compact (Lefschetz II, (27.7)). Thus we have before us the situation of Lefschetz II (20.6) (i. e. its counterpart for vector spaces) which leads to the main result: *The subspace of the singular homology vector space of M of classes of i-cycles bounding in* $|\mathfrak{M}_N|$ *and the subspace of the singular homology vector space of* $|\mathfrak{M}_N|-M$ *of classes of* $(N-i-1)$*-cycles bounding in* $|\mathfrak{M}_N|$ *are dually paired to the field* K *in the linking product when taken with finite-dimensional coefficient vector spaces* (over K) H *and* G *respectively, with* H *and* G *dually paired to* K.

Bibliography used in this paper.

[1] Mayer, W. *The duality theory and the basic isomorphism of group systems and nets and co-nets of group systems*, Annals of Math. **46** (1945).

[2] Mayer, W. *On products in topology*, Annals of Math. **46** (1945).

[3] Lefschetz, S. *Algebraic topology*, Colloquium Publications, 1942.

[4] Pontrjagin, L. *Über den Inhalt topologischer Dualitätsätze*, Math. Annalen 105.

[5] Alexandroff-Hopf, *Topologie*, Berlin 1935.

[6] Seifert-Threlfall, *Topologie*, Leipzig und Berlin 1934.

Institute for Advanced Study.

Sur un paradoxe de M. J. von Neumann.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

E et H étant deux ensembles situés dans un espace métrique M, dans lequel la distance entre deux points est désignée par ϱ, nous dirons que l'ensemble H est *plus petit au sens de M. J. von Neumann* que l'ensemble E, ou, plus brièvement, que H est *plus petit* (N) que E, s'il existe une fonction $f(p)$ définie pour $p \in E$ qui transforme d'une façon biunivoque E en H et telle que

$$\varrho(f(p),f(q)) < \varrho(p,q) \quad \text{pour} \quad p \in E,\ q \in E,\ p \neq q\ ^{1)}.$$

Nous dirons que l'ensemble H est *plus petit* (N) *par décomposition finie* que l'ensemble E, s'il existe des décompositions des ensembles E et H en le même nombre fini d'ensembles disjoints:

$$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_n \quad \text{et} \quad H = H_1 + H_2 + \ldots + H_n,$$

telles que, pour $k=1,2,\ldots,n$, l'ensemble H_n est plus petit (N) que l'ensemble E_k[2]).

M. J. von Neumann a démontré (en utilisant l'axiome du choix) que tout segment d'une droite est plus petit (N) par décomposition finie que tout autre segment de cette droite[3]). La démonstration de cette proposition est assez longue.

Or, MM. Banach et Tarski ont démontré[4]) que deux ensembles de points, situés sur la surface de la même sphère et qui ne sont pas ensembles frontières (par rapport à cette sphère) sont équivalents par décomposition finie (c.-à-d. se décomposent en le même nombre fini d'ensembles disjoints respectivement congruents).

[1]) Voir J. v. Neumann, Fund. Math. **13**, p. 85. Cf. aussi D. Kirszbraun Fund. Math. **12**, p. 77 et autres citations au renvoi[3]) l. c.; aussi W. Sierpiński, Mathematica **11**, p. 222.

[2]) M. J. v. Neumann dit dans ce cas (l. c.) que l'ensemble H est par rapport à E „zerlegungskleiner".

[3]) l. c., p. 115.

[4]) Fund. Math. **6**, p. 267, Théorème 31.

Le but de cette Note est de déduire de ce théorème de MM. Banach et Tarski par une voie élémentaire l'énoncé suivant:

Théorème. *Tout cercle* ($x^2+y^2\leqslant r^2$) *est plus petit* (N) *par décomposition finie que tout autre cercle (et que ce cercle lui-même)* [5].

Démonstration. Soient C_1 et C_2 deux cercles donnés dont les rayons sont respectivement r_1 et r_2. Soit S la sphère $x^2+y^2+z^2=r_1^2$.

Soit a un nombre positif tel que

(1) $$a<r_1:\sqrt{r_1^2+2r_2^2}.$$

Donc $r_1^2-a^2r_2^2>0$.

Posons

(2) $$\begin{cases} A=\underset{x,y,z}{E}[x^2+y^2+z^2=r_1^2, z\geqslant\sqrt{r_1^2-a^2r_2^2}],\\ B=\underset{x,y,z}{E}[x^2+y^2+z^2=r_1^2, z\geqslant 0].\end{cases}$$

Les ensembles A et B sont donc situés sur la surface de la sphère S et ne sont pas des ensembles frontières (par rapport à cette surface). D'après le théorème de MM. Banach et Tarski, il existe par conséquent des ensembles $A_1,A_2,\dots,A_n$ et $B_1,B_2,\dots,B_n$ tels que:

(3) $$A=A_1+A_2+\dots+A_n,\quad B=B_1+B_2+\dots+B_n,$$

(4) $$A_kA_l=0,\quad B_kB_l=0\quad\text{pour}\quad 1\leqslant k<l\leqslant n,$$

(5) les ensembles A_k et B_k sont congruents ($k=1,2,\dots,n$).

D'après (5) il existe donc pour $k=1,2,\dots,n$, une transformation isométrique φ_k de l'ensemble A_k en B_k. $p=(x,y)$ étant un point de C_2, on a $x^2+y^2\leqslant r_2^2$, donc, d'après (1), $a^2(x^2+y^2)\leqslant a_2^2r_2^2<r_1^2$, et

(6) $$\sqrt{r_1^2-a^2(x^2+y^2)}\geqslant\sqrt{r_1^2-a^2r_2^2}\geqslant ar_1.$$

Le point

(7) $$g(p)=\left(ax,ay,\sqrt{r_1^2-a^2(x^2+y^2)}\right)$$

appartient donc à l'ensemble A et, d'après (7), on a évidemment

$$g(p_1)\neq g(p_2)\quad\text{pour}\quad p_1\in C_2,\ p_2\in C_2,\ p_1\neq p_2.$$

D'autre part, soit $q=(x,y,z)$ un point de A; posons $p=\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a}\right)$. Comme $q\in A$, on a d'après (2):

$$x^2+y^2+z^2=r_1^2\quad\text{et}\quad z^2\geqslant r_1^2-a^2r_2^2,$$

[5]) Cf. W. Sierpiński, Commentarii Math. Helvetici **19** (1946-1947), p. 223.

donc

$$x^2+y^2=r_1^2-z^2\leqslant a^2r_2^2,\quad\text{d'où}\quad\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{a}\right)^2\leqslant r_2^2,$$

ce qui prouve que $p\in C_2$. La fonction $g(p)$ transforme donc de façon biunivoque l'ensemble C_2 en l'ensemble A; soit $f(p)$ sa fonction inverse: on aura donc $f(A)=C_2$.

Soient $p_1=(x_1,y_1)$ et $p_2=(x_2,y_2)$ deux points distincts de l'ensemble C_2. D'après (7) on a, en désignant par ϱ la distance dans l'espace, resp. dans le plan:

(8) $$\begin{aligned}\varrho^2(g(p_1),g(p_2))&=a^2[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2]+\\&+\left[\sqrt{r_1^2-a^2(x_1^2+y_1^2)}-\sqrt{r_1^2-a^2(x_2^2+y_2^2)}\right]^2.\end{aligned}$$

Pour $(x,y)\in C_2$ on a la formule (6), d'où

$$\sqrt{r_1^2-a^2(x_1^2+y_1^2)}\geqslant ar_1\quad\text{et}\quad\sqrt{r_1^2-a^2(x_2^2+y_2^2)}\geqslant ar_1$$

et, vu que $\sqrt{u}-\sqrt{v}=(u-v)/(\sqrt{u}+\sqrt{v})$, on trouve

(9) $$\left|\sqrt{r_1^2-a^2(x_1^2+y_1^2)}-\sqrt{r_1^2-a^2(x_2^2+y_2^2)}\right|\leqslant\frac{a^2\,|x_1^2+y_1^2-(x_2^2+y_2^2)|}{2ar_1}.$$

Comme $(x_1,y_1)\in C_2$ et $(x_2,y_2)\in C_2$, on a

$$|x_1|\leqslant r_2,\quad|y_1|\leqslant r_2,\quad|x_2|\leqslant r_2,\quad|y_2|\leqslant r_2,$$

donc

$$\begin{aligned}|x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2|&=|x_1-x_2|\cdot|x_1+x_2|+|y_1-y_2|\cdot|y_1+y_2|\leqslant\\&\leqslant 2r_2(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|),\end{aligned}$$

d'où

$$(x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2)^2\leqslant 4r_2^2\left((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+2|x_1-x_2|\cdot|y_1-y_2|\right)$$

et, comme, pour $u\geqslant 0$ et $v\geqslant 0$ on a

$$u^2+v^2-2uv=(u-v)^2\geqslant 0,\quad\text{d'où}\quad 2uv\leqslant u^2+v^2,$$

donc

$$2|x_1-x_2|\cdot|y_1-y_2|\leqslant(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2,$$

on trouve

$$(x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2)^2\leqslant 8r_2^2[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2]$$

et (9) donne

$$\left(\sqrt{r_1^2-a^2(x_1^2+y_1^2)}-\sqrt{r_1^2-a^2(x_2^2+y_2^2)}\right)^2\leqslant\frac{2a^2r_2^2}{r_1^2}[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2],$$

Il vient ainsi d'après (8):

$$\varrho^2(p_1,p_2)-\varrho^2(g(p_1),g(p_2)) \geqslant \left(1-a^2-\frac{2a^2r_2^2}{r_1^2}\right)\varrho^2(p_1,p_2) \tag{10}$$

p_1 et p_2 étant deux points distincts de C_2, on a $\varrho(p_1,p_2)>0$ et, d'après (1):

$$1-a^2-2a^2r_2^2/r_1^2>0.$$

La formule (10) donne donc $\varrho^2(p_1,p_2)>\varrho^2(g(p_1),g(p_2))$.
Il vient par conséquent:

$$\varrho(p_1,p_2)>\varrho(g(p_1),g(p_2)) \quad \text{pour} \quad p_1 \epsilon C_2,\ p_2 \epsilon C_2,\ p_1 \neq p_2. \tag{11}$$

Posons

$$E_k=f(A_k) \quad \text{pour} \quad k=1,2,\dots,n \tag{12}$$

et

$$H_k=PB_k \quad \text{pour} \quad k=1,2,\dots,n, \tag{13}$$

où PB_k désigne la projection de l'ensemble B_k sur le plan $z=0$.
D'après (3) on a

$$C_2=f(A)=f(A_1)+f(A_2)+\dots+f(A_n)$$

et

$$C_1=PB=PB_1+PB_2+\dots+PB_n.$$

Par conséquent, d'après (12) et (13):

$$C_2=E_1+E_2+\dots+E_n \quad \text{et} \quad C_1=H_1+H_2+\dots+H_n. \tag{14}$$

La fonction f transformant d'une façon biunivoque l'ensemble A en C_2 et l'ensemble C_1 étant une projection biunivoque de l'ensemble B, il résulte de (4), (5), (12) et (13) que

$$E_kE_l=0 \quad \text{et} \quad H_kH_l=0 \quad \text{pour} \quad 1\leqslant k<l\leqslant n. \tag{15}$$

Soit k un nombre donné de la suite $1,2,\dots,n$. D'après (12) on a $A_k=g(E_k)$, donc, d'après (12) et (13), et vu que $B_k=\varphi_k(A_k)$:

$$H_k=P\varphi_k(g(E_k)). \tag{16}$$

Soient p_1 et p_2 deux points distincts de l'ensemble E_k. D'après (14): $p_1 \epsilon C_2$ et $p_2 \epsilon C_2$ et les points p_1 et p_2 vérifient la formule (11). Or, φ_k étant une transformation isométrique de A_k en B_k, on a

$$\varrho(\varphi_k(q_1),\varphi(q_2))=\varrho(q_1,q_2) \quad \text{pour} \quad q_1 \epsilon A_k,\ q_2 \epsilon A_k \tag{17}$$

et, PB_k étant la projection de l'ensemble B_k sur le plan $z=0$, on a

$$\varrho(s_1,s_2)\geqslant\varrho(Ps_1,Ps_2), \quad \text{pour} \quad s_1 \epsilon B_k,\ s_2 \epsilon B_k, \tag{18}$$

où Ps désigne la projection du point s sur le plan $z=0$.
Les formules (11), (17) et (18) donnent

$$\varrho\big(P\varphi_k(g(p_1)),P\varphi(g(p_2))\big)<\varrho(p_1,p_2) \quad \text{pour} \quad p_1 \epsilon E_k,\ p_2 \epsilon E_k,\ p_1\neq p_2,$$

ce qui prouve, d'après (16), que l'ensemble H_k est plus petit (N) que l'ensemble E_k. Ceci étant vrai pour $k=1,2,\dots,n$, il résulte de (14) et (15) que l'ensemble C_1 est plus petit (N) par décomposition finie que l'ensemble C_2.
Notre théorème se trouve ainsi démontré.