Démonstration. Soit F une famille infinie d'ensembles et supposons qu'elle ne contienne aucune sous-famille infinie d'ensembles disjoints. Soit $E_1 \epsilon F$. S'il existe des ensembles de F disjoints de E_1, soit E_2 un d'entre eux. S'il existe des ensembles de F disjoints de E_1 et de E_2 à la fois, soit E_3 un d'entre eux. Généralement supposons que les ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$ de F soient définis; s'il existe des ensembles de F disjoints de chacun de ces n ensembles, soit E_{n+1} un d'entre eux. La suite $E_1, E_2, \ldots$ ne peut pas être infinie, vu que, d'après notre hypothèse, la famille F ne contient aucune sous-famille d'ensembles disjoints. Il existe donc une suite finie $E_1, E_2, \ldots, E_n$ d'ensembles de F, telle qu'aucun ensemble de F n'est disjoint de chacun des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$; c'est-à-dire, tout ensemble de la famille F a des éléments communs avec un au moins des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$. La famille F étant infinie, un au moins des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$, soit $H_1 = E_k$, a des éléments communs avec une infinité des ensembles de la famille F autres que H. Désignons leur famille par S_1. En raisonnant de la même manière, nous trouverons dans S_1 un ensemble H_2 et une sous-famille infinie S_2 de S_1 formée d'ensembles dont chacun a des éléments communs avec H_2 (et évidemment aussi avec H_1). En raisonnant ainsi de suite, on obtient une suite infinie $H_1, H_2, \ldots$ d'ensembles distincts de la famille F, telle que chaque ensemble de cette suite a des éléments communs avec tout autre ensemble. $F_1 = \{H_1, H_2, \ldots\}$ sera donc une sous-famille infinie de F ne contenant pas d'ensembles disjoints[4]).

[4]) En lisant les épreuves à corriger, j'ai appris que d'après Mme D. Maraham (*Set functions and Souslin's hypothesis*, Bull. Amer. Math. Soc. **54**, 1948, p. 587-590), on peut déduire des résultats obtenus par E. W. Miller dans „*A note on Souslin's problem*", Amer. Journ. Math. **65** (1943), pp. 673-678, à l'aide de quelques résultats de Ben Dushnik et E. W. Miller, parus dans Amer. Journ. Math. **63** (1941), pp. 600-610, que la proposition 3⁰ de la p. 165 pourrait être remplacée par la condition 4⁰ que voici:

4⁰ *Chaque sous-famille F_1 de F formée d'ensembles dont aucun couple d'ensembles non vides n'est disjoint est au plus dénombrable.*

Les conditions 2⁰ et 4⁰ sont plus faibles que les conditions 2⁰ et 3⁰.

Sur un espace compact localement contractile qui n'est pas un rétracte absolu de voisinage.

Par

Karol Borsuk (Warszawa).

Un sous-ensemble E d'un espace[1]) M est dit *contractile* dans M, lorsqu'il existe une fonction $\varphi(x,t)$ définie et continue dans le produit cartésien[2]) $E \times \langle 0,1 \rangle$ de E et de l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$, dont les valeurs appartiennent à M et qui satisfait aux conditions:

$$\varphi(x,0) = x; \quad \varphi(x,1) = \text{const.}, \text{ quel que soit } x \epsilon E.$$

L'espace M est dit *localement contractile* au point $a \epsilon M$, lorsque tout entourage U de a contient un entourage V contractile dans U. L'espace M est dit tout court *localement contractile*, lorsqu'il l'est à chaque point $a \epsilon M$.

Un sous-ensemble A d'un espace M s'appelle *rétracte* de M, lorsqu'il existe une fonction continue r transformant M en A de manière que $r(x) = x$ pour tout $x \epsilon A$. L'ensemble compact A s'appelle *rétracte absolu de voisinage* lorsque pour tout espace $M \supset A$ l'ensemble A est un rétracte d'un certain entourage de A dans M. Les rétractes absolus de voisinage sont des espaces dont la structure topologique est particulièrement simple, ressemblant à celle des polyèdres[3]). En particulier leurs groupes de Betti sont des groupes à un nombre fini de générateurs et pour presque toutes les dimensions ces groupes se réduisent à zéro[4]).

[1]) Tout espace est entendu dans ce travail dans le sens d'espace métrique.

[2]) Par le produit cartésien des espaces X et Y on entend l'ensemble de tous les couples (x,y) où $x \epsilon X$ et $y \epsilon Y$, métrisé par la formule

$$\varrho[(x,y),(x',y')] = \sqrt{\varrho(x,x')^2 + \varrho(y,y')^2}.$$

[3]) C'est pourquoi certains auteurs appellent les rétractes absolus de voisinage quasi-complexes. Voir p. ex. S. Lefschetz, *Algebraic Topology*, New York 1942, p. 322.

[4]) Voir S. Lefschetz, *On locally connected and related sets*, Ann. of Math. **35** (1934), p. 129 et K. Borsuk, *Zur kombinatorischen Eigenschaften der Retrakte*, Fund. Math. **21** (1933), p. 97.

Si nous ne considérons que les espaces à dimension finie, les rétractes absolus de voisinage sont caractérisés comme espaces compacts localement contractiles. Pour les espaces de dimension infinie il est connu [5]) que tous les rétractes absolus de voisinage sont localement contractiles, cependant le problème réciproque, si tout espace compact localement contractile est un rétracte absolu de voisinage est resté ouvert. Le but de ce travail est de prouver que la réponse est *négative*, c.-à-d. qu'il existe un espace compact localement contractile qui n'est pas un rétracte absolu de voisinage. En tenant compte du fait que pour presque toutes les dimensions les groupes de Betti d'un rétracte absolu de voisinage se reduisent à zéro, il suffit dans ce but de prouver le suivant

Théorème 1. *Il existe un espace compact localement contractile C tel que, pour tout $n=0,1,2,\ldots$, le nombre n-dimensionnel de Betti de C est positif.*

Démonstration. Désignons par Q_ω le cube fondamental de l'espace de Hilbert, c.-à-d. l'ensemble de toutes les suites $\{x_i\}$ avec $0\leqslant x_i\leqslant\frac{1}{i}$ pour $i=1,2,\ldots$, métrisé par la formule

$$\varrho(\{x_i\},\{y_i\})=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2}.$$

Soit $W(\{x_i\})$ une fonction propositionnelle dont la variable $\{x_i\}$ parcourt l'espace Q_ω. Désignons par $Q(W)$ l'ensemble de tous les points $\{x_i\}$ satisfaisant à la condition W. Ainsi par exemple $Q\left(\frac{1}{k+1}\leqslant x_1\leqslant\frac{1}{k}\right)$ désigne l'ensemble de tous les points $\{x_i\}\in Q_\omega$ satisfaisant à l'inégalité $\frac{1}{k+1}\leqslant x_1\leqslant\frac{1}{k}$.

Posons:

$$A_0=Q(x_1=0),$$

$$A_k=Q\left(\frac{1}{k+1}\leqslant x_1\leqslant\frac{1}{k};\ x_i=0 \text{ pour } i>k\right) \quad \text{pour } k=1,2,\ldots$$

[5]) Voir K. Borsuk, *Über eine Klasse von lokal zusammenhängenden Räumen*, Fund. Math. **19** (1932), p. 237 et S. Lefschetz, *Topics in Topology*, Princeton 1942, p. 93.

Or A_0 est un sous-ensemble de Q_ω homéomorphe à Q_ω et A_k est un cube k-dimensionnel dont les arêtes sont de longueur:

$$\frac{1}{k(k+1)},\ \frac{1}{2},\ldots,\ \frac{1}{k}.$$

Désignons par B_k la frontière de A_k. Or B_k est homéomorphe à une sphère $(k-1)$-dimensionnelle. En posant

$$C=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}B_k, \tag{1}$$

on voit aisément que C est un sous-ensemble fermé du cube Q_ω, donc il est compact. En posant maintenant, pour tout $m=1,2,\ldots$

$$r_m(\{x_i\})=\left(\frac{1}{m+1},\ x_2,\ldots,x_m,0,\ldots\right) \quad \text{pour } \{x_i\}\in A_0+\sum_{k=m+1}^{\infty}B_k,$$

$$r_m(\{x_i\})=(x_1,\ x_2,\ldots) \quad \text{pour } \{x_i\}\in B_m,$$

$$r_m(\{x_i\})=\left(\frac{1}{m},\ x_2,\ldots\right) \quad \text{pour } \{x_i\}\in\sum_{k=1}^{m-1}B_k,$$

on obtient une transformation r_m rétractant C en l'ensemble B_m. En tenant compte du fait que le nombre $(m-1)$-dimensionnel de Betti de l'ensemble B_m est égal à 1 et que les groupes de Betti d'un rétracte sont des images homomorphes des groupes correspondants de Betti de l'espace tout entier [6]), on en conclut que pour tout m naturel le nombre de Betti de dimension $m-1$ de l'ensemble C est positif.

Afin de prouver que l'ensemble C est localement contractile, remarquons que dans tout point $a\in B_k$ l'ensemble C est localement homéomorphe à un polyèdre de dimension $\leqslant k$. Il ne reste donc qu'à prouver que C est localement contractile dans tout point $a=(0,a_2,a_3,\ldots)\in A_0$. Dans ce but désignons par $V(a,\varepsilon)$, pour tout $\varepsilon>0$, l'ensemble de tous les points de C dont la distance de a est $<\varepsilon$. La démonstration de la contractilité de C sera terminée lorsque nous prouverons que pour tout $\varepsilon>0$ il existe un nombre $\eta>0$ et une fonction continue $\varphi(\{x_i\},t)$ définie dans le produit cartésien

[6]) Voir K. Borsuk, *Zur kombinatorischen Eigenschaften der Retrakte*, Fund. Math. **21** (1933), p. 92.

de l'ensemble $V(a,\eta)$ et de l'intervalle $0\leqslant t\leqslant 1$, qui satisfait aux conditions:

$$\varphi(\{x_i\},t)\in V(a,\varepsilon) \text{ pour tout } \{x_i\}\in V(a,\eta) \text{ et } 0\leqslant t\leqslant 1,$$

$$\varphi(\{x_i\},0)=\{x_i\} \text{ et } \varphi(\{x_i\},1)=a \text{ pour tout } \{x_i\}\in V(a,\eta).$$

Soit j un nombre naturel tel que $\dfrac{3}{j}<\varepsilon$ et posons $\eta=\dfrac{1}{j}$. La distance entre tout point de $Q(x_j=0)$ et tout point de $Q\left(x_j=\dfrac{1}{j}\right)$ étant $\geqslant\dfrac{1}{j}$, l'ensemble $V(p,\eta)$ est disjoint d'au moins un de ces deux ensembles. Nous distinguons deux cas:

1° $V(a,\eta)\cdot Q\left(x_j=\dfrac{1}{j}\right)=0$.

En posant

$$\varphi(\{x_i\},t)=(x_1,x_2,\ldots,x_{j-1},(1-3t)x_j,x_{j+1}\ldots) \text{ pour } 0\leqslant t\leqslant \tfrac{1}{3};\ \{x_i\}\in V(a,\eta)$$

$$\varphi(\{x_i\},t)=((2-3t)x_1,x_2,\ldots,x_{j-1},0,x_{j+1}\ldots) \text{ pour } \tfrac{1}{3}\leqslant t\leqslant \tfrac{2}{3};\ \{x_i\}\in V(a,\eta)$$

$$\varphi(\{x_i\},t)=(0,a_2-3(1-t)(a_2-x_2),\,a_3-3(1-t)(a_3-x_3),\ldots,$$
$$a_{j-1}-3(1-t)(a_{j-1}-x_{j-1}),(3t-2)a_j,\,a_{j+1}-3(1-t)(a_{j+1}-x_{j+1}),\ldots)$$
$$\text{pour } \tfrac{2}{3}\leqslant t\leqslant 1;\ \{x_i\}\in V(a,\eta),$$

on constate aisément que φ est une déformation continue de l'ensemble $V(a,\eta)$ dans C contractant cet ensemble en a. Pour tout point fixe $x=\{x_i\}\in V(a,\eta)$ l'ensemble des valeurs de la fonction $\varphi(x,t)$ pour $0\leqslant t\leqslant 1$ se compose de trois segments dont le premier L_1 aux extrémités

$$\varphi(x,0)=x=\{x_i\} \text{ et } \varphi(x,\tfrac{1}{3})=(x_1,x_2,\ldots,x_{j-1},0,x_{j+1},\ldots)$$

est de longueur $x_j\leqslant\dfrac{1}{j}$, le second L_2 aux extrémités

$$\varphi(x,\tfrac{1}{3}) \text{ et } \varphi(x,\tfrac{2}{3})=(0,x_2,\ldots,x_{j-1},0,x_{j+1},\ldots)$$

est de longueur $x_1<\eta=\dfrac{1}{j}$ et le troisième L_3 aux extrémités

$$\varphi(x,\tfrac{2}{3}) \text{ et } \varphi(x,1)=a$$

est de longueur $<\dfrac{1}{j}+a_j\leqslant\dfrac{2}{j}$. En tenant compte de l'inégalité $\varrho(a,x)<\dfrac{1}{j}<\dfrac{\varepsilon}{3}$, on en conclut que la ligne brisée $L_1+L_2+L_3$ toute entière est située dans l'ensemble $V(a,\varepsilon)$.

2° $V(a,\eta)\cdot Q(x_j=0)=0$.

En posant

$$\varphi(\{x_i\},t)=\left(x_1,x_2,\ldots,x_{j-1},\frac{1}{j}+(3t-1)\left(\frac{1}{j}-x_j\right),x_{j+1},\ldots\right)$$
$$\text{pour } 0\leqslant t\leqslant\tfrac{1}{3} \text{ et } \{x_i\}\in V(a,\eta),$$

$$\varphi(\{x_i\},t)=\left((2-3t)x_1,x_2,\ldots,x_{j-1},\frac{1}{j},x_{j+1},\ldots\right)$$
$$\text{pour } \tfrac{1}{3}\leqslant t\leqslant\tfrac{2}{3} \text{ et } \{x_i\}\in V(a,\eta),$$

$$\varphi(\{x_i\},t)=(0,a_2-3(1-t)(a_2-x_2),a_3-3(1-t)(a_3-x_3),\ldots,$$
$$a_{j-1}-3(1-t)(a_{j-1}-x_{j-1}),\frac{3}{j}(1-t)+(3t-2)a_j,a_{j+1}-3(1-t)(a_{j+1}-x_{j+1}),\ldots)$$
$$\text{pour } \tfrac{2}{3}\leqslant t\leqslant 1 \text{ et } \{x_i\}\in V(a,\eta),$$

on constate, comme dans le cas précédent, que la fonction φ ainsi définie est une déformation continue de l'ensemble $V(a,\eta)$ contractant cet ensemble dans $V(a,\varepsilon)$ en a.

Or C est localement contractile. La démonstration du théorème est ainsi terminée.

Par *rétracte absolu* on entend un espace qui est un rétracte de tout espace dans lequel il est plongé. Les rétractes absolus coïncident avec les rétractes absolus de voisinage contractiles dans soi.

Théorème 2. *Il existe un espace compact contractile dans soi et localement contractile qui n'est pas un rétracte absolu.*

Démonstration. Soit D le sous-ensemble du produit cartésien $Q_\omega\times\langle 0,1\rangle$ composé de tous les points de la forme $(\{x_i\cdot y\},y)$, où $\{x_i\}$ parcourt l'ensemble C défini par la formule (1) et y parcourt l'intervalle $\langle 0,1\rangle$. L'ensemble D étant fermé dans le produit $Q_\omega\times\langle 0,1\rangle$, est compact. Il est contractile dans soi, car la fonction ψ définie dans l'ensemble $D\times\langle 0,1\rangle$ par la formule

$$\psi((\{x_i\cdot y\},y),t)=(\{(1-t)\cdot x_i\cdot y\},(1-t)\cdot y)$$

est une déformation continue de D dans soi satisfaisant aux conditions:

$$\psi(p,0)=p;\quad \psi(p,1)=(\{0\},0) \text{ pour tout } p\in D.$$

L'ensemble $D-(\{0\},0)$, ouvert dans D, est homéomorphe au produit cartésien de l'ensemble localement contractile C et de l'intervalle demi-ouvert $(0,1\rangle$. On en conclut que D est localement contractile à chaque point $p \neq (\{0\},0)$. Afin de prouver que l'ensemble D est localement contractile au point $(\{0\},0)$, désignons, pour tout $\varepsilon>0$, par D_ε le sous-ensemble de D composé de tous les points de la forme

$$(\{x_i\cdot y\},y) \text{ où } \{x_i\} \in C \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \varepsilon.$$

Il est clair que D_ε est un entourage du point $(\{0\},0)$ homéomorphe à l'ensemble D, qui est contractile dans soi. En outre, pour tout entourage U de $(\{0\},0)$ dans D, il existe un nombre $\varepsilon>0$ tel que $D_\varepsilon \subset U$. Or D est localement contractile au point $(\{0\},0)$.

Il ne reste qu'à prouver que D n'est pas un rétracte absolu. Désignons par C_0 le sous-ensemble de D composé de tous les points de la forme $(\{x_i\},1)$. En posant

$$g(\{x_i\cdot y\},y)=(\{x_i\},1) \text{ pour tout } (\{x_i\cdot y\},y) \in D-(\{0\},0),$$

on obtient une fonction rétractant l'entourage $D-(\{0\},0)$ de l'ensemble C_0 en C_0. Si D était un rétracte absolu, l'ensemble C_0, en tant qu'un retracte de son entourage $D-(\{0\},0)$, serait un rétracte absolu de voisinage [7]. Or cela contredit le fait que l'ensemble C_0 est homéomorphe à l'ensemble C qui n'est pas un rétracte absolu de voisinage. La démonstration du théorème 2 est ainsi terminée.

[7]) Voir l. c. dans le renvoi 5, p. 224.

On Čech homology groups of retracts.

By

Sze-tsen Hu (Shanghai).

1. Introduction.

In their axiomatic approach to the homology theory, Eilenberg and Steenrod [4] formulated the *homology sequence* (called by them the natural system of the homology theory) as an axiom which should be satisfied in all admissible homology theories. The homology sequence given in this comprehensive form is a weapon far more powerful than the classical duality theorem of Alexander. There could be many applications in attacking the homology problems, one of those is given in the present paper.

Let X denote an arbitrary topological space, X_1 a closed subset of X, and $X_0=X-X_1$ its open complement.

A *retraction* of X onto X_1 is a mapping $\theta: X\to X_1$ such that $\theta(x)=x$ for each $x \in X_1$. If such a θ exists, X_1 is called a *retract* of X. It was first proved by Borsuk [3] that the homology groups of X_1 are homomorphic images of those of X if X_1 is a retract of a compactum X. By the aid of the homology sequence we shall give a strengthened form of this theorem of Borsuk without assuming X to be a compactum.

Let $H^n(X,G)$, $H^n(X_1,G)$, $H^n(X \bmod X_1,G)$ denote the n-dimensional Čech homology groups of X, X_1, X modulo X_1 based on the finite open coverings and with coefficients in a topological abelian group G. Then our result is the following

Theorem. *For each division-closure* [5, p. 68] *group G and each $n\geqslant 0$, $H^n(X,G)$ is isomorphic with the direct sum*

$$H^n(X_1,G)+H^n(X \bmod X_1,G).$$