En prenant, au lieu des points de la surface de la sphère, les rayons correspondants, le centre de la sphère exclu, et vu que la sphère solide dépourvue d'un de ses points est équivalente par décomposition en deux parties avec la sphère solide tout entière (ce qu'on déduit sans peine du théorème 8, en plaçant dans la sphère solide la surface d'une sphère plus petite (contenue dans elle) passant par le point qu'on veut enlever, on conclut sans peine de (5) qu'*une sphère solide est équivalente par décomposition finie à deux sphères disjointes de même rayon.* Cette dernière proposition a été déduite du théorème de Hausdorff sur une voie beaucoup plus compliquée par S. Banach et A. Tarski en 1924 [6]).

Le passage du paradoxe de Hausdorff au paradoxe de Banach et Tarski (c.-à-d. la suppression du „défaut de beauté" du théorème de Hausdorff) peut donc être obtenue par une simple application du théorème 8, dont la démonstration est tout à fait élémentaire [7]).

[6]) Fund. Math. **6**, p. 62 (Lemme 22).

[7]) Cf. ma note parue dans les Rendiconti Accad. Lincei Ser. VII, vol. IV, (1948) pp. 270—272.

Sur les translations des ensembles linéaires [1]).

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Je m'occuperai ici du problème suivant:

E étant un ensemble linéaire non vide, combien peut-il exister d'ensembles linéaires distincts, superposables avec E par translation (le long de la droite)?

Désignons par $E(a)$ la translation de l'ensemble linéaire E le long de la droite de longueur a (où a est un nombre réel donné). $E(a)$ est donc l'ensemble de tous les nombres réels de la forme $x+a$, où $x \epsilon E$. Soit $F(E)$ la famille de tous les ensembles $E(a)$ pour a réels. Notre problème peut être énoncé ainsi:

Quels sont les nombres cardinaux $\overline{\overline{F(E)}}$ pour les ensembles linéaires E?

Lorsque E est la droite toute entière, la famille $F(E)$ est formée d'un seul ensemble, E, et on voit sans peine que c'est le seul cas où on a (pour les ensembles linéaires non vides) $\overline{\overline{F(E)}}=1$. Or je démontrerai ce

Théorème 1. *Si E est un ensemble linéaire (non vide) ne comprenant pas tous les nombres réels, la famille de tous les ensembles linéaires distincts, superposables avec E par translation, est infinie* (c. à d. $\overline{\overline{F(E)}}$ ne peut être jamais un nombre naturel >1).

Je démontrerai d'abord ce

Lemme. *Soit n un nombre naturel >1. S'il existe un nombre réel a tel que les ensembles*

$$(1) \qquad E(ka), \quad \text{où} \quad k=0,1,2,\dots,n-1,$$

sont tous distincts, il existe un nombre réel b tel que les ensembles

$$(2) \qquad E(kb), \quad \text{où} \quad k=0,1,2,\dots,n,$$

sont tous distincts.

[1]) Conférence tenue à l'Université de Prague le 13 Avril 1948.

Démonstration du lemme. Posons $b=\frac{a}{n}$ et admettons qu'il existe parmi les ensembles (2) deux qui sont égaux, soit

(3) $$E(k_1 b)=E(k_2 b), \quad \text{où} \quad 0\leqslant k_1<k_2\leqslant n.$$

Il est impossible que l'on ait $k_1=0$ et $k_2=n$, puisque cela donnerait $E=E(0)=E(nb)=E(a)$, contrairement à l'hypothèse que les ensembles (1) (où $n>1$) sont tous distincts. $m=k_2-k_1$ est donc l'un des nombres $1,2,\ldots,n-1$. Or, l'égalité (3) implique, comme on voit sans peine, l'égalité $E=E((k_2-k_1)b)$. On a donc $E=E(mb)$ et, plus généralement

(4) $$E=E(kmb) \quad \text{pour } k \text{ entier}$$

(puisque l'égalité $E=E(c)$ implique $E=E(kc)$ pour k entier).

En particulier, pour $k=n$ (vu que $nb=a$), l'égalité (4) donne $E=E(ma)$, où m est l'un des nombres $1,2,\ldots,n-1$, contrairement à l'hypothèse que les ensembles (1) sont tous distincts.

Notre lemme se trouve ainsi démontré.

En rapport avec ce lemme M. E. Čech a remarqué que la proposition suivante résulte de l'axiome du choix:

Il existe un ensemble linéaire non vide E ne comprenant pas tous les nombres réels et tel que, quel que soit le nombre réel t, la suite infinie des ensembles

$$E, \quad E(t), \quad E(2t), \ldots$$

ne contient qu'un nombre fini d'ensembles distincts.

Soit, en effet $B=\{a,b,c,\ldots\}$ la base hamelienne [2]) et soit E l'ensemble de tous les nombres de la forme

$$pa+qb+rc+\ldots,$$

où les coefficients $p, q, r, \ldots$ sont des entiers parmi lesquels il n'y a qu'un nombre fini qui ne sont pas nuls. L'ensemble E ne contient pas chaque nombre réel, puisqu'il résulte tout de suite de la propriété de la base B que p. e. le nombre $a/2$ n'appartient pas à E.

Soit maintenant t un nombre réel quelconque,

$$t=\alpha a+\beta b+\gamma c+\ldots,$$

où α, β, γ sont des nombres rationnels parmi lesquels il n'y a qu'un nombre fini qui sont non nuls. Soit m le dénominateur commun des nombres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ (non nuls). On voit sans peine que $mt \in E$

[2]) Voir Fund. Math. **1**, p. 105.

et que $E(mt)=E$. Il en résulte tout de suite que chaque terme de la suite infinie $E, E(t), E(2t), \ldots$ est égal à un des ensembles

$$E, \quad E(t), \quad E(2t), \quad \ldots, \quad E((m-1)t).$$

L'assertion de M. Čech est ainsi démontrée.

Démonstration du théorème 1. Soit E un ensemble linéaire non vide ne comprenant pas tous les nombres réels. Il existe donc des nombres réels x et y tels que $x\in E$ et y non $\in E$, et on a évidemment $y\in E(y-x)$ (puisque $x\in E$). On a ainsi $E\neq E(y-x)$ et, en posant $a=y-x$, on a $E\neq E(a)$. L'hypothèse de notre lemme est vraie, par conséquent, pour $n=2$; il résulte donc, par l'induction, de notre lemme qu'elle est vraie pour tout n naturel. Ainsi, la famille de tous les ensembles linéaires distincts, superposables par translation avec E ne peut pas être finie, et le théorème 1 se trouve démontré.

Théorème 2. *Quel que soit le nombre cardinal non fini $\mathfrak{m}\leqslant 2^{\aleph_0}$, il existe un ensemble linéaire E tel que la famille de tous les ensembles linéaires distincts superposables par translation avec E est de puissance $\mathfrak{m}$* (c. à d. on a $\overline{\overline{F(E)}}=\mathfrak{m}$).

Démonstration. Soit

(5) $$\{x_\xi\}_{\xi<\varphi}$$

une suite transfinie formée de tous les nombres réels, et soit $\mathfrak{m}$ un nombre cardinal tel que $\aleph_0\leqslant\mathfrak{m}<2^{\aleph_0}$. Il existe, comme on sait, un corps K de nombres réels de puissance $\mathfrak{m}$. (Si H est un ensemble de nombres réels de puissance $\mathfrak{m}$, le plus petit corps de nombres réels contenant H est de puissance $\mathfrak{m}$).

Nous définirons par l'induction transfinie une base B de nombres réels comme il suit. Soit b_1 le premier terme de la suite (5) qui n'appartient pas à K. Soit α un nombre ordinal >1 et supposons que nous avons défini tous les nombres b_ξ, où $\xi<\alpha$. S'il existe des nombres x_η de la suite (5) tels que

$$x_\eta \neq r_1 b_{\xi_1}+r_2 b_{\xi_2}+\ldots+r_{n-1}b_{\xi_{n-1}}+r_n, \quad \text{où} \quad \xi_1<\xi_2<\ldots<\xi_{n-1}<\alpha$$

et où $r_i\in K$ pour $i=1,2,\ldots,n$, soit b_α le premier de ces nombres x_η, et s'il n'existe aucun nombre x_η de ce genre, posons $B=\{b_\xi\}_{\xi<\alpha}$.

L'ensemble B est ainsi défini par l'induction transfinie et on voit sans peine que B est de puissance $2^{\aleph_0}$ et que tout nombre réel a peut être représenté, et cela d'une seule façon, sous la forme

(6) $$a=r_1 b_{\xi_1}+r_2 b_{\xi_2}+\ldots+r_{n-1}b_{\xi_{n-1}}+r_n,$$

où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ sont des nombres ordinaux distincts $< \alpha$ et $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sont des nombres de l'ensemble K (La base B peut être regardée comme une généralisation de la base de G. Hamel[3])).

Soit E l'ensemble de tous les nombres réels de la forme (6), où $r_n = 0$. Je dis que tous les ensembles $E(r)$, où $r \in K$ sont distincts, c. à d. que $E(r) \neq E(r')$ pour $r \in K$, $r' \in K$, $r \neq r'$.

En effet, vu que $0 \in E$ et $r' \in E(r')$, l'égalite $E(r) = E(r')$ donnerait l'égalité
$$r' = r_1 b_{\xi_1} + r_2 b_{\xi_2} + \ldots + r_{n-1} b_{\xi_{n-1}} + r$$
qui, d'après la définition de la base B, est en défaut pour $r' \neq r$. (On pourrait même démontrer que $E(r) \cdot E(r') = 0$ pour $r \neq r'$).

D'autre part, quel que soit le nombre réel a, il existe un nombre r de K tel que $E(a) = E(r)$. En effet, le nombre réel a étant de la forme (6), on voit sans peine que $E(a) = E(r_n)$, puisque, si $x \in E(a)$, on a
$$x = r_1' b_{\eta_1} + r_2' b_{\eta_2} + \ldots + r_{k-1}' b_{\eta_{k-1}} + a, \quad \text{où } r_i' \in K \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, k-1,$$
d'où
$$x = r_1' b_{\eta_1} + r_2' b_{\eta_2} + \ldots + r_{k-1}' b_{\eta_{k-1}} + r_1 b_{\xi_1} + r_2 b_{\xi_2} + \ldots + r_{n-1} b_{\xi_{n-1}} + r_n \in E(r_n),$$
et si $y \in E(r_n)$, on a $y = r_1'' b_{\zeta_1} + r_2'' b_{\zeta_2} + \ldots + r_{m-1}'' b_{\zeta_{m-1}} + r_n$, donc, d'après (6):
$$y = r_1'' b_{\zeta_1} + r_2'' b_{\zeta_2} + \ldots + r_{m-1}'' b_{\zeta_{m-1}} - r_2 b_{\xi_1} - \ldots - r_{n-1} b_{\xi_{n-1}} + a \in E(a)$$
(puisque, K étant un corps, si $r \in K$, on a aussi $-r \in K$).

La famille de tous les ensembles $E(a)$ distincts (où a est un nombre réel) coïncide donc avec celle de tous les ensembles $E(r)$ distincts, où $r \in K$. Or, comme $E(r) \neq E(r')$ pour $r \in K$, $r' \in K$, $r \neq r'$, cette dernière famille est de puissance $\overline{\overline{K}} = \mathfrak{m}$.

Le théorème 2 est ainsi démontré pour $\aleph_0 \leqslant \mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$. Pour $\mathfrak{m} = 2^{\aleph_0}$ il est évidemment vrai, puisqu'on peut prendre pour E l'ensemble formé d'un seul nombre réel.

Appelons *singulier* tout ensemble linéaire E tel que $\overline{\overline{F(E)}} < 2^{\aleph_0}$. On a ce

Théorème 3. *Si E est un ensemble linéaire singulier qui n'est pas de mesure nulle, la mesure extérieure de E dans tout intervalle est égale à la longueur de cet intervalle.*

[3]) G. Hamel, Math. Ann. **60**, p. 459.

Démonstration. Soit E un ensemble linéaire singulier; on a donc $\overline{\overline{F(E)}} < 2^{\aleph_0}$. Or, on a $E(x) \in F(E)$ pour x réels et, comme $\overline{\overline{F(E)}} < 2^{\aleph_0}$, il existe un ensemble $E_0 \in F(E)$ tel que $E(x) = E_0$ pour une infinité indénombrable de nombres réels x. Soit x_0 un nombre tel que $E(x_0) = E_0$; on a donc $E(x) = E(x_0)$, d'où $E(x - x_0) = E$ pour une infinité indénombrable de nombres x. Il existe donc des nombres réels $t \neq 0$ aussi petits que l'on veut (en valeur absolue) tels que $E(t) = E$, ce qui donne aussi $E(kt) = E$ pour k entiers. On en conclut facilement qu'il existe une suite infinie de nombres $t_1, t_2, \ldots$ dense dans la droite et telle que $E(t_i) = E$ pour $i = 1, 2, \ldots$, d'où $E = \sum_{i=1}^{\infty} E(t_i)$. Or, d'après la théorie de la mesure, si l'ensemble E n'est pas de mesure nulle, la somme $\sum_{i=1}^{\infty} E(t_i)$ (où la suite $t_1, t_2, \ldots$, est dense dans la droite) est un ensemble dont la mesure extérieure est dans chaque intervalle égale à la longueur de cet intervalle. Cette somme étant égale à E, le théorème 3 se trouve démontré.

Théorème 4. *Aucun ensemble linéaire E tel que $\overline{\overline{F(E)}} \leqslant \aleph_0$ n'est de mesure nulle.*

Démonstration. Si $\overline{\overline{F(E)}} \leqslant \aleph_0$, il existe une suite finie ou dénombrable $E_1, E_2, \ldots$, telle que $F(E) = \{E_1, E_2, \ldots\}$. Or, la somme de tous les ensembles de la famille $F(E)$ recouvre évidemment la droite. D'autre part, si l'ensemble E est de mesure nulle, cette somme est également de mesure nulle, ce qui est impossible. L'ensemble E ne peut donc être de mesure nulle et le théorème 4 est démontré.

Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ et si $\overline{\overline{F(E)}} < 2^{\aleph_0}$, on a $\overline{\overline{F(E)}} \leqslant \aleph_0$. Il résulte donc tout de suite du théorème 4 que

Théorème 5. *Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, aucun ensemble singulier n'est de mesure nulle.*

Si H désigne le complémentaire (par rapport à la droite) de l'ensemble linéaire E et si les ensembles E et H ne sont pas vides, l'égalité $E(a) = E(b)$ donne évidemment $H(a) = H(b)$ et il en résulte tout de suite que $\overline{\overline{F(E)}} = \overline{\overline{F(H)}}$. Donc, si $\overline{\overline{F(E)}} = \aleph_0$, on a aussi $\overline{\overline{F(H)}} = \aleph_0$ et, d'après le théorème 4, les ensembles E et H ne sont pas de mesure nulle. Or, il résulte tout de suite du théorème 3 que la mesure intérieure de H est nulle. Donc H, et par conséquent aussi E, est un ensemble non mesurable. On a donc:

Théorème 6. *Si* $\overline{\overline{F(E)}}=\aleph_0$, *l'ensemble* E *est non mesurable* (au sens de Lebesgue).

Il résulte de l'égalité $\overline{\overline{F(E)}}=\overline{\overline{F(H)}}$ où H est la complémentaire de E, $E\neq 0$ et $H\neq 0$) qu'un ensemble linéaire non vide et distinct de la droite toute entière est singulier en même temps que son complémentaire. Il résulte donc du théorème 5 que si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, aucun ensemble singulier distinct de la droite toute entière n'est de mesure nulle ni complémentaire d'un ensemble de mesure nulle; vu le théorème 3, il est donc non mesurable. On a donc:

Théorème 7. *Si* $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, *tout ensemble singulier, distinct de la droite toute entière est non mesurable* (au sens de Lebesgue).

Le théorème 7 peut être aussi déduit immédiatement des théorèmes 1 et 6. En effet, d'après le théorème 1, si E est un ensemble linéaire distinct de la droite toute entière, on a $\overline{\overline{F(E)}}\geqslant\aleph_0$ et, d'après la définition de l'ensemble singulier on a $\overline{\overline{F(E)}}<2^{\aleph_0}$, donc, si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, on a $\overline{\overline{F(E)}}\leqslant\aleph_0$. On a donc $\aleph_0\leqslant\overline{\overline{F(E)}}\leqslant\aleph_0$, d'où $\overline{\overline{F(E)}}=\aleph_0$ et, d'après le théorème 6 l'ensemble E est non mesurable, c. q. f. d.

Remarque. On voit sans peine que dans les théorèmes 5 et 7 l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0}=\aleph_1$) peut être remplacée par l'hypothèse (peut être plus faible) que la droite n'est pas somme de moins que $2^{\aleph_0}$ ensembles de mesure nulle.

E étant un ensemble linéaire, désignons par E^* l'ensemble de tous les nombres $-x$, où $x\in E$. Désignons par $\Phi(E)$ la famille de tous les ensembles linéaires distincts congruents à E, c. à d. superposables avec E par translation ou rotation. On voit aisément que $\Phi(E)=F(E)+F(E^*)$ et que $\overline{\overline{F(E^*)}}=\overline{\overline{F(E)}}$; on a donc $\overline{\overline{F(E)}}\leqslant\overline{\overline{\Phi(E)}}\leqslant 2\cdot\overline{\overline{F(E)}}$ et il en résulte (à l'aide de l'axiome du choix) que si la famille $F(E)$ est infinie, on a $\overline{\overline{\Phi(E)}}=\overline{\overline{F(E)}}$. On voit donc que tous nos théorèmes restent vrais si au lieu des translations des ensembles (linéaires), on envisage les translations ou rotations (c. à d. si l'on remplace la famille $F(E)$ par $\Phi(E)$).

Sur un problème de la théorie générale des ensembles équivalent au problème de Souslin.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Il y a 30 ans Michel Souslin a posé le problème non résolu jusqu'ici et qui peut être énoncé comme il suit:

Problème S. *Un ensemble H ordonné linéairement, dense et tel que toute famille d'intervalles de H n'empiétant pas les uns sur les autres est au plus dénombrable, contient-il nécessairement un sous-ensemble au plus dénombrable dense dans H?* [1])

Le but de cette Note est de démontrer que le problème de Souslin équivaut au problème suivant de la théorie générale des ensembles:

Problème P. *Soit F une famille infinie d'ensembles jouissant de trois propriétés suivantes:*

1°. *X et Y étant deux ensembles de la famille F, on a ou bien $X\subset Y$, ou bien $Y\subset X$, ou bien $XY=0$.*

2°. *Chaque sous-famille de F formée d'ensembles disjoints est au plus dénombrable.*

3°. *Chaque sous-famille F_1 de F telle que, dans chaque couple de ses éléments, il existe un élément qui est contenu dans l'autre, est au plus dénombrable et a un ensemble maximal* (c. à d. contenant tous les autres ensembles de F_1).

La famille F est-elle nécessairement dénombrable?

Je démontrerai que *la réponse positive au problème P entraîne la réponse positive au problème S et inversement.*

---

[1]) Le problème de Souslin a été publié pour la première fois dans le vol. I des Fund. Math., p. 223, problème 3. Pour la littérature concernant ce problème, voir A. Denjoy, *L'énumération transfinie*, Livre I, Paris 1946, pp. XXVII-XXVIII.