Les espaces analytiques de M. Menger sont — comme il résulte tout de suite de leur définition — de puissance non supérieure à celle du continu. Cependant, les problèmes restent ouverts s'il existe des espaces absolument analytiques de puissance non supérieure à celle du continu (resp. séparables) qui ne soient pas analytiques au sens de M. Menger, et s'il existe des espaces analytiques au sens de M. Menger qui ne soient pas absolument analytiques.

Exemple effectif d'une famille de $2^{\aleph_1}$ ensembles linéaires croissants [1].

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Le but de cette Note est de *définir effectivement une famille F formée de $2^{\aleph_1}$ ensembles linéaires croissants*, c.-à-d. telle que deux ensembles de la famille F soient toujours distincts et que l'un d'eux soit contenu dans l'autre. À ce but je démontrerai d'abord le lemme suivant:

Lemme. *On sait définir une fonction $f(D)$ qui fasse correspondre à tout ensemble dénombrable D de nombres ordinaux $\geqslant\omega$ et $<\Omega$ un ensemble linéaire non vide $f(D)$ de sorte qu'on ait toujours*

$$f(D)\,f(D')=0 \quad pour \quad D\neq D' \text{ [2]}.$$

Démonstration. Soit

$$r_1, r_2, r_3, \ldots \tag{1}$$

une suite infinie formée de tous les nombres rationnels différents. (Il est bien connu qu'on sait définir effectivement une telle suite).

x étant un nombre irrationnel, $0<x<1$, désignons par

$$x=\frac{1\,|}{|\nu(1,x)}+\frac{1\,|}{|\nu(2,x)}+\ldots$$

son développement en fraction continue arithmétique. $\nu(1,x), \nu(2,x), \ldots$ est donc une suite infinie de nombres naturels, définie complètement par le nombre irrationnel x.

---

[1]) Le résumé de cette Note a paru dans le *Rendiconto della R. Accademia delle Scienze Fis. e Mat. della Soc. R. di Napoli* Ser. 4, Vol. **10** (Séance du 4 mai 1940).

[2]) Ce lemme peut être considéré comme une extension aux ensembles dénombrables de nombres ordinaux du résultat connu de H. Lebesgue (Journ. de Math. t. I (1905). p. 213), qui a défini effectivement une suite transfinie de type Ω d'ensembles linéaires disjoints (non vides). L'idée de notre démonstration n'est qu'une modification de celle de Lebesgue.

$u_1, u_2, \ldots$ étant une suite infinie de nombres rationnels distincts nous désignerons par $\varphi(u_1, u_2, \ldots)$ le type d'ordre de l'ensemble obtenu en ordonnant les nombres $u_1, u_2, \ldots$ d'après leur grandeur.

Soit maintenant D un ensemble dénombrable de nombres ordinaux $\geqslant\omega$ et $<\Omega$. Nous définirons $f(D)$ comme l'ensemble de tous les nombres irrationnels x, $0<x<1$, tels que l'ensemble de types d'ordre

$$\varphi(r_{\nu(2^{k-1},x)}, r_{\nu(3\cdot 2^{k-1},x)}, r_{\nu(5\cdot 2^{k-1},x)}, \ldots), \qquad (k=1,2,\ldots)$$

ne diffère que, peut être, par l'ordre de ses termes de l'ensemble D.

Je dis que l'ensemble $f(D)$ n'est pas vide. Soit, en effet, $D=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$. D'après un théorème connu de G. Cantor sur les types d'ordre dénombrable, il existe pour tout k naturel un sous-ensemble de l'ensemble (1), soit $r_{n_1^{(k)}}, r_{n_2^{(k)}}, \ldots$ qui, ordonné d'après la grandeur des nombres qui le constituent, est de type α_k, c.-à-d.

$$\text{(2)} \qquad \varphi(r_{n_1^{(k)}}, r_{n_2^{(k)}}, \ldots) = \alpha_k.$$

Définissons la suite infinie de nombres naturels $m_1, m_2, \ldots$ par les formules:

$$m_{(2i-1)2^{k-1}} = n_i^{(k)} \quad \text{pour} \quad i, k = 1, 2, \ldots$$

et posons

$$x_0 = \frac{1|}{|m_1} + \frac{1|}{|m_2} + \ldots$$

On vérifie sans peine (d'après (2)) que

$$\varphi(r_{\nu(2^{k-1},x_0)}, r_{\nu(3\cdot 2^{k-1},x_0)}, r_{\nu(5\cdot 2^{k-1},x_0)}, \ldots) = \alpha_k$$

pour $k=1,2,\ldots$, ce qui donne, vu la définition de l'ensemble $f(D)$, $x_0 \in f(D)$, d'où $f(D) \neq 0$, c. q. f. d.

Soient D et D' deux ensembles dénombrables différents de nombres ordinaux $\geqslant\omega$ et $<\Omega$. Il existe donc un nombre ordinal α qui appartient à l'un de ces ensembles sans appartenir à l'autre: soit $\alpha \in D$ et α non $\in D'$. Si $x \in f(D)$, il existe (vu la définition de l'ensemble $f(D)$) un nombre naturel k tel que

$$\varphi(r_{\nu(2^{k-1},x)}, r_{\nu(3\cdot 2^{k-1},x)}, r_{\nu(5\cdot 2^{k-1},x)}, \ldots) = \alpha.$$

Si on avait aussi $x \in f(D')$, il en résulterait (vu la définition de $f(D')$) que $\alpha \in D'$, contrairement à l'hypothèse. On a donc $f(D) \cdot f(D') = 0$.

La fonction f satisfait aux conditions de notre lemme, qui se trouve ainsi démontré.

Soit maintenant T l'ensemble de toutes les suites transfinies de type Ω

$$\text{(3)} \qquad a_1, a_2, \ldots, a_\omega, a_{\omega+1}, \ldots, a_\xi, \ldots \qquad (\xi<\Omega)$$

formées de nombres 0 et 1, telles que $a_n=0$ pour $n=1,2,\ldots$ et qu'il existe une infinité d'indices $\xi<\Omega$, pour lesquels $a_\xi=1$. L'ensemble T est, comme on le voit aussitôt, de puissance $2^{\aleph_1}$, et nous pouvons ordonner les suites transfinies formant T d'après le principe de premières différences.

D étant un ensemble dénombrable de nombres ordinaux $\geqslant\omega$ et $<\Omega$, désignons par $s(D)$ la suite (3), où $a_\xi=1$ pour $\xi \in D$ et $a_\xi=0$ pour ξ non $\in D$.

Désignons pour toute suite transfinie t de l'ensemble T par $E(t)$ l'ensemble-somme de tous les ensembles $f(D)$, la sommation s'étendant à tous les ensembles D pour lesquels on a soit $s(D) \prec t$, soit $s(D)=t$. Il est évident qu'on a

$$\text{(4)} \qquad E(t) \subset E(t') \quad \text{pour} \quad t \prec t' \quad (t \in T,\ t' \in T).$$

Or, je dis que

$$\text{(5)} \qquad E(t') - E(t) \neq 0 \quad \text{si} \quad t \prec t'.$$

En effet, soient t et t' deux suites transfinies de l'ensemble T, $t \prec t'$, soit (3) la suite t et

$$\text{(6)} \qquad a'_1, a'_2, \ldots, a'_\omega, a'_{\omega+1}, \ldots, a'_\xi, \ldots \qquad (\xi<\Omega)$$

la suite t'. Comme $t \prec t'$ (et vu la définition de l'ensemble T), il existe un nombre ordinal μ, $\omega \leqslant \mu < \Omega$, tel que

$$a_\xi = a'_\xi \quad \text{pour} \quad \xi<\mu \quad \text{et} \quad a_\mu=0,\ a'_\mu=1.$$

Soit D_0 l'ensemble formé de tous les nombres ordinaux $\xi \leqslant \mu$ pour lesquels on a $a'_\xi=1$ et contenant en outre les $\aleph_0$ premiers nombres ordinaux ξ pour lesquels $a'_\xi=1$ (et qui existent, d'après $t' \in T$ et vu la définition de T). On voit sans peine que $t \prec s(D_0)$ et qu'on a soit $s(D_0) \prec t'$, soit $s(D_0)=t'$. D'après la définition de l'ensemble $E(t')$ on a donc $f(D_0) \subset E(t')$. Si on avait $f(D_0) \subset E(t)$, il existerait, vu la définition de $E(t)$, un ensemble D tel que, soit $s(D) \prec t$, soit $s(D)=t$ et que $f(D_0) \cdot f(D) \neq 0$. D'après la propriété de la fonction f, cette dernière inégalité donne $D_0=D$, ce qui est impossible, puisque $t \prec s(D_0)$ et $s(D) \prec t$ ou bien $s(D)=t$. On a donc $f(D_0)$ non $\subset E(t)$, et, comme $f(D_0) \subset E(t')$, on trouve $E(t')-E(t) \neq 0$.

La propriété (5) est ainsi établie.

D'après (4) et (5) la famille de tous les ensembles $E(t)$, où $t \in T$ est donc une famille de puissance $2^{\aleph_1}$ d'ensembles linéaires croissants.

L'existence d'une telle famille entraîne tout de suite le théorème suivant:

Théorème. *Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, l'ensemble de tous les nombres réels est somme de $2^{2^{\aleph_0}}$ ensembles croissants* [3]).

Plus encore: nous savons définir effectivement une famille d'ensembles linéaires croissants pour laquelle on peut démontrer, à l'aide de l'hypothèse du continu, qu'elle est de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$.

Or, il est à remarquer que nous savons démontrer sans faire appel à l'hypothèse du continu (en utilisant seulement l'axiome du choix) qu'il existe une famille de puissance $> 2^{\aleph_0}$ d'ensembles linéaires croissants [4]).

---

[3]) J'ai démontré ce théorème par une autre voie dans mon livre *Hypothèse du continu*, Monografie Matematyczne t. IV (Warszawa 1934), p. 120, Proposition C_{64}.

[4]) Voir W. Sierpiński, Fund. Math. **3** (1922), p. 109.

On the imbedding of systems of compacta in simplicial complexes.

By

Karol Borsuk (Warszawa).

1. It is one of the basic facts of geometry that every polytope is decomposable in finite sum of elementar „brics" called simplexes. The importance of such decompositions for the study of topological properties of polytopes suggest the investigation of decompositions of more general spaces into sums of sets having particularly simple homological and homotopical properties.

In the present paper I establish a simple connection between arbitrarily given decomposition of a finite dimensional compactum C in a finite sum of closed sets and a simplicial decomposition of some polytope. It turns out that every such decomposition of C may be obtained by an topological imbedding of C in some polytope P and by intersection of so imbedded set with simplexes of a simplicial decomposition of P (Theorem 1). In the case when C has a decomposition in a finite sum of absolute retracts such that every not empty intersection of those retracts is also an absolute retract, it turns out that all homology and homotopy groups of C are determined by the combinatorial properties of the decomposition.

2. Only metric spaces will be considered. By the cartesian product of two spaces X and Y is meant the space $X \times Y$ consisting of all ordered pairs (x,y), where $x \in X$, $y \in Y$ and where the distance is defined by the formula

$$\varrho\big((x,y),(x',y')\big) = \sqrt{\varrho(x,x')^2 + \varrho(y,y')^2}.$$

If the space Y is compact, the space Y^X consisting of all continuous mappings f of X into Y metrized by the formula

$$\varrho(f,g) = \sup_{x \in X} \varrho(f(x),g(x))$$

is complete.