Un théorème de séparabilité pour les produits topologiques.

Par

M. Bockstein (Moscou).

Soit $\{T_\alpha\}$ $(\alpha=1,2,\ldots,\omega,\ldots,\Omega,\ldots|\xi)$ une famille quelconque d'espaces topologiques satisfaisant au second axiome de dénombrabilité et soit

$$v_1^\alpha,\ v_2^\alpha,\ v_3^\alpha,\ldots$$

un système fondamental dénombrable (ou fini) d'ensembles ouverts dans T_α.

On définit le produit topologique $T=\prod\limits_\alpha T_\alpha$ des espaces T_α comme l'espace topologique dont les points x sont des systèmes $\{x_\alpha\}$, $x_\alpha \,\varepsilon\, T_\alpha$ $(\alpha=1,2,\ldots,\omega,\ldots,\Omega,\ldots|\xi)$ et dont un système fondamental d'ensembles ouverts est formé par la réunion de tous les ensembles de $x=\{x_\alpha\}$ qu'on peut obtenir en assujettissant un nombre fini de x_α (de coordonnées de x) à parcourir les ensembles ouverts $v_{i_\alpha}^\alpha$ dans T_α choisis d'une manière quelconque dans les systèmes fondamentaux donnés, tandis que les autres x_α admettent toutes les valeurs possibles[1]). De tels ensembles seront appelés **ensembles ouverts élémentaires**. On désignera par

$$(1)\qquad O_{\alpha_1\ldots\alpha_m}(v_{i_1}^{\alpha_1},\ldots,v_{i_m}^{\alpha_m})$$

(tous les α_r sont différents) l'ensemble ouvert élémentaire défini par $x_{\alpha_1} \,\varepsilon\, v_{i_1}^{\alpha_1},\ldots,x_{\alpha_m} \,\varepsilon\, v_{i_m}^{\alpha_m}$.

Un ensemble ouvert dans T est une somme arbitraire d'ensembles ouverts élémentaires. Les sommes au plus dénombrables d'ensembles ouverts élémentaires seront appelées **ensembles ouverts à construction dénombrable**.

Le but du présent article est de démontrer la proposition suivante:

Théorème. *Deux ensembles ouverts disjoints U et V dans T sont séparables au moyen des ensembles ouverts à construction dénombrable, c'est-à-dire l'on peut trouver deux ensembles ouverts à construction dénombrable $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$ tels que $\boldsymbol{U}\supset U$, $\boldsymbol{V}\supset V$, $\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{V}=0$.*

On peut évidemment donner à ce théorème la forme suivante qui sera plus commode pour la démonstration:

Soient $\mathfrak{U}=\{U_\varkappa\}$ et $\mathfrak{V}=\{V_\lambda\}$ deux systèmes d'ensembles ouverts élémentaires dans T[2])

$$U_\varkappa=O_{\alpha_1^\varkappa\ldots\alpha_{m_\varkappa}^\varkappa}(v_{i_1^\varkappa},\ldots,v_{i_{m_\varkappa}^\varkappa}),$$

$$V_\lambda=O_{\beta_1^\lambda\ldots\beta_{n_\lambda}^\lambda}(v_{j_1^\lambda},\ldots,v_{j_{n_\lambda}^\lambda}),$$

tels que $\Sigma U_\varkappa$ et ΣV_λ sont disjoints.

On peut toujours trouver deux systèmes au plus dénombrables $\{\boldsymbol{U}_k\}$ et $\{\boldsymbol{V}_l\}$ d'ensembles ouverts élémentaires tels que l'on ait

$$\Sigma\boldsymbol{U}_k\supset\Sigma U_\varkappa,\quad \Sigma\boldsymbol{V}_l\supset\Sigma V_\lambda,$$

$$\boldsymbol{U}_k\cdot\boldsymbol{V}_l=0.$$

Pour démontrer ce théorème nous allons prouver que le système $\mathfrak{U}=\{U_\varkappa\}$ peut être subdivisé en une famille $\mathcal{F}$ au plus dénombrable de systèmes $\mathfrak{U}_k$, dont chacun peut être majoré par un ensemble ouvert élémentaire $\boldsymbol{U}_k$ (cela veut dire que l'on a $\boldsymbol{U}_k\supset U_k$ si $U_k \,\varepsilon\, \mathfrak{U}_k$)[3]) sans point commun avec les ensembles ouverts élémentaires V_λ du système $\mathfrak{V}$. Pour achever la démonstration il ne restera alors qu'à répéter le même procédé par rapport aux systèmes $\mathfrak{V}$ et $\{\boldsymbol{U}_k\}$.

Développons d'abord $\mathfrak{U}$ en une somme au plus dénombrable de systèmes

$$\mathfrak{U}=\mathfrak{U}^1+\mathfrak{U}^2+\ldots+\mathfrak{U}^m+\ldots,$$

$\mathfrak{U}^m$ étant formé par les $U_\varkappa \,\varepsilon\, \mathfrak{U}$ pour lesquels on a $m_\varkappa=m$.

Les $U_\varkappa \varepsilon \mathfrak{U}^m$ étant sans point commun avec

$$V_1 = \mathcal{O}_{\beta_1^1 \dots \beta_{n_1}^1}(v_{j_1^1}, \dots, v_{j_{n_1}^1}),$$

chacun d'eux, écrit dans la forme (1), doit contenir l'un des indices $\beta_1^1, \dots, \beta_{m_1}^1$ [4]); donc $\mathfrak{U}^m$ peut être subdivisé en un nombre fini de systèmes

$$\mathfrak{U}^m = \mathfrak{U}^m_{\beta_1^1} + \mathfrak{U}^m_{\beta_2^1} + \dots + \mathfrak{U}^m_{\beta_{n_1}^1},$$

où $\mathfrak{U}^m_{\beta_s^1}$ est composé des $U_\varkappa = \mathcal{O}_{\alpha_1^\varkappa \dots \alpha_m^\varkappa}(v_{i_1^\varkappa}, \dots, v_{i_m^\varkappa}) \,\varepsilon\, \mathfrak{U}^m$ tels que β_s^1 est égal à l'un des $\alpha_r^\varkappa$ $(r = 1, 2, \dots, m)$ qu'on peut — sans restreindre la généralité — supposer égal à $\alpha_1^\varkappa$.

Chacun des systèmes $\mathfrak{U}^m_{\beta_s^1}$ $(s = 1, 2, \dots, n)$ peut être subdivisé en une somme au plus dénombrable de systèmes

$$\mathfrak{U}^m_{\beta_s^1} = \mathfrak{U}^m_{\beta_s^1 v_1} + \mathfrak{U}^m_{\beta_s^1 v_2} + \dots + \mathfrak{U}^m_{\beta_s^1 v_i} + \dots,$$

$\mathfrak{U}^m_{\beta_s^1 v_i}$ désignant le système des $U_\varkappa \,\varepsilon\, \mathfrak{U}^m_{\beta_s^1}$ pour lesquels on a $v_{i_1^\varkappa} = v_i$.

Si β_s^1 est pour tout λ égal à un des β_t^λ (soit à $\beta_{t_\lambda}^\lambda$) et si en outre v_i n'a de point commun avec aucun des $v_{j_{t_\lambda}^\lambda}$, le système $\mathfrak{U}^m_{\beta_s^1 v_i}$ sera rangé parmi les éléments de la famille $\mathcal{F}$, ce qui est légitime, car $\mathfrak{U}^m_{\beta_s^1 v_i}$ peut être évidemment majoré [3]) dans ce cas par l'ensemble ouvert élémentaire

$$U^m_{s,r} = \mathcal{O}_{\beta_s^1}(v_i)$$

sans point commun avec les ensembles V_λ du système $\mathfrak{V}$.

Dans le cas contraire, il existe un $\lambda_1 = \lambda_1(s, i)$ tel que ou bien β_s^1 n'est égal à aucun $\beta_t^{\lambda_1}$ $(t = 1, \dots, n_{\lambda_1})$, ou bien $\alpha_1^\varkappa = \beta_s^1 = \beta_{t_{\lambda_1}}^{\lambda_1}$, mais $v_i \cdot v_{j_{t_{\lambda_1}}^{\lambda_1}} \neq 0$. Comme tous les $U_\varkappa \,\varepsilon\, \mathfrak{U}^m_{\beta_s^1 v_i}$ sont sans point commun avec $V_{\lambda_1} = \mathcal{O}_{\beta_1^{\lambda_1} \dots \beta_{n_{\lambda_1}}^{\lambda_1}}(v_{j_1^{\lambda_1}}, \dots, v_{j_{n_{\lambda_1}}^{\lambda_1}})$, on en conclut [4]) que chacun d'eux, écrit dans la forme (1), contient, outre β_s^1 l'un des indices $\beta_1^{\lambda_1}, \dots, \beta_{n_{\lambda_1}}^{\lambda_1}$ différent de β_s^1 qu'on peut supposer égal à $\alpha_2^\varkappa$, et $\mathfrak{U}^m_{\beta_s^1 v_i}$ se décompose en un nombre fini de systèmes $\mathfrak{U}^m_{\beta_s^1 v_i \beta_{s'}^{\lambda_1}}$ $(s' = 1, 2, \dots, n_{\lambda_1})$, tout $\mathfrak{U}^m_{\beta_s^1 v_i \beta_{s'}^{\lambda_1}}$ étant formé par les ensembles ouverts élémentaires $U_\varkappa \,\varepsilon\, \mathfrak{U}^m_{\beta_s^1 v_i}$ de la forme $\mathcal{O}_{\beta_s^1 \beta_{s'}^{\lambda_1} \alpha_3^\varkappa \dots \alpha_m^\varkappa}(v_i, v_{i_2^\varkappa}, \dots, v_{i_m^\varkappa})$.

Le système $\mathfrak{U}^m_{\beta_s^1 v_i \beta_{s'}^{\lambda_1}}$ peut être, à son tour, développé en une somme au plus dénombrable de systèmes $\mathfrak{U}^m_{\beta_s^1 v_i \beta_{s'}^{\lambda_1} v_{i'}}$ $(i' = 1, 2, 3, \dots)$ des $U_\varkappa \,\varepsilon\, \mathfrak{U}^m_{\beta_s^1 v_i \beta_{s'}^{\lambda_1}}$ de la forme $\mathcal{O}_{\beta_s^1 \beta_{s'}^{\lambda_1} \alpha_3^\varkappa \dots \alpha_m^\varkappa}(v_i, v_{i'}, v_{i_3^\varkappa}, \dots, v_{i_m^\varkappa})$.

Si $\beta_{s'}^{\lambda_1}$ est égal à l'un des β_t^λ (soit à $\beta_{t'_\lambda}^\lambda$) pour tout λ et si en outre $v_{i'}$ n'a de point commun avec aucun des $v_{j_{t'_\lambda}^\lambda}$ nous rangerons le système $\mathfrak{U}^m_{\beta_s^1 v_i \beta_{s'}^{\lambda_1} v_{i'}}$ parmi les éléments de la famille $\mathcal{F}$, l'ensemble ouvert élémentaire majorant [3]) étant

$$U^m_{s,i,s',i'} = \mathcal{O}_{\beta_{s'}^{\lambda_1(s,i)}}(v_{i'}).$$

Dans le cas contraire, $\mathfrak{U}^m_{\beta_s^1 v_i \beta_{s'}^{\lambda_1} v_{i'}}$ sera subdivisé de nouveau et l'on poursuivra ce procédé jusqu'au moment où il s'interrompe, ce qui ne tardera point d'avoir lieu (au $m^{\text{ième}}$ pas au plus tard) car les systèmes $\mathfrak{U}^m_{\beta_s^1 v_i \beta_{s'}^{\lambda_1} v_{i'} \dots \beta_{s^{(m-1)}}^{\lambda_{m-1}} v_{i^{(m-1)}}}$ ne peuvent contenir plus qu'un seul élément, à savoir l'ensemble ouvert élémentaire

$$\mathcal{O}_{\beta_s^1 \beta_{s'}^{\lambda_1} \dots \beta_{s^{(m-1)}}^{\lambda_{m-1}}}(v_i, v_{i'}, \dots, v_{i^{(m-1)}}),$$

donc peuvent être majorés par ces éléments mêmes; c'est-à-dire on pose

$$U^m_{s,i,s',i',\dots,s^{(m-1)},i^{(m-1)}} = \mathcal{O}_{\beta_s^1 \beta_{s'}^{\lambda_1} \dots \beta_{s^{(m-1)}}^{\lambda_{m-1}}}(v_i, v_{i'}, \dots, v_{i^{(m-1)}}),$$

de sorte qu'on peut les ranger parmi les éléments de la famille $\mathcal{F}$. Le système $\mathfrak{U}$ est ainsi subdivisé en des systèmes partielles $\varepsilon\, \mathcal{F}$.

La famille $\mathcal{F}$ étant dénombrable, on peut numéroter les systèmes partiels et les ensembles majorants au moyen des nombres naturels, ce qui achève la démonstration [5]).

Le théorème démontré *(théorème de séparabilité simple)* peut être généralisé au cas où il y a plusieurs ensembles ouverts (peut-être même une infinité dénombrable) à séparer:

Théorème de séparabilité multiple. *Étant donnée une famille finie ou dénombrable d'ensembles ouverts disjoints dans T, on peut les séparer au moyen des ensembles ouverts à construction dénombrable.*

Soit, en effet, $U_1, U_2, U_3, \ldots$ la suite des ensembles donnés. En appliquant le théorème de séparabilité simple aux ensembles ouverts disjoints $U = U_1$ et $V = U_2 + U_3 + \ldots$, on trouve un ensemble ouvert à construction dénombrable $\boldsymbol{U}_1$ tel que $\boldsymbol{U}_1 \supset U_1$, $\boldsymbol{U}_1 \cdot V = 0$ (donc $\boldsymbol{U}_1 \cdot U_2 = \boldsymbol{U}_1 \cdot U_3 = \ldots = 0$). En posant maintenant

$$U = U_2, \quad V = \boldsymbol{U}_1 + U_3 + U_4 + \ldots,$$

on trouve, moyennant le même théorème, un ensemble ouvert à construction dénombrable $\boldsymbol{U}_2$ tel que

$$\boldsymbol{U}_2 \supset U_2, \quad \boldsymbol{U}_2 \cdot \boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{U}_2 \cdot U_3 = \boldsymbol{U}_2 \cdot U_4 + = \ldots = 0$$

et ainsi de suite.

La famille des ensembles $\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2, \boldsymbol{U}_3, \ldots$ ainsi obtenus jouit évidemment des propriétés demandées.

La généralisation au cas non dénombrable est privée de sens grâce à un résultat de M. Edward Szpilrajn-Marczewski [6]) qui a montré qu'on ne peut trouver dans un produit topologique d'espaces satisfaisant au second axiome de dénombrabilité plus qu'une quantité dénombrable d'ensembles ouverts disjoints.

Notes.

[1]) Cf. A. Tychonoff. Math. Annalen **102** (1930), p. 546.

[2]) Pour éviter l'encombrement des indices nous omettrons dans la suite les indices supérieurs dans v_i^α (en écrivant simplement v_i).

[3]) Nous dirons, en général, qu'un système d'ensembles est *majoré par un ensemble* A si A renferme tous les ensembles du système.

[4]) Parce que deux ensembles ouverts élémentaires dans T: $O_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}(v_{i_1}, \ldots, v_{i_m})$ et $O_{\beta_1 \ldots \beta_n}(v_{j_1}, \ldots, v_{j_n})$ sont disjoints dans le cas, et dans ce cas seulement, où au moins un α_r est égal à un β_s et l'on a pour ce r et ce s: $v_{i_r} \cdot v_{j_s} = 0$.

[5]) Dans le cas où la puissance du système fondamental d'ensembles ouverts dans T_α n'est pas dénombrable, mais est $\leqslant \mathfrak{m} > \aleph_0$, on démontre de même la proposition analogue, dans laquelle les sommes au plus dénombrables d'ensembles ouverts élémentaires sont remplacées par des sommes de puissance $\leqslant \mathfrak{m}$.

[6]) C. R. (Doklady) de l'Acad. des Sciences de l'URSS, **31**, N° 6 (1941).

On the representation of Boolean algebras as fields of sets.

By

Roman Sikorski (Warszawa).

The subject of this paper is the problem of the representation of an $\mathfrak{m}$-complete Boolean algebra as an $\mathfrak{m}$-additive field of sets[1]). Stone has proved that every Boolean algebra is isomorphic to a field of sets. A σ-complete Boolean algebra however can be no isomorph of a σ-field of sets. An easy analysis of Stone's representation theorem permits one to obtain simple necessary and sufficient conditions that an $\mathfrak{m}$-complete Boolean algebra be isomorphic to an $\mathfrak{m}$-additive field of sets (§ 1). With the help of these conditions I shall formulate several criteria for a quotient algebra $\boldsymbol{X}/\boldsymbol{I}$ (where $\boldsymbol{X}$ is an $\mathfrak{m}$-additive field of sets and $\boldsymbol{I}$ is an $\mathfrak{m}$-additive ideal of sets) to be isomorphic to an $\mathfrak{m}$-additive field of sets (§ 2) and I shall give an answer to two questions posed respectively by Professor E. Marczewski (§ 3) and by Professor A. Mostowski (§ 4).

The final part of this paper (§ 5) contains a proof of the theorem that every σ-complete Boolean algebra is isomorphic to a quotient algebra $\boldsymbol{X}/\boldsymbol{I}$ where $\boldsymbol{X}$ and $\boldsymbol{I}$ are respectively a σ-field and a σ-ideal of sets[2]). In contrast to this theorem, an $\mathfrak{m}$-complete Boolean algebra, where $\mathfrak{m} \geqslant 2^{\aleph_0}$, can be no isomorph of a quotient algebra $\boldsymbol{X}/\boldsymbol{I}$ where $\boldsymbol{X}$ and $\boldsymbol{I}$ are respectively an $\mathfrak{m}$-additive field and an $\mathfrak{m}$-additive ideal of sets.

---

[1]) The definitions of an $\mathfrak{m}$-complete Boolean algebra and an $\mathfrak{m}$-additive field of sets etc. are given in *Terminology and notation* on p. 248. $\mathfrak{m}$ denotes always an infinite cardinal number.

[2]) This theorem was presented by me at the Polish Mathematical Congress in Kraków in May 1947. Another proof of this theorem was given by Loomis. See Loomis [1], p. 757. An application of this theorem to the theory of the integral is given in my paper [1].