tence d'un ensemble Q et de deux suites transfinies du type Ω d'ensembles de nombres naturels, $\{E_\xi\}_{\xi<\Omega}$ et $\{H_\xi\}_{\xi<\Omega}$ telles que

$$E_\alpha \precsim E_\beta \precsim Q \precsim H_\beta \precsim H_\alpha \quad \text{pour} \quad \alpha<\beta<\Omega,$$

et que, pour tout X vérifiant la condition $E_\alpha \precsim X \precsim H_\alpha$ pour $\alpha<\Omega$, on a $\overline{\overline{Q-X}}<\aleph_0$ et $\overline{\overline{X-Q}}<\aleph_0$. Cela résout (à l'aide de l'hypothèse du continu) le problème III de M. Lusin, posé dans sa note citée, p. 409—410.

Sur l'équivalence des ensembles par décomposition en deux parties.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

A et B étant deux ensembles situés dans un espace euclidien (ou, plus généralement, dans un espace métrique) nous écrirons

$$A \underset{n}{=} B$$

et nous dirons que les ensembles A et B sont équivalents par décomposition en n parties, s'il existe des ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et $B_1, B_2, \ldots, B_n$, tels que

1⁰ $A=A_1+A_2+\ldots+A_n$, $B=B_1+B_2+\ldots+B_n$,
2⁰ $A_kA_l=B_kB_l=0$ pour $1\leqslant k<l\leqslant n$,
3⁰ $A_k \cong B_k$ pour $k=1,2,\ldots,n$

($P\cong Q$ signifie que les ensembles P et Q sont congruents, c.-à-d. superposables par translation ou rotation).

S'il existe, pour deux ensembles A et B, un nombre naturel n tel que $A \underset{n}{=} B$, nous dirons que les ensembles A et B sont équivalents par décomposition finie.

Nous nous occuperons ici de l'équivalence des ensembles par décomposition en *deux* parties, qui présente une généralisation immédiate de la congruence des ensembles mais qui en diffère aussi sensiblement.

P. e. si E est un ensemble (non vide) situé dans l'espace euclidien à n dimensions, R_n, il existe évidemment dans R_n au plus $2^{\aleph_0}$ ensembles distincts congruents à E. Or, comme on voit sans peine, il existe $2^{2^{\aleph_0}}$ ensembles linéaires distincts H tels que $H \underset{2}{=} I$, où I désigne l'intervalle $(0,1)$.

Théorème 1. *La droite est équivalente par décomposition en deux parties à l'ensemble qu'on obtient en enlevant de la droite un ensemble borné quelconque.*

Démonstration. Soit P l'ensemble de tous les points de la droite, B — un sous-ensemble de P borné quelconque. L'ensemble B est donc contenu dans un segment fini de longueur l. X étant un ensemble linéaire quelconque, désignons par $X(l)$ la translation de X le long de la droite (en direction positive) de longueur l. Posons

$$P_1 = B + B(l) + B(2l) + B(3l) + \dots$$

Les termes de cette somme sont évidemment des ensembles deux à deux disjoints et congruents et nous aurons

$$P_1(l) \cong P_1. \tag{1}$$

Or, posons $P_2 = P - P_1$. Il vient

$$P = P_1 + P_2, \quad P_1 P_2 = 0, \quad P - B = P_1(l) + P_2, \quad P_1(l) \cdot P_2 = 0,$$

donc, d'après (1) $P \underset{2}{=} P - B$, c. q. f. d.

Théorème 2. *La droite est équivalente par décomposition en deux parties à l'ensemble qu'on obtient en enlevant de la droite un ensemble fini ou dénombrable quelconque.*

Démonstration. Soit P l'ensemble de tous les points de la droite, D — un sous-ensemble donné de P, au plus dénombrable. L'ensemble de tous les nombres $\frac{x-y}{k}$, où $x \in D$, $y \in D$ et $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, est, comme on sait, au plus dénombrable; l'ensemble de tous les nombres positifs étant indénombrable, il existe donc un nombre positif a tel que $a \neq \frac{x-y}{k}$ pour $x \in D$, $y \in D$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ Soient p et q deux entiers distincts. En supposant que $D(pa) \cdot D(qa) \neq 0$, il existerait des éléments x et y de D tels que $x + pa = y + qa$ et, en posant $k = q - p \neq 0$, on aurait $a = \frac{x-y}{k}$, contrairement à la définition du nombre a. On a ainsi

$D(pa) \cdot D(qa) = 0$ si p et q sont deux entiers distincts. Posons

$$P_1 = D + D(a) + D(2a) + \dots$$

Les termes de cette somme sont donc des ensembles deux à deux disjoints et congruents. Le reste de la démonstration est analogue à celle du théorème 1. On trouve ainsi $P \underset{2}{=} P - D$, c. q. f. d.

Remarque. On pourrait remplacer dans le théorème 2 les mots „fini ou dénombrable" par „de puissance inférieure à celle du continu", mais la démonstration exigerait alors, dans le cas général, l'application de l'axiome du choix pour déduire de $\mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$ que $\aleph_0 \mathfrak{m}^2 < 2^{\aleph_0}$.

Corollaire. *L'ensemble de tous les nombres réels est équivalent par décomposition en deux parties à l'ensemble de tous les nombres irrationnels et aussi à l'ensemble de tous les nombres transcendants.*

La démonstration de notre corollaire résulte tout de suite du fait que l'ensemble de tous les nombres rationnels, ainsi que celui de tous les nombres algébriques, sont dénombrables. Or, on a ce

Théorème 3. *L'ensemble de tous les nombres irrationnels est équivalent par décomposition en deux parties à l'ensemble de tous les nombres transcendants.*

Démonstration. Le th. 3 ne se laisse pas déduire immédiatement de notre corollaire, la relation $\underset{2}{=}$ n'étant pas transitive [1]). Or, soit P l'ensemble de tous les nombres réels, R — l'ensemble de tous les nombres rationnels, A — l'ensemble de tous les nombres algébriques. Soit a un nombre transcendant et posons $A_1 = A - R$,

$$P_1 = A_1 + A_1(a) + A_1(2a) + \dots$$

On voit sans peine que les termes de la somme P_1 sont des ensembles deux à deux superposables et disjoints (puisque l'égalité $x + ka = y + la$, où $x \in A_1$, $y \in A_1$ et où k et l sont des entiers distincts, donnerait $a = \frac{x-y}{l-k}$, ce qui est impossible, a étant un nombre transcendant). Posons encore $P_2 = (P - R) - P_1$. Il vient

$$P - R = P_1 + P_2, \quad P_1 P_2 = 0, \quad P - A = (P_1 - A_1) + P_2,$$
$$(P_1 - A_1) P_2 = 0, \quad P_1 - A_1 \cong P_1,$$

et on en conclut sans peine que $P - R \underset{2}{=} P - A$, c. q. f. d.

Théorème 4. *L'ensemble R de tous les nombres rationnels et l'ensemble A de tous les nombres algébriques ne sont pas équivalents par décomposition finie.*

---

1) En effet, en posant $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 5, 6\}$, $C = \{1, 5, 9, 13\}$, on a $A \underset{2}{=} B$ et $B \underset{2}{=} C$, mais on n'a pas $A \underset{2}{=} C$, ni même $A \underset{3}{=} C$. Or, on démontre facilement que si X, Y, Z sont des ensembles tels que $X \underset{2}{=} Y$ et $Y \underset{2}{=} Z$, on a $X \underset{4}{=} Z$.

Démonstration. Admettons qu'il existe un nombre naturel n tel que $A \underset{n}{=} R$. Vu que $R \simeq R(\sqrt{2})$, on a donc aussi $A \underset{n}{=} R(\sqrt{2})$. On a évidemment $A \supset A - R \supset R(\sqrt{2})$, ce qui donne $A \underset{n+1}{=} A - R$ (puisque les formules $A \supset B \supset C$ et $A \underset{n}{=} C$ entraînent $A \underset{n+1}{=} C$) [2]. L'ensemble linéaire A serait donc somme de deux ensembles disjonits, R et $A - R$, dont chacun est équivalent à A par décomposition finie, ce qui est impossible, d'après un théorème de A. Tarski [3]. Les ensembles A et R ne sont donc pas équivalents par décomposition finie, c. q. f. d.

Le théorème 4 peut être aussi démontré directement d'une façon tout à fait élémentaire conformément à une idée de M. S. Mazur comme il suit.

Soit $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ une décomposition finie de l'ensemble A. Un terme au moins de cette somme, soit A_1, contient une infinité de nombres de la forme $k\sqrt{2}$, où $k = 1, 2, \ldots$ La différence de deux nombres distincts de cette forme étant toujours irrationnelle, A_1 ne peut être congruent avec aucune partie de l'ensemble R. La relation $A \underset{n}{=} R$ est donc en défaut.

Théorème 5. *L'ensemble R de tous les nombres rationnels et l'ensemble D de toutes les fractions décimales finies ne sont pas équivalents par décomposition finie.*

Démonstration. On a évidemment $R - D \supset D(\frac{1}{3})$. Le reste de la démonstration est tout à fait analogue à celle du théorème 4.

Une démonstration élémentaire et directe du théorème 5 a été donnée par M. S. Mazur. Soit $R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$ une décomposition finie de l'ensemble R. Un au moins de termes de cette décomposition, soit R_1, contient une infinité de nombres de la forme $1/p$, où p est un nombre premier. Il existe donc deux nombres premiers $p > 5$ et $q > p$ tels que les nombres $1/p$ et $1/q$ appartiennent à R_1. La différence $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}$ n'étant pas une fraction décimale finie, l'ensemble R_1 n'est congruent à aucun sous-ensemble de D. La relation $R \underset{n}{=} D$ est donc en défaut.

---

[2]) W. Sierpiński, Fund. Math. **33**, p. 230, lemme 1; cf. S. Banach et A. Tarski, Fund. Math. **6**, p. 252, Corollaire 9.

[3]) Voir A. Tarski, Fund. Math. **30**, p. 22, Cor. 1, 17 et Fund. Math. **31**, p. 63, Cor. 3.14. Pour une démonstration directe et élémentaire de ce théorème, voir W. Sierpiński, Actas Acad. Sc. Lima, vol. XI (1946), p. 113.

Théorème 6. *L'ensemble D de toutes les fractions décimales finies et l'ensemble E de toutes les fractions dyadiques finies ne sont pas équivalents par décomposition finie.*

Démonstration. Soit $D = D_1 + D_2 + \ldots + D_n$; un au moins de termes de cette décomposition, soit D_1, contient une infinité de nombres de la forme $1/5^k$, où $k = 1, 2, \ldots$ (puisque tous ces nombres appartiennent évidemment à l'ensemble D). Il existe donc deux nombres naturels k et $l > k$ tels que $\frac{1}{5^k} \epsilon D_1$ et $\frac{1}{5^l} \epsilon D_1$. Or, comme on voit sans peine, $\frac{1}{5^l} - \frac{1}{5^k}$ non ϵE et il en résulte que D_1 ne peut pas être congruent à une partie de E. La relation $D \underset{n}{=} E$ est donc en défaut.

On peut démontrer que *tout ensemble infini situé dans un espace euclidien contient un sous-ensemble infini auquel il n'est pas équivalent par décomposition finie*. Cela n'est pas en général vrai pour les espaces infinis métriques: p. e. un espace métrique dénombrable dans lequel la distance entre deux points distincts quelconques est égale à 1 est congruent (isométrique) avec chacun de ses sous-ensembles infinis.

Théorème 7. *a et b étant deux nombres réels quelconques, A — l'ensemble de tous les nombres rationnels $< a$ et B — l'ensemble de tous les nombres rationnels $< b$, on a $A \underset{2}{=} B$.*

Démonstration. On peut évidemment supposer que $a \neq b$, p. e. $a < b$. Soit m un nombre naturel tel que $m > b - a$. Désignons par Q l'ensemble de tous les nombres rationnels x tels que $a \leqslant x < b$ et posons

$$B_1 = Q + Q(-m) + Q(-2m) + Q(-3m) + \ldots$$

Les termes de cette somme sont évidemment des ensembles deux à deux disjoints et superposables. Posons $B_2 = B - B_1$. Il vient

$$B = B_1 + B_2, \quad B_1 B_2 = 0, \quad A = B - Q = (B_1 - Q) + B_2,$$
$$(B_1 - Q) B_2 = 0, \quad B_1 - Q = B_1(-m) \simeq B_1.$$

On en déduit tout de suite que $A \underset{2}{=} B$, c. q. f. d.

On voit facilement que l'on a $A \simeq B$ seulement dans le cas où $b - a$ est un nombre rationnel. Pour $a = \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{3}$, les ensembles A et B ne sont pas congruents. De même pour $a = -\sqrt{2}$ et $b = \sqrt{2}$. L'ensemble de tous les nombres rationnels $< \sqrt{2}$ et l'ensemble de tous les nombres rationnels $> \sqrt{2}$ (qui est superposable par rotation autour du point 0 avec l'ensemble de tous les nombres rationnels $< -\sqrt{2}$)

ne sont donc pas congruents, mais il sont équivalents par décomposition en deux parties.

On voit sans peine qu'on peut remplacer dans le théorème 7 les mots *rationnels* par *algébriques* ou *irrationnels*, ou *transcendants*.

Il est encore à remarquer qu'il résulte tout de suite d'un théorème de Banach[4]) que si l'on a pour deux ensembles X et Y les formules $X \simeq Y_1 \subset Y$ et $Y \simeq X_1 \subset X$, on a $X \underset{2}{=} Y$.

Théorème 8. *Si S désigne la surface d'une sphère* (dans l'espace à 3 dimensions), *D — un sous-ensemble fini ou dénombrable de S, on a $S-D \underset{2}{=} S$.*

Démonstration. Nous pouvons évidemment supposer que S est la sphère $x^2+y^2+z^2=1$. L'ensemble D étant fini, ou dénombrable, il existe des droites passant par le centre de notre sphère et ne contenant aucun point de S. Il est légitime d'admettre que l'axe OZ est une droite de ce genre. p étant un point de D, soit $a(p)$ l'angle $\geqslant 0$ et $<2\pi$ formé par le plan passant par p et l'axe OZ avec le plan XOZ. β étant un angle donné, désignons par $D(\beta)$ l'ensemble en lequel D est transformé par la rotation de la sphère S de l'angle β autour de l'axe OZ. Je dis que l'angle β peut être choisi de sorte que les ensembles

(2) $$D, \quad D(\beta), \quad D(2\beta), \quad D(3\beta), \quad \ldots$$

soient deux à deux disjoints.

En effet, si, pour k et l entiers $\geqslant 0$, où $k<l$, on a $q \in D(k\beta)D(l\beta)$, il existe évidemment des points p_1 et p_2 de D tels que

$$a(q)=a(p_1)+k\beta-2k_1\pi \quad \text{et} \quad a(q)=a(p_2)+l\beta-2l_1\pi,$$

où k_1 et l_1 sont des entiers, ce qui donne

(3) $$\beta=\frac{a(p_1)-a(p_2)+2(l_1-k_1)\pi}{l-k}.$$

L'ensemble de tous les nombres

(4) $$\frac{a(p_1)-a(p_2)+2s\pi}{n},$$

où $p_1 \in D$, $p_2 \in D$, et où s est un entier et n un nombre naturel, étant dénombrable, il existe évidemment un nombre β (où $0<\beta<2\pi$) distinct de tous les nombres (4). Ce nombre β ne vérifie pas l'égalité (3) et les ensembles (2) sont deux à deux disjoints, c. q. f. d.

[4]) Fund. Math. **6**, p. 239, Théorème 2.

Posons

$$T=D+D(\beta)+D(2\beta)+D(3\beta)+\ldots \quad \text{et} \quad R=S-T.$$

On a $T(\beta)=T-D$, donc $T-D \simeq T$, et, comme

$$S=T+R, \quad TR=0, \quad S-D=(T-D)+R, \quad (T-D)R=0,$$

on en conclut que $S-D \underset{2}{=} S$ et le théorème 8 se trouve démontré.

Voici maintenant une application du théorème 8.

F. Hausdorff a démontré en 1914 (en utilisant l'axiome du choix) qu'il existe une décomposition de la surface S d'une sphère en 4 ensembles disjoints

$$S=A+B+C+D,$$

où D est un ensemble dénombrable et où

$$A \simeq B \simeq C \simeq B+C.$$

Il existe donc des décompositions $A=A_1+A_2$, $B=B_1+B_2$, $C=C_1+C_2$, où les ensembles A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sont deux à deux disjoints et congruents à l'ensemble A. On a donc

$$S=A_1+A_2+B_1+B_2+C_1+C_2+D,$$

où les ensembles à droite sont deux à deux disjoints.

Posons

$$S_1=A_1+B_1+C_1+D, \quad S_2=A_2+B_2+C_2.$$

On voit facilement que $S_1 \underset{4}{=} S$ et $S_2 \underset{3}{=} S-D$. Or, d'après le théorème 8, $S-D \underset{2}{=} S$ et on démontre sans peine que les formules $X \underset{3}{=} Y$ et $Y \underset{2}{=} Z$ donnent $X \underset{6}{=} Z$. On a donc $S_2 \underset{6}{=} S$.

Il est ainsi démontré que

(5) $$S=S_1+S_2, \quad \text{où} \quad S_1S_2=0, \quad S_1 \underset{4}{=} S \quad \text{et} \quad S_2 \underset{6}{=} S.$$

Autrement dit: *la surface S d'une sphère peut être décomposée en 10 parties disjointes dont 4 et 6 donnent respectivement après des rotations et translations convenables deux surfaces de sphère de même rayon.*

Il est à remarquer que récemment M. R. Robinson a démontré par une voie différente que $S=T_1+T_2$, où $T_1T_2=0$, $T_1 \underset{2}{=} S$ et $T_2 \underset{2}{=} S$ [5]).

[5]) Fund. Math. **34** (1947), p. 254.

En prenant, au lieu des points de la surface de la sphère, les rayons correspondants, le centre de la sphère exclu, et vu que la sphère solide dépourvue d'un de ses points est équivalente par décomposition en deux parties avec la sphère solide tout entière (ce qu'on déduit sans peine du théorème 8, en plaçant dans la sphère solide la surface d'une sphère plus petite (contenue dans elle) passant par le point qu'on veut enlever, on conclut sans peine de (5) qu'*une sphère solide est équivalente par décomposition finie à deux sphères disjointes de même rayon.* Cette dernière proposition a été déduite du théorème de Hausdorff sur une voie beaucoup plus compliquée par S. Banach et A. Tarski en 1924 [6]).

Le passage du paradoxe de Hausdorff au paradoxe de Banach et Tarski (c.-à-d. la suppression du „défaut de beauté" du théorème de Hausdorff) peut donc être obtenue par une simple application du théorème 8, dont la démonstration est tout à fait élémentaire [7]).

---

[6]) Fund. Math. **6**, p. 62 (Lemme 22).

[7]) Cf. ma note parue dans les Rendiconti Accad. Lincei Ser. VII, vol. IV, (1948) pp. 270—272.

Sur les translations des ensembles linéaires [1]).

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Je m'occuperai ici du problème suivant:

E étant un ensemble linéaire non vide, combien peut-il exister d'ensembles linéaires distincts, superposables avec E par translation (le long de la droite)?

Désignons par $E(a)$ la translation de l'ensemble linéaire E le long de la droite de longueur a (où a est un nombre réel donné). $E(a)$ est donc l'ensemble de tous les nombres réels de la forme $x+a$, où $x \in E$. Soit $F(E)$ la famille de tous les ensembles $E(a)$ pour a réels. Notre problème peut être énoncé ainsi:

Quels sont les nombres cardinaux $\overline{\overline{F(E)}}$ pour les ensembles linéaires E?

Lorsque E est la droite toute entière, la famille $F(E)$ est formée d'un seul ensemble, E, et on voit sans peine que c'est le seul cas où on a (pour les ensembles linéaires non vides) $\overline{\overline{F(E)}}=1$. Or je démontrerai ce

Théorème 1. *Si E est un ensemble linéaire (non vide) ne comprenant pas tous les nombres réels, la famille de tous les ensembles linéaires distincts, superposables avec E par translation, est infinie* (c. à d. $\overline{\overline{F(E)}}$ ne peut être jamais un nombre naturel >1).

Je démontrerai d'abord ce

Lemme. *Soit n un nombre naturel >1. S'il existe un nombre réel a tel que les ensembles*

$$E(ka), \quad où \quad k=0,1,2,\dots,n-1, \tag{1}$$

sont tous distincts, il existe un nombre réel b tel que les ensembles

$$E(kb), \quad où \quad k=0,1,2,\dots,n, \tag{2}$$

sont tous distincts.

---

[1]) Conférence tenue à l'Université de Prague le 13 Avril 1948.