# Sur l'analycité de l'espace $D_\omega$ au sens de M. Menger.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Si l'on a fait correspondre à tout système fini de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$ un ensemble $A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$, on dit qu'on a défini un *système déterminant* $\{A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$. L'ensemble

$$A = \sum_{n_1, n_2, \ldots} \prod_{k=1}^{\infty} A_{n_1, n_2, \ldots, n_k},$$

où la sommation s'étend à toutes les suites infinies $n_1, n_2, \ldots$ de nombres naturels est dit *noyau* du système déterminant $\{A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$.

$M$ étant un espace métrique, on appelle *ensembles analytiques* de $M$ les noyaux des systèmes déterminants formés d'ensembles fermés de $M$[1]). Un espace métrique est dit *absolument analytique* s'il est analytique dans tout espace qui le contient[2]). On démontre sans peine que pour qu'un espace métrique soit absolument analytique, il faut et il suffit qu'il soit analytique dans un espace complet qui le contient[2]).

M. K. Menger a donné la définition suivante d'espaces analytiques.

Un espace métrique séparable $M$ est dit analytique (au sens de M. Menger) s'il existe un système déterminant $\{A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ formé d'ensembles fermés de $M$, tel que:

1º il existe pour tout point $p$ de $M$ une suite infinie de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots$, telle que $p \in A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ où $k = 1, 2, \ldots$,

[1]) Voir p. e. F. Hausdorff, *Mengenlehre* 1935, p. 177 (où les ensembles analytiques sont appelés ensembles de Souslin).

[2]) ibid., p. 179.



2º quelle que soit la suite infinie de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots$, si $A_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \neq 0$ pour $k = 1, 2, \ldots$, l'ensemble $\prod_{k=1}^{\infty} A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ se réduit à un seul point[3]).

M. Menger n'envisage que les espaces analytiques séparables[4]). Le but de cette Note est de démontrer qu'il existe des espaces métriques non séparables, analytiques au sens de M. Menger. Je prouverai notamment le théorème suivant:

***Théorème.*** *L'espace $D_\omega$ de M. Fréchet est analytique au sens de M. Menger.*

Démonstration. Désignons, pour $p$, $q$, $r$ naturels, par $E(p, q, r)$ l'ensemble (évidemment fermé dans $D_\omega$) de tous les points $(x_1, x_2, \ldots)$ de $D_\omega$, où

$$(-1)^r \mathrm{E}(r/2) \cdot 2^{-q} \leqslant x_p \leqslant [(-1)^r \mathrm{E}(r/2) + 1] \cdot 2^{-q}$$

($\mathrm{E}t$ désignant le plus grand entier $\leqslant t$).

$n_1, n_2, \ldots, n_k$ étant une suite finie de nombres naturels, désignons par $A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ le produit de tous les ensembles $E(p, q, n_{(2p-1)2^{q-1}})$, où $p$ et $q$ sont deux nombres naturels, tels que

$$(2p-1)2^{q-1} \leqslant k. \tag{1}$$

Les ensembles $A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ sont évidemment fermés (dans $D_\omega$). Je dis que le système déterminant $\{A_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ jouit des propriétés 1º et 2º.

Soit, en effet, $a = (a_1, a_2, \ldots)$ un point donné de $D_\omega$. $k$ étant un nombre naturel, désignons par $g_k$ et $h_k$ deux nombres naturels (bien définis par $k$), tels que

$$k = (2g_k - 1)2^{h_k - 1}.$$

Soit $\varphi(x) = 1$ pour $x \leqslant 0$ et $\varphi(x) = 0$ pour $x > 0$. Posons

$$n_k = 2\,|\mathrm{E}2^{h_k} a_{g_k}| + \varphi(a_{g_k}), \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

[3]) K. Menger, *Bemerkungen zu Grundlagenfragen*, Jahresb. d. deutsch. Math.-Ver. **27** (1928), p. 224. Cf. ibid., p. 305, note 6) (où les ensembles fermés formant les systèmes déterminants sont remplacés par les ensembles ouverts).

[4]) Sa définition des espaces $k$-séparables (resp. $k$-analytiques) utilise des systèmes déterminants dont les indices sont des nombres ordinaux de classes $\leqslant k$ (l. c., p. 305).

Soit $k$ un nombre naturel donné et $p$ et $q$ deux nombres naturels satisfaisant à (1); posons

$$r = n_{(2p-1)2^{q}-1}.$$

Vu que

$$g_{(2p-1)2^{q}-1} = p \quad \text{et} \quad h_{(2p-1)2^{q}-1} = q,$$

il vient d'après (2):

$$r = 2|\mathrm{E}2^{q}a_p| + \varphi(a_p),$$

d'où (vu la définition de la fonction $\varphi$):

$$(-1)^{r}\mathrm{E}(r/2) = (-1)^{\varphi(a_p)}|\mathrm{E}2^{q}a_p| = \mathrm{E}2^{q}a_p$$

et, comme

$$2^{-q}\mathrm{E}2^{q}a_p \leqslant a_p < 2^{-q}(\mathrm{E}2^{q}a_p + 1),$$

on a $(a_1, a_2, \dots) \in E(p,q,r)$, c.-à-d.

$$a \in E(p,q,n_{(2p-1)2^{q}-1})$$

pour les nombres naturels $p$ et $q$ satisfaisant à (1); d'où, vu la définition de $A_{n_1,n_2,\dots,n_k}$:

$$a \in A_{n_1,n_2,\dots,n_k}$$

Ceci étant démontré pour $k=1,2,\dots$, on voit que le système déterminant $\{A_{n_1,n_2,\dots,n_k}\}$ jouit de la propriété 1°.

Soit maintenant $n_1, n_2, \dots$ une suite infinie de nombres naturels et supposons que

$$A_{n_1,n_2,\dots,n_k} \neq 0 \quad \text{pour} \quad k=1,2,\dots \tag{3}$$

Vu la définition de $A_{n_1,n_2,\dots,n_k}$, il en résulte que

$$E(p,q,n_{(2p-1)2^{q}-1}) \cdot E(p',q',n_{(2p'-1)2^{q'}-1}) \neq 0$$

quels que soient les nombres naturels $p$, $q$, $p'$ et $q'$. Soit $p$ un nombre naturel donné. Les intervalles fermés

$$\delta_q = \big((-1)^{n_{(2p-1)2^{q}-1}}\mathrm{E}2^{-1}n_{(2p-1)2^{q}-1}\cdot 2^{-q}, \quad (-1)^{n_{(2p-1)2^{q}-1}}\mathrm{E}2^{-1}n_{(2p-1)\cdot 2^{q}-1}\cdot 2^{-q} + 2^{-q}\big), \tag{4}$$

où $q=1,2,\dots$), ont donc deux à deux des points communs, et il existe par conséquent un nombre réel

$$a_p \in \delta_1\delta_2\dots$$



Je dis que

$$(a_1, a_2, \dots) \in A_{n_1,n_2,\dots,n_k} \quad \text{pour} \quad k=1,2,\dots \tag{5}$$

En effet, soit $k$ un nombre naturel donné, et soient $p$ et $q$ deux nombres naturels satisfaisant à la condition (1). D'après les formules $a_p \in \delta_q$ et (4), on trouve, en posant $r = n_{(2p-1)2^{q}-1}$:

$$(-1)^{r}\mathrm{E}(r/2)\cdot 2^{-q} \leqslant a_p \leqslant (-1)^{r}\mathrm{E}(r/2)\cdot 2^{-q} + 2^{-q},$$

d'où

$$(a_1, a_2, \dots) \in E(p,q,n_{(2p-1)2^{q}-1})$$

pour $p$ et $q$ satisfaisant à (1), ce qui prouve que $(a_1, a_2, \dots) \in A_{n_1,n_2,\dots,n_k}$. La formule (5) est ainsi établie. On a donc

$$\prod_{k=1}^{\infty} A_{n_1,n_2,\dots,n_k} \neq 0.$$

Or, je dis que si, pour $k=1,2,\dots$,

$$(a_1, a_2, \dots) \in A_{n_1,n_2,\dots,n_k} \quad \text{et} \quad (b_1, b_2, \dots) \in A_{n_1,n_2,\dots,n_k}, \tag{6}$$

on a alors

$$(a_1, a_2, \dots) = (b_1, b_2, \dots). \tag{7}$$

En effet, admettons qu'on ait les formules (6) et soient $p$ et $q$ deux nombres naturels; posons $k=(2p-1)2^{q-1}$. D'après (6) et la définition de $A_{n_1,n_2,\dots,n_k}$, on a donc

$$(a_1, a_2, \dots) \in E(p,q,n_k) \quad \text{et} \quad (b_1, b_2, \dots) \in E(p,q,n_k),$$

d'où, vu la définition des ensembles $E(p,q,r)$:

$$(-1)^{n_k}\mathrm{E}\frac{n_k}{2}\cdot 2^{-q} \leqslant \frac{a_p}{b_p} \leqslant (-1)^{n_k}\mathrm{E}\frac{n_k}{2}\cdot 2^{-q} + 2^{-q},$$

donc

$$|a_p - b_p| \leqslant 2^{-q}.$$

Ceci étant pour $q=1,2,\dots$, on trouve $a_p = b_p$, pour $p=1,2,\dots$, ce qui donne l'égalité (7).

Le système déterminant $\{A_{n_1,n_2,\dots,n_k}\}$ jouit donc de la propriété 2°. Il est ainsi établi que l'espace $D_\omega$ est analytique au sens de M. Menger, c. q. f. d.

Les espaces analytiques de M. Menger sont — comme il résulte tout de suite de leur définition — de puissance non supérieure à celle du continu. Cependant, les problèmes restent ouverts s'il existe des espaces absolument analytiques de puissance non supérieure à celle du continu (resp. séparables) qui ne soient pas analytiques au sens de M. Menger, et s'il existe des espaces analytiques au sens de M. Menger qui ne soient pas absolument analytiques.

---

# Exemple effectif d'une famille de $2^{\aleph_1}$ ensembles linéaires croissants [1].

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Le but de cette Note est de *définir effectivement une famille $F$ formée de $2^{\aleph_1}$ ensembles linéaires croissants*, c.-à-d. telle que deux ensembles de la famille $F$ soient toujours distincts et que l'un d'eux soit contenu dans l'autre. À ce but je démontrerai d'abord le lemme suivant:

**Lemme.** *On sait définir une fonction $f(D)$ qui fasse correspondre à tout ensemble dénombrable $D$ de nombres ordinaux $\geqslant\omega$ et $<\Omega$ un ensemble linéaire non vide $f(D)$ de sorte qu'on ait toujours*

$$f(D)\,f(D')=0 \quad \textit{pour} \quad D\neq D' \text{ [2]}.$$

Démonstration. Soit

$$(1) \qquad r_1, r_2, r_3, \ldots$$

une suite infinie formée de tous les nombres rationnels différents. (Il est bien connu qu'on sait définir effectivement une telle suite).

$x$ étant un nombre irrationnel, $0<x<1$, désignons par

$$x = \frac{1|}{|\nu(1,x)} + \frac{1|}{|\nu(2,x)} + \ldots$$

son développement en fraction continue arithmétique. $\nu(1,x), \nu(2,x), \ldots$ est donc une suite infinie de nombres naturels, définie complètement par le nombre irrationnel $x$.

---

[1]) Le résumé de cette Note a paru dans le *Rendiconto della R. Accademia delle Scienze Fis. e Mat. della Soc. R. di Napoli* Ser. 4, Vol. **10** (Séance du 4 mai 1940).

[2]) Ce lemme peut être considéré comme une extension aux ensembles dénombrables de nombres ordinaux du résultat connu de H. Lebesgue (Journ. de Math. t. I (1905). p. 213), qui a défini effectivement une suite transfinie de type $\Omega$ d'ensembles linéaires disjoints (non vides). L'idée de notre démonstration n'est qu'une modification de celle de Lebesgue.