La fonction f établit ainsi une correspondance biunivoque entre P et Q. Or, comme $(p,f(p))\in S$ pour $p\in S$, vu la définition de l'ensemble S, on a $f(p)\in K(p)$ pour $p\in P$. La fonction f ne fait donc correspondre à un élément de P un élément de Q que si cet élément lui correspond par la correspondance bi-2-voque donnée.

Nous avons ainsi démontré le théorème de M. D. König pour $\nu=2$, en admettant l'axiome du choix seulement pour les familles d'ensembles disjoints formés de deux éléments.

La question se pose si l'on peut nommer une correspondance bi-2-voque entre deux ensembles de nombres réels effectivement définis M et N, telle qu'on ne saurait nommer aucune correspondance biunivoque entre M et N. Or, il est à remarquer que sans utiliser l'axiome du choix nous ne savons pas démontrer la proposition que voici:

Si E est un ensemble de points dans le plan tel que chaque droite parallèle à l'un des deux axes des coordonnées a avec E précisément deux points communs, il existe un sous-ensemble E_1 de E tel que chacune de ces droites a avec E_1 un et un seul point commun [5]).

[5]) Cf. D. König, l. c., p. 133.

Sur les fonctions continues non dérivables.

Par

Władysław Orlicz (Poznań).

1. Dans la littérature mathématique, même au cours des dernières années, il ne manque pas de travaux concernant les fonctions continues non dérivables. On y trouve des exemples des fonctions, définies à l'aide des considérations géométriques ou analytiques, qui sont dépourvues de dérivée soit dans un intervalle, soit dans un ensemble particulier de points; on trouve aussi des théorèmes d'existence de telles fonctions. En particulier on peut envisager plusieurs exemples des fonctions continues non dérivables répresentées par les séries infinies de fonctions périodiques comme des exemples de la méthode constructive. Lorsqu'il s'agit des théorèmes d'existence des fonctions assujeties à certaines singularités, on emploie dans les dernières années de plus en plus la notion de catégorie de Baire. On démontre p. ex. que dans un espace métrique complet, convenablement choisi, composé de fonctions continues, toutes les fonctions, exception faite d'un ensemble de I catégorie de Baire, sont dépourvues de dérivée partout [1]). Cette méthode a quelque avantage vis à vis de la méthode constructive: elle s'appuie sur une idée générale, qu'on peut employer aussi avec succès dans plusieurs problèmes analogues, elle montre aussi que pour les fonctions continues, l'indérivabilité est un phénomène, pour ainsi dire, habituel. Cette méthode exige moins de calculs, mais d'autre part, ne conduit qu'indirectement aux exemples effectifs des fonctions ayant les singu-

[1]) Voir: S. Mazurkiewicz, *Sur les fonctions non dérivables*, Studia Math. **3** (1931), p. 92-94; S. Banach, *Über die Bairesche Kategorie gewisser Funktionenmengen*, ibidem, p. 174-179. Cf. aussi p. ex. H. Auerbach et S. Banach, *Über die Höldersche Bedingung*, ibidem, p. 180-184, où la notion de catégorie de Baire est utilisée pour les buts analogues.

larités désirées. On peut considérer cette circonstance, du moins au point de vue de l'Analyse classique, comme un défaut de ces méthodes.

Nous suivrons dans cette Note une voie, en quelque sens intermédiaire. Comme point de départ, nous sert une suite $f_n(x)$, $n=1,2,\dots$ des fonctions données qui doivent être assujeties, suivant le cas, à certaines conditions (nous tenons à souligner la généralité de ces conditions); puis nous multiplions ces fonctions par des nombres qui sont définis d'une façon non effective (par exemple, à l'aide de la notion de catégorie) et, en effectuant la sommation, nous obtenons des séries qui représentent des fonctions continues sans dérivée.

Désignons par $f_n(x)$ les fonctions continues dans un intervalle fermé $\langle a,b\rangle$ et telles que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$$

est uniformément convergente dans $\langle a,b\rangle$. Alors, les fonctions représentées par les séries

$$f_\varepsilon(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n f_n(x) \tag{1}$$

et

$$f_\eta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n f_n(x) \tag{2}$$

sont continues pour toute suite $\varepsilon\equiv\{\varepsilon_n\}$ où $\varepsilon_n=\pm1$ et pour toute suite $\eta\equiv\{\eta_n\}$ où $\eta_n=0,1$ respectivement.

Nous démontrons dans la suite que, dans certaines conditions supplémentaires, chacune des fonctions $f_\varepsilon(x)$ ou $f_\eta(x)$, à un ensemble de I catégorie près (dans l'espace des suites numériques ε ou η), n'a de dérivée soit dans un ensemble dénombrable (théorème 2), soit partout (théorème 7, 8). Dans les autres hypothèses sur $f_n(x)$, les fonctions $f_\varepsilon(x)$ ou $f_\eta(x)$ sont dépourvues de derivée presque partout (théorème 5) pour presque toute suite ε ou η (le sens de cette expression étant à préciser plus loin).

Nous désignons par $\varphi(x)$ une fonction continue de période $l=b-a$ et par $\{\alpha_n\}$ et $\{\beta_n\}$ deux suites de nombres positifs tels que $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n<+\infty$ et $\beta_1<\beta_2<\dots<\beta_n,\dots,\beta_n\to+\infty$ respectivement.

Une fonction $\Phi_\varepsilon(x)$ ou $\Phi_\eta(x)$ sera dite *fonction de Weierstrass de première ou de seconde espèce* respectivement (ou, plus court, fonction (W_{I}) ou (W_{II})) suivant quelle est de la forme

$$\Phi_\varepsilon(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n\alpha_n\varphi(\beta_n x), \tag{3}$$

ou de la forme

$$\Phi_\eta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n\alpha_n\varphi(\beta_n x). \tag{4}$$

Il sera demontré dans certaines hypothèses sur $\varphi(x)$, α_n et β_n que, pour toute suite ε ou η, sauf pour un ensemble de I catégorie de Baire de ces suites, les fonctions (W_{I}) et (W_{II}) sont dépourvues de dérivées dans une ensemble dense (théorème 3); en outre, pour presque toute suite ε ou η, ces fonctions sont dépourvues de dérivée presque partout (théorème 6). Enfin, nous donnons de simples conditions suffisantes pour que la dérivée des fonctions (W_{II}) soit en défaut dans l'intervalle $\langle a,b\rangle$ tout entier (théorème 9).

2. Désignons par (n) et par (p) respectivement l'espace composé de toutes les suites $\varepsilon\equiv\{\varepsilon_n\}$ où $\varepsilon_n=\pm1$ et celui composé de toutes les suites $\eta\equiv\{\eta_n\}$ où $\eta_n=0,1$, la distance entre deux éléments $\varepsilon'\equiv\{\varepsilon_n'\}$, $\varepsilon''\equiv\{\varepsilon_n''\}$ et entre deux éléments $\eta'\equiv\{\eta_n'\}$, $\eta''\equiv\{\eta_n''\}$ y étant définie respectivement par les formules:

$$d(\varepsilon',\varepsilon'')=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\varepsilon_n'-\varepsilon_n''|,\qquad d(\eta',\eta'')=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\eta_n'-\eta_n''|.$$

Les espaces (n) et (p) sont métriques et complets; la relation $d(\varepsilon^p,\varepsilon^0)\to0$ où $\varepsilon^p\equiv\{\varepsilon_n^p\}$ et $\varepsilon^0\equiv\{\varepsilon_n^0\}$ équivaut à $\lim_{p\to\infty}\varepsilon_n^p=\varepsilon_n^0$ pour $n=1,2,\dots$ et la remarque analogue est vraie pour l'espace (p).

Théorème 1. *Admettons que les dérivées à droite $f_n'^{+}(x)$ existent pour $n=1,2,\dots$ au point $x=\xi$ de l'intervalle $a\leqslant x<b$. Alors chacune des conditions:*

(5_ε) *la dérivée à droite $f_\varepsilon'^{+}(\xi)$ existe pour toute suite $\varepsilon\equiv\{\varepsilon_n\}$ d'un ensemble de II catégorie dans l'espace (n),*

(5_η) *la dérivée $f_\eta'^{+}(\xi)$ existe pour toute suite $\eta\equiv\{\eta_n\}$ d'un ensemble de II catégorie dans l'espace (p), entraîne l'égalité:*

$$\lim_{h\to+0}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{f_n(\xi+h)-f_n(\xi)}{h}-f_n'^{+}(\xi)\right|=0. \tag{5}$$

Réciproquement, la relation (5) *entraîne l'existence au point* $x=\xi$ *de la dérivée à droite de toutes les fonctions* $f_\varepsilon(x)$ *et* $f_\eta(x)$ *pour toutes les suites* ε *de* (n) *et* η *de* (p) — *c. à d. plus que* (5_ε) *et* (5_η).

Démonstration. Soit h_i où $i=1,2,\ldots$ une suite de nombres positifs, convergente vers 0.

Posons

$$T_i(\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n\frac{f_n(\xi+h_i)-f_n(\xi)}{h_i}. \tag{6}$$

L'hypothèse (5_ε) entraîne la convergence de la suite $T_i(\varepsilon)$ pour tout ε appartenant à un ensemble de II catégorie dans l'espace (n). Pour tout $\delta>0$, il existe alors un indice $N=N(\delta)$ tel que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|\frac{f_n(\xi+h_i)-f_n(\xi)}{h_i}\right|<\delta$$

pour $i=1,2,\ldots$,[2]). On en tire sans difficulté

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{f_n(\xi+h_i)-f_n(\xi)}{h_i}-f_n'^{+}(\xi)\right|=0$$

c. à d. la relation (5).

Admettons maintenant la relation (5). On a alors $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n'^{+}(\xi)|<+\infty$ et l'inégalité suivante a lieu pour tout $\varepsilon\in(n)$:

$$\left|\frac{f_\varepsilon(\xi+h)-f_\varepsilon(\xi)}{h}-\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n f_n'^{+}(\xi)\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{f_n(\xi+h)-f_n(\xi)}{h}-f_n'^{+}(\xi)\right|;$$

il en résulte que $f_\varepsilon'^{+}(\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n f_n'^{+}(\xi)$, c. q. f. d.

La démonstration pour l'espace (p) est tout à fait analogue.

---

[2]) Il suffit d'employer la généralisation suivante d'un théorème connu de M. J. Schur: *si* $a_{in}\to a_n$ *pour* $n=1,2,\ldots$ *et la suite* $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n a_{in}$ *ou bien la suite* $\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n a_{in}$ *converge pour tout* ε *ou* η *d'un ensemble de* II *catégorie dans* (n) *ou* (p) *respectivement, alors elle converge uniformément dans* (n) *ou* (p) *respectivement.*

Comme conséquence immédiate du théorème 1, nous obtenons le

Théorème 2. *Admettons que les dérivées à droite* $f_n'^{+}(x)$ *existent pour* $n=1,2,\ldots$ *dans une suite de points* $x=\xi_m$ $(m=1,2,\ldots)$ *de l'intervalle* $a\leqslant x<b$. *Alors l'inégalité*

$$\overline{\lim_{h\to+0}}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{f_n(\xi_m+h)-f_n(\xi_m)}{h}-f_n'^{+}(\xi_m)\right|>0 \tag{7}$$

implique que, pour un ensemble résiduel[3]) *des suites* $\varepsilon\equiv\{\varepsilon_n\}$ *et* $\eta\equiv\{\eta_n\}$ *(dans les espaces* (n) *et* (p) *respectivement), les fonctions* $f_\varepsilon(x)$ *et* $f_\eta(x)$ *n'ont pas de dérivée à droite aux points* $x=\xi_m$ $(m=1,2,\ldots)$.

Remarques. 1°. Remplaçons la condition (7) par

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n'^{+}(\xi_p)|=+\infty$$

où $p=1,2,\ldots$; on a alors pour tout ε de (n), sauf pour un ensemble de I catégorie dans cet espace:

$$\overline{\lim_{h\to+0}}\left|\frac{f_\varepsilon(\xi_p+h)-f_\varepsilon(\xi_p)}{h}\right|=+\infty.$$

Pour la démonstration, il suffit de remarquer que si $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n'^{+}(\xi)|=+\infty$, la suite (6) est non bornée pour tout $\varepsilon\in(n)$, sauf un ensemble de I catégorie des ε.

Le théorème analogue est vrai pour l'espace (p).

2°. On obtient des théorèmes tout à fait analogues en remplaçant dans les théorèmes 1 et 2 la dérivée à droite par la dérivée à gauche.

Théorème 3. *Admettons que* $\varphi(x)$ *a presque partout la dérivée à droite telle que* $0<\int_0^1|\varphi'^{+}(x)|dx<+\infty$. *Soit* $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\beta_n=+\infty$. *Dans ces hypothèses, on peut choisir un ensemble* Ξ *qui est partout de puissance du continu et tel que pour tout* $\varepsilon\in(n)$ *et* $\eta\in(p)$ *appartenant à un ensemble résiduel dans l'espace* (n) *et* (p) *respectivement, la fonction* $(\mathrm{W_I})$ *et* $(\mathrm{W_{II}})$ *correspondante n'admet de dérivée à droite pour aucun* $x\in\Xi$.

---

[3]) Un ensemble est dit *résiduel* (dans un espace métrique) si son complément est de I catégorie de Baire.

Démonstration. Posons $f_n(x)=a_n\varphi(\beta_n x)$. Comme pour un ensemble E de mesure positive,

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |\varphi'^+(\beta_n x)|\,dx=|E|\frac{1}{l}\int_0^l |\varphi'^+(x)|\,dx \ ^{4)},$$

la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\beta_n|\varphi'^+(\beta_n x)|=\sum_{n=1}^{\infty}|f_n'^+(x)|$ est presque partout divergente [5]. On peut donc choisir un ensemble dense $\xi_1,\xi_2,\dots$ tel que $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n'^+(\xi_p)|=+\infty$ pour $p=1,2,\dots$ Il résulte de la remarque 1^0 que la fonction $f_\varepsilon(x)$ admet la dérivée supérieure à droite infinie aux points $x=\xi_1,\xi_2,\dots$ pour tout ε d'un ensemble résiduel dans (n). Mais il est bien connu que l'ensemble où cette dérivée est infinie est un G_δ. Comme dense dans $\langle a,b\rangle$, cet ensemble y est donc partout de puissance du continu, c. q. f. d.

Le cas de l'espace (p) est analogue.

3. Soit $\varepsilon_n(t)=\operatorname{sign}(\sin 2^n\pi t)$ où $\operatorname{sign} t=1$ pour $t>0$, $\operatorname{sign} t=-1$ pour $t<0$ et $\operatorname{sign} 0=0$. Le système composé de fonctions $\varepsilon_1(t),\varepsilon_2(t),\dots$ est orthonormal dans $\langle 0,1\rangle$ et s'appelle le *système de Rademacher* [6]. En négligeant un ensemble dénombrable de nombres dans $\langle 0,1\rangle$ et un ensemble dénombrable de suites ε dans (n), on peut établir comme il suit une correspondance biunivoque entre les nombres de l'intervalle $\langle 0,1\rangle$ et les suites $\varepsilon\in(n)$: soit $0,\eta_1(t),\eta_2(t)\dots$ le dévéloppement dyadique de t; soit $\varepsilon_n(t)=1-2\eta_n(t)$ pour tout t qui n'est pas dyadiquement fini. Cette formule établit la correspondance en question. D'une façon analogue, la formule $\eta_n(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varepsilon_n(t)$ met toutes les suites de (p) (un ensemble dénombrable exclu) en correspondance biunivoque avec les nombres de l'intervalle $\langle 0,1\rangle$ (ceux dyadiquement finis étant exclus).

Plusieurs auteurs ont étudié des proprietés concernant presque tous les „changements de signe" $\varepsilon\equiv\{\varepsilon_n\}$ et presque toutes les suites $\eta\equiv\{\eta_n\}$; à savoir, on dit qu'une propriété se présente *pour presque toute suite ε (pour presque toute suite η)*, si l'ensemble des nombres t pour lesquels la suite $\{\varepsilon_n(t)\}$ (la suite $\{\eta_n(t)\}$) n'a pas cette propriété est de mesure 0 [7].

Nous allons examiner le cas où les fonctions $f_\varepsilon(x)$ et $f_{\eta}(t)$ sont presque partout dépourvues de dérivée pour presque toute suite ε et η respectivement.

Lemme 1. *Soit $\sum_{n=1}^{\infty} b_{in}^2<+\infty$ pour $i=1,2,\dots$ et $\lim_{i\to\infty} b_{in}=b_n$ pour $n=1,2,\dots$ Si la suite*

$$T_i(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n(t)b_{in}$$

converge asymptotiquement dans un ensemble $E\subset\langle 0,1\rangle$ de mesure positive, on a

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(b_{in}-b_n)^2=0. \tag{8}$$

Réciproquement, l'égalité (8) *étant remplie, la suite $T_1(t),T_2(t),\dots$ converge asymptotiquement dans $\langle 0,1\rangle$ vers $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n(t)b_n$.*

Démonstration. Remarquons d'abord que d'après un théorème bien connu de Kolmogoroff [8] la relation $\sum_{n=1}^{\infty} b_{in}^2<+\infty$ entraîne la convergence presque partout de la série $T_i(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n(t)\,b_{in}$ où $i=1,2,\dots$ Supposons que la relation (8) ne soit pas remplie. Il existerait alors un $\varepsilon_0>0$ et deux suites d'indices $\{p(i)\}$ et $\{q(i)\}$ telles que $p(i)>q(i)$ et que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_{p(i)n}-b_{q(i)n})^2\geqslant\varepsilon_0.$$

[4]) C'est une conséquence du théorème bien connu dû en principe à M. Fejér; voir p. ex. S. Mazur et W. Orlicz, *Sur quelques propriétés de fonctions périodiques et presque périodiques*, Studia Math. **9** (1940), p. 1-16, en particulier lemme 1.

[5]) C'est une conséquence du théorème bien connu de Egoroff.

[6]) Voir S. Kaczmarz et H. Steinhaus, *Le système orthogonal de M. Rademacher*, Studia Math. **2** (1930), p. 231-247; S. Kaczmarz et H. Steinhaus *Theorie der Orthogonalreihen*, Warszawa 1935; on trouve dans ce livre des applications de ce système à la théorie des probabilités.

[7]) H. Steinhaus, *Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la mesure*, Fund. Math. **4** (1923), p. 286-310; A. Khintchine et A. Kolmogoroff, *Über Konvergenz von Reihen, deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden*, Rec. Math. Moscou **32** (1925), p. 668-677; R. E. A. C. Paley et A. Zygmund, *On some properties of functions* (1), Proc. Cambridge Ph. Soc. **26** (1930), p. 337-357 et (2), ibidem p. 458-474; H. Steinhaus, *Über die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Konvergenzkreis einer Potenzreihe ihre natürliche Grenze ist*, Math. Zeitschr. **21** (1929), p. 408-416; W. Orlicz, *Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen* (V), Studia Math. **6** (1936), p. 20-28; voir aussi le livre précité de MM. Kaczmarz et Steinhaus.

[8]) Voir le travail précité de Khintchine et Kolmogoroff.

Posons
$$\overline{T}_i(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n(t)(b_{p(i)n}-b_{q(i)n}).$$

D'après les hypothèses du lemme, il existe une suite partielle $\overline{T}_{i_r}(t)$ convergente vers 0 pour presque tout $t\in E$, donc convergente uniformément vers 0 dans un ensemble $G\subset E$ de mesure positive. On a alors pour N suffisamment grand [9])
$$\sum_{n=N}^{\infty}(b_{p(i)n}-b_{q(i)n})^2\leqslant C\int_G\Big(\sum_{n=N}^{\infty}\varepsilon_n(t)(b_{p(i)n}-b_{q(i)n})\Big)^2dt$$
avec une constante positive C. En choisissant R suffisamment grand, on aurait donc
$$\Big|\sum_{n=N}^{\infty}\varepsilon_n(t)(b_{p(i_r)n}-b_{q(i_r)n})\Big|<\Big(\frac{\varepsilon_0}{C|G|}\Big)^{1/2}\qquad \text{pour } r>R \text{ et } t\in G,$$
d'où il résulte que
$$\sum_{n=N}^{\infty}(b_{p(i_r)n}-b_{q(i_r)n})^2<\varepsilon_0,$$
ce qui est impossible.

Pour démontrer la partie réciproque du théorème, remarquons que les relations (8) et $\sum_{n=1}^{\infty}b_{in}^2<+\infty$ entraînent $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2<+\infty$. Les séries $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n(t)b_{in}$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n(t)b_n$ convergent alors presque partout. Il en résulte en raison de l'égalité
$$\int_0^1\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n(t)(b_{in}-b_n)\Big)^2dt=\sum_{n=1}^{\infty}(b_{in}-b_n)^2,$$
que la suite $T_i(t)$ converge vers $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n(t)b_n$, non seulement asymptotiquement, mais aussi dans l'espace (L^2).

Lemme 1'. *Si* $\lim_{i\to\infty}b_{in}=b_n$ *et les séries* $\sum_{n=1}^{\infty}b_{in}^2$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty}b_{in}$ *convergent pour* $i=1,2,\ldots$ *et la suite*
$$T_i^*(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n(t)b_{in}$$
converge asymptotiquement dans un ensemble $E\subset\langle 0,1\rangle$ *de mesure positive, on a la relation* (8).

[9]) Voir W. Orlicz loc. cit., p. 31.

Démonstration. On a $T_i^*(t)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_{in}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n(t)b_{in}$, d'où il s'ensuit comme dans la démonstration du lemme 1, que les expressions $T_i^*(t)$ ont un sens pour presque tout t. Supposons la relation (8) non remplie. Il existe alors deux suites croissantes d'indices $\{p(i)\}$ et $\{q(i)\}$ où $p(i)<q(i)$ et une suite croissante $\{\lambda_i\}$ tendant vers $+\infty$ telles que:

(i) il existe la limite (finie ou infinie) $\lim_{i\to\infty}\lambda_i\sum_{n=1}^{\infty}(b_{p(i)n}-b_{q(i)n})$;

(ii) il existe la limite $\lim_{i\to\infty}\lambda_i\sum_{n=1}^{\infty}(b_{p(i)n}-b_{q(i)n})^2=+\infty$;

(iii) la suite
$$\lambda_i\overline{T}_i^*(t)=\lambda_i\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n(t)(b_{p(i)n}-b_{q(i)n})=$$
$$=\frac{\lambda_i}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(b_{p(i)n}-b_{q(i)n})-\frac{\lambda_i}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n(t)(b_{p(i)n}-b_{q(i)n})$$
converge vers 0 pour presque tout $t\in E$.

Un raisonnement analogue à celui appliqué antérieurement montre que (ii) entraîne la relation
$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\frac{\lambda_i}{2}|\overline{T}_i(t)|=\overline{\lim_{i\to\infty}}\frac{\lambda_i}{2}\Big|\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n(t)(b_{p(i)n}-b_{q(i)n})\Big|=+\infty$$
pour presque tout t.

Désignons par A_1 et A_2 les ensembles des t pour lesquels on a respectivement
$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\frac{\lambda_i}{2}\overline{T}_i(t)=+\infty,\qquad \underline{\lim_{i\to\infty}}\frac{\lambda_i}{2}\overline{T}_i(t)=-\infty.$$

On a $|A_1+A_2|=1$; par conséquent, l'un des ensembles EA_1 et EA_2 est de mesure positive. Soit p. ex. $|EA_1|>0$; il existe donc un intervalle $\delta=\Big(\frac{p}{2^q},\frac{p+1}{2^q}\Big)$ dans lequel la mesure de l'ensemble EA_1, surpasse $\frac{1}{2}|\delta|$. Désignons par F l'ensemble $\delta\cdot EA_1$, par F^* l'ensemble symétrique à F par rapport au centre de l'intervalle δ. On a $|FF^*|>0$ et, en chaque point $t \in FF^*$, on a simultanément $\overline{\lim_{i\to\infty}} \frac{\lambda_i}{2} \overline{T}_i(t) = +\infty$ et $\underline{\lim_{i\to\infty}} \frac{\lambda_i}{2} \overline{T}_i(t) = -\infty$, les fonctions $\varepsilon_n(t)$ étant impaires par rapport au centre de l'intervalle δ pour $n \geqslant q+1$. On obtient ainsi une contradiction avec (i) et (iii)[10].

Théorème 4. *Admettons que les dérivées à droite $f_n'^+(x)$ existent pour $n=1,2,\ldots$ au point $x=\xi$ de l'intervalle $a \leqslant x < b$. Alors chacune des conditions:*

la fonction

$$f_\varepsilon(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(t) f_n(x) \tag{9_ε}$$

possède au point $x=\xi$ la dérivée à droite pour un ensemble des $t \in \langle 0,1\rangle$ de mesure positive,

il en est de même de la fonction

$$f_\eta(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) f_n(x), \tag{9_η}$$

entraîne l'égalité:

$$\lim_{h\to+0} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{f_n(\xi+h)-f_n(\xi)}{h} - f_n'^+(\xi) \right)^2 = 0.$$

Démonstration. Soit

$$T_i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(t) \frac{f_n(\xi+h_i)-f_n(\xi)}{h_i}, \quad T_i^*(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \frac{f_n(\xi+h_i)-f_n(\xi)}{h_i}$$

où $h_i>0$ et $h_i \to 0$. D'après les lemmes 1 et 1', on a

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{f_n(\xi+h_i)-f_n(\xi)}{h_i} - f_n'^+(\xi) \right)^2 = 0,$$

d'où la thèse du théorème.

[10]) Voir le livre précité de MM. Kaczmarz et Steinhaus, p. 258-259.

Théorème 5. *Si les dérivées à droite $f_n'^+(x)$ où $n=1,2,\ldots$ existent pour presque tout $x \in \langle a,b\rangle$ et qu'on a l'inégalité*

$$\overline{\lim_{h\to+0}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} - f_n'^+(x) \right)^2 > 0 \tag{10}$$

pour presque tout $x \in \langle a,b\rangle$, les fonctions $f_\varepsilon(t,x)$ et $f_\eta(t,x)$ définies respectivement par les formules (9_ε) et (9_η) n'ont pas de dérivée à droite presque partout pour presque tout t.

Démonstration. Il est évident que, dans un ensemble E de mesure $b-a$, il existe simultanément les dérivées $f_n'^+(x)$ et que l'inégalité (10) y est remplie en même temps. D'après le théorème 4 les dérivées $f_\varepsilon'^+(t,x)$ et $f_\eta'^+(t,x)$ n'existent pour $x \in E$ pour presque aucun t. Il suffit maintenant d'appliquer le théorème bien connu de Fubini pour obtenir la thèse du théorème.

Lemme 2. *Si les fonctions $f_n(x)$ sont absolument continues et qu'on a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n'^2(x)\,dx < +\infty,$$

la fonction $f_\varepsilon(t,x)$ définie par la formule (9_ε) est dérivable presque partout pour presque tout t.

Démonstration. On a:

$$\int_0^1 \Big(\sum_{n=p+1}^{q} \varepsilon_n(t) f_n'(x) \Big)^2 dt = \sum_{n=p+1}^{q} f_n'^2(x),$$

$$\int_0^1 dt \int_a^b \Big(\sum_{n=p+1}^{q} \varepsilon_n(t) f_n'(x) \Big)^2 dx = \int_a^b dx \int_0^1 \Big(\sum_{n=p+1}^{q} \varepsilon_n(t) f_n'(x) \Big)^2 dt = \sum_{n=p+1}^{q} \int_a^b f_n'^2(x)\,dx.$$

Choisissons une suite croissante d'indices $\{p_i\}$ telle que

$$\sum_{n=p_i+1}^{\infty} \int_a^b f_n'^2(x)\,dx < \frac{1}{4^i},$$

et désignons par A_i l'ensemble des t pour lesquels on a

$$\int_a^b \Big(\sum_{n=p_i+1}^{p_{i+1}} \varepsilon_n(t) f_n'(x) \Big)^2 dx \geqslant \frac{1}{2^i}.$$

On voit que $|A_i| \leqslant \frac{1}{2^i}$ et $|\overline{\lim_{i\to\infty}} A_i| = |A| = 0$. On a pour $t \in \langle a, b\rangle - A$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\int_a^b\Big(\sum_{n=p_i+1}^{p_{i+1}}\varepsilon_n(t)f_n'(x)\Big)^2dx\Big)^{1/2} < +\infty.$$

On en conclut que

$$\lim_{i,j\to\infty}\int_a^b\Big(\sum_{n=1}^{p_i}\varepsilon_n(t)f_n'(x) - \sum_{n=1}^{p_j}\varepsilon_n(t)f_n'(x)\Big)^2dx = 0 \qquad \text{pour presque tout } t.$$

Il en résulte l'existence pour presque tout t d'une fonction $g(t,x) \in (L^2)$ telle que

$$\lim_{i\to\infty}\int_a^b\Big|\sum_{n=1}^{p_i}\varepsilon_n(t)f_n'(x) - g(t,x)\Big|dx \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{i\to\infty}\Big[(b-a)\int_a^b\Big(\sum_{n=1}^{p_i}\varepsilon_n(t)f_n'(x) - g(t,x)\Big)^2dx\Big]^{1/2} = 0.$$

Par conséquent

$$f_\varepsilon(t,u) = \lim_{i\to\infty}\sum_{n=1}^{p_i}\varepsilon_n(t)f_n(u) = \int_a^u g(t,x)\,dx + c.$$

Théorème 6. *Admettons que la fonction $\varphi(x)$ est absolument continue et que $0 < \int_a^b \varphi'^2(x)dx < +\infty$. Si $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\beta_n^2 = +\infty$, la fonction* (W_{I})

$$\Phi_\varepsilon(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n(t)\,a_n\varphi(\beta_n x),$$

et la fonction (W_{II})

$$\Phi_\eta(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\eta_n(t)\,a_n\varphi(\beta_n x)$$

sont dépourvues presque partout de dérivée pour presque tout t. Si, au contraire, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\beta_n^2 < +\infty$, la fonction $\Phi_\varepsilon(t,x)$ a presque partout la dérivée pour presque tout t, et le même est vrai pour la fonction $\Phi_\eta(t,x)$ dans l'hypothèse supplémentaire, que la série $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi(\beta_n x)$ est presque partout dérivable.

Démonstration. Posons $f_n(x) = a_n\varphi(\beta_n x)$ et remarquons qu'on a $\lim_{n\to\infty}\int_E \varphi'^2(\beta_n x)dx = |E|\frac{1}{l}\int_0^l \varphi'^2(x)dx > 0$ dans un ensemble quelconque E de mesure positive. Il en résulte que la série $\sum_{n=1}^{\infty}f_n'^2(x) = \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\beta_n^2\varphi'^2(\beta_n x)$ diverge presque partout, pourvu que $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\beta_n^2 = +\infty$[11]. En vertu du théorème 5 on en tire la première partie du théorème 6.

Admettons maintenant que $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\beta_n^2 < +\infty$. La série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l f_n'^2(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\beta_n^2\int_0^l \varphi'^2(\beta_n x)dx$$

est convergente, car

$$\int_0^l \varphi'^2(\beta_n x)\,dx \to \frac{1}{l}\int_0^l \varphi'^2(x)\,dx.$$

La deuxème partie du théorème 6 résulte alors du lemme 2.

4. ***Théorème 7.*** *Admettons que les fonctions $f_n(x)$ jouissent des propriétés suivantes:*

(a) *les dérivées $f_n'^{+}(x)$ où $n = 1, 2, \ldots$ existent pour tout $x \in \langle a, b)$ et sont continues, exception faite d'un nombre fini des valeurs $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$;*

(b) *il existe une constante $\lambda > 0$ et une suite δ_n de nombres positifs tendant vers 0, telle que l'inégalité*

$$\Big|\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - f_n'^{+}(x)\Big| > \lambda \qquad \text{pour tout } x \in \langle a', b'\rangle \subset \langle a, b) \tag{12}$$

est vérifiée par un h (dépendant de x et n) tel que $0 < h < \delta_n$ et $h < b - x$.

Dans ces hypothèses la fonction $f_\eta(x)$ est dans $\langle a', b'\rangle$ dépourvue de dérivée à droite pour tout η appartenant à un ensemble résiduel dans l'espace (p).

---

[11]) Cf. les renvois [4]) et [5]).

Démonstration. Soit $\{G_n\}$ une suite d'ensembles ouverts dans l'intervalle ouvert (a,b) qui recouvrent l'ensemble

$$\Xi=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_r)$$

de façon que $G_1\cdot G_2\cdot G_3\ldots=\Xi$. Désignons par H_i^r où $i,r=1,2,\ldots$ l'ensemble des suites $\eta\,\epsilon\,(p)$ satisfaisant à la condition suivante:

Il existe un x_η (dépendant de la suite η) appartenant à $\langle a',b'-\frac{1}{i}\rangle-G_r$ et tel que la fonction $f_\eta(x)$, correspondante à η, satisfait à l'inégalité

$$\left|\frac{f_\eta(x_\eta+h)-f_\eta(x_\eta)}{h}-\frac{f_\eta(x_\eta+h')-f_\eta(x_\eta)}{h'}\right|\leqslant\frac{\lambda}{2}, \tag{13}$$

où $0<h\leqslant\frac{1}{i}$ et $0<h'\leqslant\frac{1}{i}$. On voit que les ensembles H_i^r sont fermés; nous allons montrer qu'ils sont non denses dans (p).

Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi pour un $H_{i_0}^{r_0}$. Comme fermé, cet ensemble contiendrait donc une sphère. Soit ϱ son rayon et $\eta^0\equiv\{\eta_n^0\}$ son centre. Choisissons un N tel que $\sum_{n=N}^{\infty}2^{-n}<\varrho/2$; alors toute suite

$$\eta^*\equiv(\eta_1^0,\eta_2^0,\dots,\eta_N^0,0,0,\dots,0,\eta_m,0,0,\dots),\quad \text{où } \eta_m=1 \text{ pour un } m>N,$$

appartient à cette sphère. A la suite η^* corresponde la fonction $f_{\eta^*}(x)=\sum_{n=1}^{N}\eta_n^0 f_n(x)+f_m(x)$ satisfaisant d'après (13) à l'inégalité

$$\left|\frac{f_{\eta^*}(x_{\eta^*}+h)-f_{\eta^*}(x_{\eta^*})}{h}-f'^{+}_{\eta^*}(x_{\eta^*})\right|\leqslant\frac{\lambda}{2} \tag{14}$$

pour un $x_{\eta^*}\,\epsilon\,\langle a',b'-\frac{1}{i_0}\rangle-G_{r_0}$ et $0<h\leqslant\frac{1}{i_0}$. Il résulte de l'hypothèse (a) que les dérivées de fonctions $f_n(x)$ existent et sont continues dans tout $x\,\epsilon\,(a,b)-\Xi$; il s'ensuit que, pour h suffisamment petit, on a

$$\sum_{n=1}^{N}\eta_n^0\left|\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}-f'^{+}_n(x)\right|<\frac{\lambda}{4} \tag{15}$$

uniformément dans $\langle a',b'-\frac{1}{i_0}\rangle-G_{r_0}$. Choisissons un m naturel tel que $\delta_m<\frac{1}{i_0}$ et que l'inégalité (15) soit satisfaite pour $0<h\leqslant\delta_m$ uniformément dans $\langle a',b'-\frac{1}{i_0}\rangle-G_{r_0}$. Appliquons maintenant (12) avec $m=n$ et (15); il en résulte que l'on a pour un $x\,\epsilon\,\langle a',b'-\frac{1}{i_0}\rangle-G_{r_0}$ et un $h\leqslant\delta_m$ positif

$$\left|\frac{f_{\eta^*}(x+h)-f_{\eta^*}(x)}{h}-f'^{+}_{\eta^*}(x)\right|>\frac{3}{4}\lambda$$

contrairement à (14).

Nous avons ainsi démontré que l'ensemble $\sum_{i,r=1}^{\infty}H_i^r$ est de I catégorie; pour tout $\eta\,\epsilon\,(p)-\sum_{i,r=1}^{\infty}H_i^r$ la fonction $f_\eta(x)$ est dépourvue de dérivée à droite pour chaque $x\,\epsilon\,\langle a',b')-G_1\cdot G_2\cdot\ldots$ et l'admet donc au plus dans l'ensemble fini constitué de $\Xi\langle a',b'\rangle$ et b'. Mais il est bien évident, d'après l'hypothèse (b), que l'on a (7) pour tout $\xi_p\,\epsilon\,\Xi$ et pour le point b'. En appliquant maintenant le théorème 2 et en négligeant un ensemble de I catégorie contenu dans $(p)-\sum_{i,r=1}^{\infty}H_i^r$, toutes les fonctions $f_\eta(x)$ appartenant à un ensemble résiduel sont dépourvues de dérivée à droite dans l'intervalle fermé $\langle a',b'\rangle$ tout entier.

On obtient un théorème plus aisé à démontrer en remplaçant l'hypothèse (a) par l'existence des dérivées $f_n'(x)$ continues dans $\langle a,b)$.

Nous laissons au lecteur la démonstration (plus facile encore) du théorème suivant:

Théorème 8. *Admettons que les fonctions $f_n(x)$ jouissent des propriétés suivantes:*

(a) *$f_n(x)$ satisfont à une condition de Lipschitz dans $\langle a,b\rangle$;*

(b) *il existe une suite $k_n\to+\infty$ telle que l'inégalité*

$$\left|\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}\right|\geqslant k_n$$

est satisfaite par un h (dépendant de x) tel que $0<h<b-x$.

Dans ces hypothèses, on a pour chaque η d'un ensemble résiduel dans (p) la relation

$$\varlimsup_{h\to+0}\left|\frac{f_\eta(x+h)-f(x)}{h}\right|=+\infty.$$

Théorème 9. *Admettons que la fonction $\varphi(x)$ n'est pas constante et possède partout la derivée continue. Soit $a_n\beta_n > c > 0$ pour $n=1,2,\ldots$ Dans ces hypothèses, la fonction $\Phi_\eta(x)$ définie par la formule (4) est partout dépourvue de dérivée à droite pour chaque η d'un ensemble résiduel dans (φ).*

Démonstration. Soit $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant l}|\varphi(x)-\varphi(l)|=k>0$. Soit $\xi\in(0,l)$ une valeur de x telle que $|\varphi(\xi)-\varphi(l)|=k$. Désignons par E l'ensemble des $x\in\langle 0,l\rangle$ tels que $|\varphi'(x)|\leqslant\varrho=\dfrac{k}{4l}$.

Posons:

$$h=\begin{cases} l-x & \text{si } x\in E \text{ et } |\varphi(x)-\varphi(l)|\geqslant k/2,\\ \xi-x & \text{si } x\in E, \quad |\varphi(x)-\varphi(l)|<k/2 \text{ et } 0\leqslant x<\xi,\\ \xi-x+l & \text{si } x\in E, \quad |\varphi(x)-\varphi(l)|<k/2 \text{ et } \xi<x\leqslant l,\\ l & \text{si } x\in\langle 0,l\rangle-E.\end{cases}$$

On constate facilement que, pour $x\in E$, on a

$$\left|\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}-\varphi'(x)\right|\geqslant\frac{k}{4l}$$

et ailleurs

$$\left|\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}-\varphi'(x)\right|=|\varphi'(x)|\geqslant\frac{k}{4l}.$$

Il est ainsi démontré que, pour tout $x\in\langle 0,l\rangle$, il existe un h_x tel que

$$\left|\frac{\varphi(x+h_x)-\varphi(x)}{h_x}-\varphi'(x)\right|\geqslant\frac{k}{4l}.$$

Soit: $f_n(x)=a_n\varphi(\beta_n x)$, $a=0$, $b=2l$, $a'=0$, $b'=l$, $\lambda=ck/4l$, $\delta_n=l/\beta_n$ et $h=h_y/\beta_n$ où $y=l\beta_n\dfrac{x}{l}-l\left[\beta_n\dfrac{x}{l}\right]$. On a pour $x\in\langle 0,l\rangle$

$$\left|\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}-f_n'(x)\right|=a_n\beta_n\left|\frac{\varphi(y+h_y)-\varphi(y)}{h_y}-\varphi'(y)\right|\geqslant\frac{kc}{4l}=\lambda,$$

où $0<h\leqslant\delta_n$. Il suffit maintenant d'appliquer le théorème 7.

On Hausdorff classes

By

Andrzej Alexiewicz (Poznań).

This paper deals with following problem: *let $\{f_n(x)\}$ be a convergent sequence of functions of a certain class $\boldsymbol{K}$; which are necessary and sufficient conditions that the limit function should also belong to $\boldsymbol{K}$?*

The answer depends of the choice of the class $\boldsymbol{K}$. If $\boldsymbol{K}$ is the class of continuous functions it is the context of the well known theorem of Arzéla, if $\boldsymbol{K}$ is the family of functions of the class α of Baire, the answer was given by Gagaeff[1]). We give a generalization of his result for a more general class of functions.

1. Let X be an arbitrary set, $\boldsymbol{H}$ a family of subsets of X satisfying the following conditions:

(1.1) *The empty set belongs to $\boldsymbol{H}$;*

(1.2) *The common part of two sets $(\boldsymbol{H})$[2]) is a set $(\boldsymbol{H})$;*

(1.3) *The sum of a sequence of sets $(\boldsymbol{H})$ is a set $(\boldsymbol{H})$.*

Let Y be a separable metric space with the distance (y_1,y_2). The family $\boldsymbol{H}^*$ of all functions $f(x)$ from X to Y satisfying the condition:

(1.4) *For every open set $G\subset Y$ the set $\mathop{E}\limits_x\{f(x)\in G\}$ belongs to $\boldsymbol{H}$;*

will be called *Hausdorff class*[3]).

Theorem 1. *The necessary and sufficient condition that $f(x)$ should belong to a Hausdorff class $\boldsymbol{H}^*$ is that, for every $\varepsilon>0$ there should exist a sequence $\{X_n\}$ of sets $(\boldsymbol{H})$ such that $X=\sum\limits_{n=1}^{\infty}X_n$, $\omega(f,X_n)<\varepsilon$*[4]).

[1]) B. Gagaeff, *Sur les suites convergentes des fonctions mesurables B*, Fund. Math. **18** (1932), p. 182-188.

[2]) We call shortly sets (or functions) belonging to a class $\boldsymbol{H}$ *sets (or functions)* $(\boldsymbol{H})$.

[3]) These classes were introduced by F. Hausdorff: *Mengenlehre*, Leipzig 1927, p. 232-270.

[4]) $\omega(f,E)$ denotes oscillation of f on E.