $\mathfrak{X}$ rangé en suite transfinie du type Ω.

Donnons-nous une fonction $Y = F(X,t)$ qui fait correspondre à tout sous-ensemble dénombrable X de $\mathfrak{X}$ et à tout élément t de $\mathfrak{X}$ un sous-ensemble non-vide Y de $\mathfrak{X}$. Désignons par $A(t)$ l'ensemble $\underset{u}{E}(u \prec t)$. On démontre facilement à l'aide de l'induction transfinie qu'il existe une et une seule fonction $f(t)$ satisfaisant pour $0 \leqslant t \leqslant 1$ à la condition

$$(7) \qquad f(t) = pF\{f[A(t)], t\},$$

$f[A(t)]$ désignant, comme d'habitude, l'ensemble ayant pour éléments tous les $f(u)$ tels que $u \in A(t)$, c.-à-d. que $u \prec t$.

En particulier, en désignant par x_0 le premier élément de l'espace $\mathfrak{X}$, par x_1 — le deuxième etc., on a

$$f(x_0) = pF(0, x_0), \quad f(x_1) = pF\{[f(x_0)], x_1\} \quad \text{etc.}$$

Théorème. *Si la fonction propositionnelle $y \in F(X,t)$ est projective*[13]*, il en est de même de la fonction propositionnelle $x = f(t)$ définie par la condition* (7).

Par conséquent *l'ensemble de tous les $f(t)$, c.-à-d. l'ensemble $S = \underset{x}{E} \sum_t [x = f(t)]$ est aussi projectif.*

Pour s'en convaincre, il faut d'abord remplacer la définition implicite de la fonction f, donnée par la formule (7), par une définition explicite[14]).

Or, on constate facilement que, pour qu'on ait $x = f(t)$ (pour un t donné), il faut et il suffit qu'il existe une fonction f^* telle que $x = f^*(t)$, et qui satisfasse pour les arguments $u \preceq t$ à la condition (7);

---

[13]) En généralisant la notion, employée dans le N°1, de famille projective d'ensembles, nous appelons projective toute fonction propositionnelle $\varphi(X\, x, y, \ldots)$ où $X \in \boldsymbol{F}$, lorsqu'il existe une fonction $F(t)$ universelle par rapport à la famille $\boldsymbol{F}$ et telle que l'ensemble

$$\underset{txy\ldots}{E} \varphi[F(t), x, y, \ldots]$$

est projectif.

[14]) Voir, dans un ordre d'idées analogue, ma note *Les ensembles projectifs et l'induction transfinie,* Fund. Math. **27** (1936), p. 271.

ou encore: qu'il existe une fonction g vérifiant la condition (7) pour $u \preceq t$, telle que $x = g(t)$ et appartenant à une famille de fonctions comprenant les fonctions constantes, abstraction faite d'un ensemble dénombrable d'arguments.

En symbole:

$$[x = f(t)] \equiv \sum_g [x = g(t)] \cdot \prod_u (u \preceq t) \to \{g(u) = pF\{f[A(u)], u\}\},$$

la variabilité de g étant restreinte aux fonctions de deuxième classe de Baire.

La projectivité de la fonction propositionnelle $x = f(t)$ résulte des faits suivants:

1) L'ensemble $\underset{txy}{E}[x = g(t)]$ est projectif (borelien), car il existe une fonction de Baire $h(t,s)$, universelle par rapport à la deuxième classe de Baire.

2) $\{x = pF\{f[A(u)], u\}\} \equiv \sum_X [X = A(u)]\, [x = pF(X,u)]$,

où X parcourt la famille (projective) des ensembles dénombrables, donc où l'ensemble

$$\underset{xuX}{E}[x = pF(X,u)]$$

est projectif (d'après (1)).

3) L'hypothèse H_p.

6. Application aux problèmes de l'ordre de croissance. Soit $\mathcal{N}$ l'espace des nombres irrationnels de l'intervalle 01. Convenons de dire que la suite d'entiers positifs $\mathfrak{w} = [\mathfrak{w}^1, \mathfrak{w}^2, \ldots]$ croît plus rapidement que la suite $\mathfrak{z} = [\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \ldots]$, en symbole $\mathfrak{z} \varrho \mathfrak{w}$, lorsqu'à partir d'un indice suffisamment grand, on a constamment $\mathfrak{z}^m < \mathfrak{w}^m$; cela veut dire que

$$\sum_n \prod_k (\mathfrak{z}^{n+k} < \mathfrak{w}^{n+k}).$$

On constate facilement qu'à chaque ensemble dénombrable X de suites d'entiers positifs correspond une suite (d'entiers positifs) qui croît plus rapidement que chacune des suites appartenant à X. Autrement dit, l'ensemble

$$F(X) = \underset{\mathfrak{w}}{E} \prod_{\mathfrak{z}} [(\mathfrak{z} \in X) \to (\mathfrak{z} \varrho \mathfrak{w})] \tag{8}$$

est non vide.

En remplaçant dans le N° 5 la fonction $F(X,t)$ par $F(X)$, on en conclut qu'il existe une suite transfinie du type Ω de suites croissantes de plus en plus rapidement. L'ensemble S de ces suites peut être conçu comme un sous-ensemble de l'espace $\mathcal{N}$, en identifiant le nombre irrationnel

$$\mathfrak{z} = \frac{1|}{|\mathfrak{z}^1} + \frac{1|}{|\mathfrak{z}^2} + \ldots$$

avec la suite $\mathfrak{z}^1, \mathfrak{z}^2, \ldots$

La fonction propositionnelle $\mathfrak{w} \in F(X)$ (des variables $\mathfrak{w}$ et X) étant projective d'après (8), l'ensemble S est projectif d'après le théorème du N° 5.

Ajoutons que l'ensemble S a la propriété remarquable d'être raréfié, c.-à-d. que tout sous-ensemble dénombrable de S est un G_δ relativement à S [15]).

7. Application à la construction d'un ensemble qui — de même que son complémentaire — ne contient aucun ensemble parfait (non vide). Soit $P(t)$ une fonction universelle projective pour la famille des sous-ensembles parfaits (non vides) de l'intervalle $\mathcal{J} = 01$. Soient $\mathfrak{X}$ le carré $\mathcal{J}^2$ et D sa diagonale. Pour $X \subset \mathfrak{X}$ désignons par X^* l'ensemble de tous les points (y,t) et (t,x) tels que $(x,y) \in X$:

$$[(u,v) \in X^*] \equiv \sum_{xy} [(x,y) \in X]\, [(x = v) + (y = u)]. \tag{9}$$

Posons pour tout X fini ou dénombrable:

$$F(X,t) = P(t) \times P(t) - D - X^*. \tag{10}$$

Comme $\overline{\overline{P(t)}} = \mathfrak{c}$ et $\overline{\overline{X}} \leqslant \aleph_0$, on constate facilement que $F(X,t) \neq 0$ quel que soit t.

Soit $X = \underset{u}{E}(u \prec t)$. Il existe donc deux fonctions $a(t)$ et $b(t)$ telles que

1° $a(t) \in P(t)$ et $b(t) \in P(t)$,

2° $a(t) \neq b(t)$,

3° $a(t) \neq b(u)$ et $b(t) \neq a(u)$ pour $u \prec t$.

---

[15]) Voir N. Lusin *Sur l'existence d'un ensemble non dénombrable qui est de première catégorie sur tout ensemble parfait*, Fund. Math. **2** (1921), p. 155. Cf. *Topologie* I, p. 270.

L'ensemble A des valeurs de la fonction $a(t)$ est donc disjoint de l'ensemble B des valeurs de la fonction $b(t)$. Chacun d'eux contient des points communs avec tout ensemble parfait (non vide). Les ensembles A et $\mathcal{I}-A$ sont donc dépourvus de sous-ensembles parfaits (non vides) [16].

En outre, en posant dans la formule (7): $f(t)=[a(t), b(t)]$, on déduit du théorème du N° 5 et des formules (9) et (10) que l'ensemble A est projectif.

[16]) Voir F. Bernstein, Leipz. Ber. **60** (1908), p. 329. Cf. *Topologie* I, p. 267.

Sur les ensembles presque contenus les uns dans les autres.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

1. E et H étant deux ensembles (formés d'éléments quelconques), nous dirons que l'ensemble E est *presque contenu* dans H et nous écrirons

$$E\ast\subset H,$$

si l'ensemble $E-H$ est fini (ou vide) [1]).

On démontre facilement les 4 énoncés suivants:

(1) *Si* $E\subset H$, *on a* $E\ast\subset H$,

(2) *Si* $E\ast\subset G$ *et* $G\ast\subset H$, *on a* $E\ast\subset H$

[puisque $E-H\subset(E-G)+(G-H)$],

(3) *Si* $E_i\ast\subset H$ pour $i=1,2,\dots,m$, *on a* $E_1+E_2+\dots+E_m\ast\subset H$

[car $(E_1+E_2+\dots+E_m)-H=(E_1-H)+(E_2-H)+\dots+(E_m-H)$],

(4) *Si* $E\ast\subset H_i$ *pour* $i=1,2,\dots,m$, *on a* $E\ast\subset H_1H_2\dots H_m$

[puisque $E-H_1H_2\dots H_m=(E-H_1)+(E-H_2)+\dots+(E-H_m)$].

Théorème T: *$E_1, E_2, \dots$ et $H_1, H_2, \dots$ étant deux suites infinies d'ensembles, telles que $E_i\ast\subset H_k$ pour i et k naturels, il existe un ensemble X tel que $E\ast\subset X\ast\subset H$ pour i et k naturels.*

Démonstration. Posons

(5) $$X=E_1H_1+E_2H_1H_2+\dots+E_iH_1H_2\dots H_i+\dots$$

Comme $E_i\ast\subset H_k$ pour i et k naturels, on a, d'après (1) et (4): $E_i\ast\subset E_iH_1H_2\dots H_i$ pour $i=1,2,\dots$, donc, d'après (5), (1) et

[1]) Cf. W. Sierpiński, Fund. Math. **33** (1945), p. 9.