sition $\mathfrak{B}=\{B_1,B_2,...,B_k\}$ of the polytope $|K|$. This decomposition is similar to the decomposition $\mathfrak{A}$ of the space A, because for every system $i_1,i_2,...,i_m$ of indices the relation $B_{i_1}\cdot B_{i_2}\cdot ...\cdot B_{i_m}\neq 0$ holds if and only if all vertices $d^{i_1},d^{i_2},...,d^{i_m}$ belong to one of the simplexes of K [7]), that is if $A_{i_1}\cdot A_{i_2}\cdot ...\cdot A_{i_m}\neq 0$.

By corollary 2 we infer that the space A and the polytope $|K|$ have the same homotopy groups.

Thus we have the following

Corollary 3. *If the simplicial complex K is a geometric realization of the nerve of a regular decomposition of a finite dimensional space A then the space A and the polytope $|K|$ have the same homotopy type.*

Problem. *Remain the statements of the corollaries 1, 2 and 3 true if we omit the hypothesis of the finite dimension?*

[7]) See, for instance, P. Alexandroff and H. Hopf, *Topologie I* Berlin, Springer 1935, p. 148.

Sur la méthode de généralisation de Laurent Schwartz et sur la convergence faible.

Par

Jan G.-Mikusiński (Lublin).

Nous montrons dans la note présente que la méthode de Laurent Schwartz, employée dans son travail „*Généralisation de la notion de fonction...*" [1]), peut être appliquée à des espaces abstraits beaucoup plus généraux que celui des fonctions. Elle ouvre ainsi la voie à des nouvelles applications bien différentes.

Nous nous appuyons dans nos considérations ci-dessous sur la notion de convergence faible.

1. Soient donnés trois ensembles quelconques F, Φ, C. On définit une „composition" qui fait correspondre à chaque couple d'éléments f, φ ($f \in F$, $\varphi \in \Phi$) un élément c de C: $f\varphi = c$. On suppose que l'ensemble Φ est „total" par rapport à cette composition, c'est-à-dire que la relation „$f\varphi = g\varphi$ pour tout $\varphi \in \Phi$" entraîne $f = g$.

On définit ensuite dans C une convergence quelconque qui fait correspondre univoquement à certaines suites $c_n \in C$ des éléments c de C: $\lim c_n = c$. [On suppose toujours que si $c_n = c_0$ pour $n=1,2,...$, alors $\lim c_n = c_0$].

On dira qu'une suite $f_n \in F$ converge faiblement vers f: $\widetilde{\lim} f_n = f$, lorsque $\lim f_n\varphi = f\varphi$ pour tout $\varphi \in \Phi$.

Il se peut que la suite f_n étant donnée, les suites $f_n\varphi$ convergent dans C pour tout $\varphi \in \Phi$, mais qu'il n'existe pas d'élément $f \in F$, tel que $\lim f_n\varphi = f\varphi$. Désignons, dans ce cas, par $\bar{f}$ l'ensemble de toutes les suites $f'_n \in F$, telles que $\lim f'_n\varphi = \lim f_n\varphi$ (pour tout $\varphi \in \Phi$). Nous

[1]) *Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques*, Annales de l'Université de Grenoble, **21** (1945). Un nouvel article sur le même sujet a paru tout récemment: L. Schwartz, *Généralisation de la notion de fonction et de dérivation, Théorie des distributions*, Annales des Télécommunications, T. 3, Nº 4, 1948, p. 135-140.

écrirons alors, par définition, $\lim f_n\varphi = \bar{f}\varphi$ et nous dirons que f_n converge faiblement vers $\bar{f}$: $\widetilde{\lim} f_n = \bar{f}$. L'ensemble $\bar{f}$ peut être envisagé comme point d'accumulation (faible) de F. L'ensemble $\bar{F}$ qu'on obtient par l'adjonction à F de tous ses points d'accumulation sera dit la „fermeture" de F. La „composition" $\bar{f}\varphi$ est, par notre convention, définie pour tous les éléments $\bar{f}$ de la fermeture $\bar{F}$ et l'ensemble Φ est encore total par rapport à cette composition: si $\bar{f}\varphi = \bar{g}\varphi$ $(\bar{f}, \bar{g} \in \bar{F})$ pour tout $\varphi \in \Phi$, on a $\bar{f} = \bar{g}$.

2. Soit en particulier:

F l'ensemble de toutes les fonctions $f(x)$ réelles définies pour tout x réel et sommables dans chaque intervalle fini;

Φ l'ensemble de toutes les fonctions $\varphi(x)$ indéfiniment dérivables et nulles en dehors des intervalles finis;

C l'ensemble des nombres réels avec la convergence au sens habituel.

Supposons enfin que la composition en question soit définie par la relation

$$f\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Cela posé, la fermeture $\bar{F}$ de l'ensemble F est l'ensemble des distributions de L. Schwartz. On démontre sans peine que toute fonction de F est dérivable dans $\bar{F}$. En effet, si $f \in F$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\varphi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\frac{\varphi(x)-\varphi(-h)}{h}\,dx$$

et l'on voit que la limite pour $h\to 0$ existe pour tout $\varphi(x)$ et elle est égale à $-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx$. Pareillement on peut définir les dérivées d'ordre supérieur.

Dès que la notion de fonction est généralisée, il est important de généraliser certaines opérations (p. e. l'addition, intégration etc.) qui sont définies dans le domaine des fonctions ordinaires et de vérifier ensuite, si ces operations conservent leurs propriétés dans la fermeture de l'ensemble considéré. Nous discuterons maintenant ce problème dans le cas général.

3. Une opération $r = R(f^1, \ldots, f^k)$ (k = nombre naturel quelconque) définie intérieurement dans F, sera dite **régulière** (par rapport à la convergence faible considérée), lorsqu'elle satisfait aux deux conditions suivantes:

1° Si les suites $f_n^1, \ldots, f_n^k$ convergent faiblement, il en est de même de la suite $r_n = R(f_n^1, \ldots, f_n^k)$;

2° Si $\widetilde{\lim} f_n^i = \widetilde{\lim} g_n^i$ $(i = 1, \ldots, k)$, alors

$$\widetilde{\lim} R(f_n^1, \ldots, f_n^k) = \widetilde{\lim} R(g_n^1, \ldots, g_n^k).$$

On voit que toute opération régulière peut être généralisée à l'ensemble $\bar{F}$, en posant

$$\bar{R}(\bar{f}^1, \ldots, \bar{f}^k) = \widetilde{\lim} R(f_n^1, \ldots, f_n^k) \quad \text{pour } \bar{f}^i = \widetilde{\lim} f_n^i \ (i = 1, \ldots, k).$$

L'opération généralisée $\bar{R}$ jouit des 3 propriétés suivantes:

I. Si $\bar{f}^1, \ldots, \bar{f}^k \in F$, alors $\bar{R}(\bar{f}^1, \ldots, \bar{f}^k) \in F$;

II. $\bar{R}(\bar{f}^1, \ldots, \bar{f}^k) \in \bar{F}$ pour tout $\bar{f}^i \in \bar{F}$;

III. L'élément $\bar{r} = \bar{R}(\bar{f}^1, \ldots, \bar{f}^k)$ est défini univoquement pour chaque système $\bar{f}^1, \ldots, \bar{f}^k \in \bar{F}$.

Considérons maintenant une opération itérée $R(R^1, \ldots, R^k)$, où $R^i = R^i(f^{i,1}, \ldots, f^{i,\varkappa_i})$, $i = 1, \ldots, k$. On suppose que toutes ces opérations soient définies intérieurement dans F. On établit facilement que *si $R, R^1, \ldots, R^k$ sont régulières, il en est de même de l'opération itérée $R(R^1, \ldots, R^k)$*. Il s'en suit que l'itération $R(R^1, \ldots, R^k)$ des opérations régulières peut être généralisée et que cette généralisation coïncide avec l'itération $\bar{R}(\bar{R}^1, \ldots, \bar{R}^k)$ des opérations généralisées $\bar{R}, \bar{R}^1, \ldots, \bar{R}^k$.

4. Voici quelques applications.

1° Si $R(f, g) = R(g, f)$ pour tout couple $f, g \in F$, alors $\bar{R}(\bar{f}, \bar{g}) = \bar{R}(\bar{g}, \bar{f})$ pour $\bar{f}, \bar{g} \in \bar{F}$. Autrement dit, la méthode de généralisation conserve la commutativité des opérations (sous la seule condition qu'elles soient régulières).

2° Si l'opération $R(f, g)$ est associative dans F, l'opération $\bar{R}(\bar{f}, \bar{g})$ l'est dans $\bar{F}$ (pourvu que R soit régulière). En effet, d'après les considérations précédentes, l'identité des opérations $R[R(f, g), h]$ et $R[f, R(g, h)]$ entraîne celle de $\bar{R}[\bar{R}(\bar{f}, \bar{g}), \bar{h}]$ et $\bar{R}[\bar{f}, \bar{R}(\bar{g}, \bar{h})]$.

3° L'opération $S(f,g)$ est dite inverse par rapport à $R(f,g)$, lorsque $R[f,S(g,f)]=g$ dans tout l'espace considéré. Si l'opération S est inverse pour R, alors $\bar{S}$ l'est pour $\bar{R}$ (pourvu que les deux opérations R et S soient régulières).

4° Si l'ensemble F constitue un *groupe abélien* par rapport à une opération R, alors sa fermeture $\bar{F}$ constitue un groupe abélien par rapport à l'opération $\bar{R}$ (pourvu que R et l'opération inverse S soient régulières). C'est une conséquence immédiate de 1°, 2° et 3°.

5° La méthode exposée conserve aussi les propriétés caractéristiques des espaces suivants:

espace linéaire (pourvu que l'addition et la multiplication scalaire soient régulières par rapport à la convergence faible considérée),

anneau algébrique (pourvu que l'addition, la soustraction et la multiplication soient régulières),

corps algébrique (pourvu que l'addition, la soustraction, la multiplication et la division soient régulières), etc.

(Dans le cas de l'espace linéaire la soustraction peut être considérée comme l'opération itérée $f-g=f+(-1)g$; il n'est donc pas nécessaire de postuler explicitement sa régularité).

On vérifie sans peine que, dans le cas de la théorie de L. Schwartz, l'addition et la multiplication scalaire (par un nombre) des fonctions sont des opérations régulières. Comme l'espace F des fonctions peut être considéré comme linéaire, il s'en suit que les distributions de L. Schwartz constituent encore un espace linéaire

5. Voici encore un exemple instructif.

Supposons que les trois ensembles F, Φ, C soient identiques et qu'ils se composent des fonctions réelles $f(x,y)$ de deux variables, continues et non négatives dans le carré $0 \leqslant x,\ y \leqslant 1$. La composition des éléments de F et Φ est définie par la relation

$$(*)\qquad f\varphi=\int_0^1 f(x,s)\varphi(s,y)\,ds \quad \text{(composition de Volterra de II espèce).}$$

La convergence envisagée dans C est la convergence uniforme

Cela posé, considérons l'opération $R(f,g)$ qui est identique avec la composition (*)

$$fg=\int_0^1 f(x,s)g(s,y)\,ds.$$

On vérifie que cette relation est régulière.

On peut démontrer qu'il n'existe pas dans F d'élément e (unité), tel que $fe=ef=f$ pour tout $f \in F$. Cependant la fermeture $\bar{F}$ contient l'unité e. Cette unité peut être définie p. e. comme la limite (faible) de la suite $f_n(x,y)$, où $f_n=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{n}{1+n^2(x-y)^2}$.

6. On peut modifier la méthode de généralisation décrite dans le N° 1, en généralisant la définition de la convergence faible comme il suit.

On définit des convergences quelconques dans Φ et C. La suite $f_n \in F$ est dite faiblement convergente (au sens généralisé), lorsque la suite $f_n\varphi_n$ converge dans C pour toute suite φ_n convergente dans Φ. L'avantage consiste en ce que certaines relations peuvent être régulières par rapport à cette convergence faible généralisée sans l'être au sens précédent.

En supposant que les seules suites convergentes dans Φ soient $\varphi_n=\varphi$ (constans) on obtient, comme cas particulier, la convergence faible φ définie précédemment.