Il suffit, en effet, de substituer à Φ la famille de toutes les fonctions continues, définies sur des G_δ et admettant $\mathfrak{c}$ valeurs.

La même famille F satisfait aussi à A. Car la condition $\overline{\overline{f(X)-Y}}=\mathfrak{c}$ implique que $\overline{\overline{X}}=\mathfrak{c}$; en conséquence, aucun ensemble-élément de la famille F ne se laisse transformer en un autre par une fonction dont l'ensemble des valeurs ait la puissance $<\mathfrak{c}$.

Le th. B résulte évidemment de A'. Il se déduit aussi du théorème p. 36 en substituant à Φ la famille de toutes les homéomorphies définies sur des G_δ indénombrables (en vertu du théorème de M. Lavrentieff [7]), d'après lequel chaque homéomorphie se laisse étendre sur un ensemble G_δ).

[7]) C. R. Paris t. 178 (1924), p. 187. Cf. *Topologie* I, p. 214.

Les correspondances multivoques et l'axiome du choix.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

On dit qu'on a défini entre deux ensembles quelconques P et Q une correspondance bi-ν-voque (où ν est un nombre naturel) si l'on a défini une correspondance qui fait correspondre à tout élément p de P un ensemble $K(p)$ formé de ν éléments de Q, telle qu'il existe pour tout élément q de Q précisémment ν éléments p de P tels que $q \epsilon K(p)$. En utilisant l'axiome du choix Dénes König a démontré [1]) que s'il existe une correspondance bi-ν-voque entre deux ensembles P et Q, il existe aussi une transformation biunivoque f telle qu'elle ne fait correspondre deux éléments que si ces éléments se correspondent par la correspondance bi-ν-voque donnée (c. à d. telle que $f(p) \epsilon K(p)$ pour $p \epsilon P$).

Dans le n⁰ 1 de cette Note je prouverai que si l'on savait démontrer ce théorème de M. D. König pour $\nu=2$ sans faire appel à l'axiome du choix, on saurait démontrer sans l'aide de cet axiome l'existence d'un ensemble non mesurable au sens de Lebesgue. Je nommerai notamment une correspondance bi-2-voque entre deux ensembles bien définis d'ensembles linéaires et je démontrerai que si l'on savait nommer une correspondance biunivoque entre ces ensembles, on saurait nommer un ensemble linéaire non mesurable L.

Dans le n⁰ 2 de cette Note je démontrerai le théorème de M. D. König pour $\nu=2$ en admettant l'axiome du choix pour les familles d'ensembles disjoints formés de deux éléments.

1. Divisons tous les nombres irrationnels en classes, en rangeant dans une même classe deux nombres dans ce et seulement dans ce cas, si leur différence est un nombre rationnel. Nous appellerons ces classes *classes* de Vitali. On obtient ainsi une décomposition de l'ensemble N de tous les nombres irrationnels en classes de Vitali disjointes. Si l'ensemble linéaire V est une classe de Vitali,

[1]) Fundamenta Mathematicae **8**, p. 114.

l'ensemble V^* symétrique à V par rapport au point 0 est, comme on voit sans peine, une classe de Vitali disjointe de V.

Soit P l'ensemble de toutes les classes de Vitali et soit Q l'ensemble de tous les ensembles linéaires E pour lesquels il existe une (au moins) classe de Vitali V telle qu'on a ou bien $E=V+V^*+\{0\}$[2]), ou bien $E=V+V^*+\{1\}$. Je nommerai maintenant une correspondance bi-2-voque entre les ensembles P et Q.

Pour l'avoir, il suffira de désigner pour tout ensemble V appartenant à P, par $K(V)$ l'ensemble formé de deux ensembles $V+V^*+\{0\}$ et $V+V^*+\{1\}$. En effet, vu que les classes de Vitali sont formées de nombres irrationnels, l'ensemble $K(V)$ est pour tout $V \epsilon P$ formé de deux ensembles linéaires distincts ($K(V)$ est d'ailleurs, une paire *ordonnée*). Or, si $E \epsilon Q$, il existe (vu la définition de l'ensemble Q) un nombre a_1 égal à 0 ou à 1 et une classe de Vitali V_1 tels que $E=V_1+V_1^*+\{a_1\}$, et encore une autre $V_2=V_1^*$, puisqu'on a aussi $E=V_2+V_2^*+\{a_1\}$. Or, s'il était encore $E=V+V^*+\{a\}$, où V est une classe de Vitali et $a=0$ ou $a=1$, on aurait nécessairement $V=V_1$ ou bien $V=V_1^*$, puisque, dans le cas où $V \neq V_1$ et $V \neq V_1^*$, les classes de Vitali distinctes étant disjointes, on a, comme on voit sans peine, $(V+V^*)(V_1+V_1^*)=0$, donc $E=V+V^*+\{a\} \neq V_1+V_1^*+\{a_1\}=E$, ce qui est impossible. Vu la définition de l'ensemble $K(V)$, il existe donc deux et seulement deux classes distinctes V de Vitali telles que $E \epsilon K(V)$ (notamment $V=V_1$ et $V=V_1^*$).

La fonction $K(V)$ que nous avons nommée, détermine donc une correspondance bi-2-voque entre les ensembles P et Q.

Or, admettons que nous savons nommer une correspondance biunivoque f entre P et Q telle que $f(V) \epsilon K(V)$ pour $V \epsilon P$. Soit f^{-1} la correspondance inverse. Divisons toutes les classes de Vitali en paires non ordonnées $\{V,V^*\}$; soit Φ la famille de toutes ces paires. Comme j'ai démontré ailleurs[3]), si Ψ est une famille de classes de Vitali qui contient une et seulement une classe de toute paire de la famille Φ, l'ensemble linéaire $\sum_{E \epsilon \Psi} E$ (c. à d. l'ensemble-somme de tous les ensembles de la famille Ψ) est non mesurable L. Or, soit Ψ la famille de tous les ensembles $f^{-1}(V+V^*+\{0\})$, où $V \epsilon P$. Je dis que la famille Ψ contient une et seulement une classe de Vitali de toute paire de la famille Φ.

[2]) $\{a\}$ désigne l'ensemble formé d'un seul élément, a.

[3]) Mathematica **3**, p. 1.

Soit, en effet, $\{V,V^*\}$ une paire (non ordonnée) donnée de la famille Φ et cherchons tous les ensembles E de la famille Ψ tels que $E \epsilon \{V,V^*\}$, donc tels que $E=V$, ou bien $E=V^*$. Comme $E \epsilon \Psi$ (vu la définition de la famille Ψ), il existe un ensemble $H \epsilon P$ tel que $E=f^{-1}(H+H^*+\{0\})$, d'où $H+H^*+\{0\}=f(E)$, donc ou bien $H+H^*+\{0\}=f(V)$, ou bien $H+H^*+\{0\}=f(V^*)$, et, comme $f(V) \epsilon K(V)=\{V+V^*+\{0\},V+V^*+\{1\}\}$ et $f(V^*) \epsilon K(V^*)$, on trouve sans peine $H+H^*+\{0\}=V+V^*+\{0\}$, ce qui donne (les classes de Vitali étant disjointes, et vu que $H \neq H^*$, $V \neq V^*$) $H=V$, ou bien $H=V^*$, d'où toujours $E=f^{-1}(H+H^*+\{0\})=f^{-1}(V+V^*+\{0\})$. Il existe donc au plus un ensemble de la famille Ψ qui appartient à $\{V,V^*\}$. D'autre part, on voit sans peine que, si l'on pose $E=f^{-1}(V+V^*+\{0\})$, on a $f(E)=V+V^*+\{0\}$, ce qui donne, d'après $f(E) \epsilon K(E)$, $V+V^*+\{0\}=E+E^*+\{0\}$, donc ou bien $E=V$, ou bien $E \epsilon V^*$ et en tout cas $E \epsilon \{V,V^*\}$; vu que $E=f^{-1}(V+V^*+\{0\}) \epsilon \Psi$, on voit donc que la famille Ψ a un (au moins) ensemble-élément de la paire $\{V,V^*\}$. La famille Ψ jouit donc des propriétés désirées et l'ensemble $\sum_{E \epsilon \Psi} E$ (bien défini à l'aide de la fonction f) est non mesurable L.

Notre assertion est ainsi démontrée. Donc, *à l'état actuel de la Science, nous ne savons pas démontrer le théorème de M. D. König sans faire appel à l'axiome du choix même dans le cas où* $\nu=2$.

À propos du théorème T_1 de F. Bernstein: „Si pour deux nombres cardinaux $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ on a $\nu\mathfrak{m}=\nu\mathfrak{n}$, ν étant un nombre fini quelconque, alors on a $\mathfrak{m}=\mathfrak{n}$", M. D. König s'exprime (l. c., p. 127) comme suit: „Ce théorème peut être formulé de la façon suivante: «S'il existe une transformation bi-ν-voque (ν fini) entre deux ensembles, ceux-ci sont équivalents»". Appelons cette dernière proposition T_2. Je ne sais pas démontrer l'équivalence des théorèmes T_1 et T_2 sans admettre l'axiome du choix même pour le cas $\nu=2$. Je sais démontrer sans faire appel à l'axiome du choix le théorème T_1 pour $\nu=2$[4]), mais je ne sais pas démontrer sans utiliser l'axiome du choix que les ensembles P et Q définis plus haut (entre lesquels il existe une correspondance bi-2-voque) ont même puissance.

[4]) Voir ma note dans Fund. Math. 3, p. 1.

2. Soient P et Q deux ensembles donnés entre lesquels il existe une correspondance bi-2-voque. À tout élément p de P correspond donc un ensemble $K(p)$ formé de deux éléments de Q et, pour tout élément q de Q il existe précisément deux éléments p de P tels que $q \in K(p)$.

Soit $R = P \times Q$ le produit cartésien des ensembles P et Q (c. à d. l'ensemble de tous les systèmes ordonnés (p,q), où $p \in P$ et $q \in Q$, et soit S l'ensemble de tous les points $(p;q)$ de R, où $p \in P$ et $q \in K(p)$. Pour tout élément p de P donné, il existe évidemment deux points de S à l'abscisse p et pour tout élément q de Q il existe deux points de S à l'ordonnée q (les points (p,q), où $q \in K(p)$). s étant un point de S, désignons par $\varphi(s)$ le point (unique) de S autre que s et ayant la même abscisse que s et par $\psi(s)$ le point (unique) de S autre que s et ayant la même ordonnée que s. Les fonctions $\varphi(s)$ et $\psi(s)$ sont ainsi définies pour tout point s de S et on a évidemment $\varphi\varphi(s) = s$ et $\psi\psi(s) = s$ pour $s \in S$.

Désignons pour tout point s de S par $E(s)$ l'ensemble formé de deux suites du type $\omega^* + \omega$ (à termes non nécessairement distincts):

$$\sigma_s = (\dots, \psi\varphi\psi(s), \varphi\psi(s), \psi(s), s, \varphi(s), \psi\varphi(s), \varphi\psi\varphi(s), \dots)$$

et

$$\sigma_s^* = (\dots, \varphi\psi\varphi(s), \psi\varphi(s), \varphi(s), s, \psi(s), \varphi\psi(s), \psi\varphi\psi(s), \dots)$$

dont l'ordre est inverse.

Soient s et s_1 deux points de S et admettons que les suites σ_s et σ_{s_1} ont un terme commun a. On voit sans peine que le terme qui précède a dans la suite σ_s est ou bien $\psi(a)$, ou bien $\varphi(a)$, et le terme qui suit a dans σ_s est ou bien $\varphi(a)$, ou bien $\psi(a)$; pareillement pour la suite σ_{s_1}. On en conclut aussitôt que les suites σ_s et σ_{s_1} sont formées de mêmes termes dans le même ordre (l'une étant une translation de l'autre) ou bien dans l'ordre inverse. On a donc ou bien $\sigma_{s_1} = \sigma_s$, ou bien $\sigma_{s_1} = \sigma_s^*$, donc en tout cas $E(s_1) = E(s)$ (puisque $E(s) = \{\sigma_s, \sigma_s^*\}$). Si les suites σ_s et σ_{s_1} n'ont pas de termes communs, on a évidemment $\sigma_{s_1} \neq \sigma_s$, $\sigma_{s_1} \neq \sigma_s^*$, $\sigma_{s_1}^* \neq \sigma_s$, $\sigma_{s_1}^* \neq \sigma_s^*$ et les ensembles $E(s_1)$ et $E(s)$ sont disjoints.

Soit F la famille de tous les ensembles $E(s)$ distincts, où $s \in S$. Les ensembles de la famille F sont donc disjoints et formés chacun de deux éléments. En admettant l'axiome du choix pour les familles d'ensembles disjoints formées de deux éléments, nous concluons qu'il existe un ensemble Z contenant un et seulement un élément de tout ensemble de la famille F. Les éléments de Z sont donc des suites (du type $\omega^* + \omega$) n'ayant pas de termes communs.

Si $p \in P$, il existe, comme nous savons, deux et seulement deux points de S à l'abscisse p; si l'un d'eux est s, l'autre est $\varphi(s)$; ils sont des termes des suites σ_s et σ_s^* et comme une et seulement une de ces suites (qui sont les deux éléments de $E(s)$) appartient à l'ensemble Z, s et $\varphi(s)$ appartiennent à un même élément de Z et évidemment à un seul.

Il existe donc pour tout $p \in P$ un et seul élément e_p de l'ensemble Z auquel appartiennent les deux points de S à l'abscisse p. Soit $s = (p,q)$ un terme de e_p à l'abscisse p; $\varphi(s)$ est alors aussi un point à l'abscisse p, soit $\varphi(s) = (p,q')$. Si l'on a, dans la suite e_p, $s \prec \varphi(s)$, posons $f(p) = q$, et si $\varphi(s) \prec s$, posons $f(p) = q'$. Je dis que l'élément $f(p)$ ne dépend pas du choix du terme s à l'abscisse p de la suite e_p (qui contient au moins deux tels termes). Soit, en effet, $s_1 = (p,q_1)$ un autre terme de la suite e_p à l'abscisse p. Vu que $s \in S$ et $s_1 \in S$, on a évidemment, soit $q_1 = q$, soit $q_1 = q'$. Si $q_1 = q$, on a $s_1 = s$, et si $q_1 = q'$, on a $s_1 = \varphi(s)$. Si $s_1 = s$ et si $s \prec \varphi(s)$, on a $s_1 \prec \varphi(s_1)$, donc toujours $f(p) = q$, et si $\varphi(s) \prec s$, on a $\varphi(s_1) \prec s_1$, donc toujours $f(p) = q'$. Or, si $s_1 = \varphi(s)$ et si $s \prec \varphi(s)$, on a $\varphi(s_1) \prec s_1$ et, vu que $s_1 = \varphi(s) = (p,q')$, on a toujours $f(p) = q$ et, si $\varphi(s) \prec s$, on a $s_1 \prec \varphi(s_1)$, donc toujours $f(p) = q'$.

La fonction $f(p)$ est ainsi définie pour $p \in P$ et ses valeurs sont des éléments de Q. Je dis qu'elle établit une correspondance biunivoque entre les ensembles P et Q.

En effet, soit $p \in P$, $p_1 \in P$, $p \neq p_1$ et admettons que $f(p) = f(p_1)$. Comme $s = (p, f(p)) \in S$ et $s_1 = (p_1, f(p_1)) \in S$, il résulte de $f(p) = f(p_1)$ que les points s et s_1 ont la même ordonnée, donc $s_1 = \psi(s)$. Les points de S à l'abscisse p sont s et $\varphi(s)$ et les points de S à l'abscisse p_1 sont s_1 et $\varphi(s_1)$, donc $\psi(s)$ et $\varphi\psi(s)$. Or, il résulte de la définition de la fonction f qu'on a, dans e_p, $s \prec \varphi(s)$ et $s_1 \prec \varphi(s_1)$, donc $\psi(s) \prec \varphi\psi(s)$; or, e_p étant une des suites σ_s ou σ_s^*, cela est impossible. La fonction f est donc à valeurs distinctes dans P.

Soit enfin q un élément de Q. Il existe, comme nous savons, deux éléments de S à l'ordonnée q; si l'on désigne l'un d'eux par $s = (p,q)$, l'autre sera $\psi(s) = (p_1, q)$. Soit encore $\varphi(s) = (p, q_1)$, $\varphi\psi(s) = (p_1, q_2)$. On a dans la suite e_p ou bien

$$\varphi\psi(s) \prec \psi(s) \prec s \prec \varphi(s) \quad (\text{si } e_p = \sigma_s),$$

ou bien $\varphi(s) \prec s \prec \psi(s) \prec \varphi\psi(s)$ (si $e_p = \sigma_s^*$).

Dans le premier cas on a, comme on voit sans peine, $q = f(p)$, dans le second $q = f(p_1)$. On a donc $Q \subset f(P)$.

La fonction f établit ainsi une correspondance biunivoque entre P et Q. Or, comme $(p, f(p)) \in S$ pour $p \in S$, vu la définition de l'ensemble S, on a $f(p) \in K(p)$ pour $p \in P$. La fonction f ne fait donc correspondre à un élément de P un élément de Q que si cet élément lui correspond par la correspondance bi-2-voque donnée.

Nous avons ainsi démontré le théorème de M. D. König pour $\nu = 2$, en admettant l'axiome du choix seulement pour les familles d'ensembles disjoints formés de deux éléments.

La question se pose si l'on peut nommer une correspondance bi-2-voque entre deux ensembles de nombres réels effectivement définis M et N, telle qu'on ne saurait nommer aucune correspondance biunivoque entre M et N. Or, il est à remarquer que sans utiliser l'axiome du choix nous ne savons pas démontrer la proposition que voici:

Si E est un ensemble de points dans le plan tel que chaque droite parallèle à l'un des deux axes des coordonnées a avec E précisément deux points communs, il existe un sous-ensemble E_1 de E tel que chacune de ces droites a avec E_1 un et un seul point commun [5]).

[5]) Cf. D. König, l. c., p. 133.

Sur les fonctions continues non dérivables.

Par

Władysław Orlicz (Poznań).

1. Dans la littérature mathématique, même au cours des dernières années, il ne manque pas de travaux concernant les fonctions continues non dérivables. On y trouve des exemples des fonctions, définies à l'aide des considérations géométriques ou analytiques, qui sont dépourvues de dérivée soit dans un intervalle, soit dans un ensemble particulier de points; on trouve aussi des théorèmes d'existence de telles fonctions. En particulier on peut envisager plusieurs exemples des fonctions continues non dérivables répresentées par les séries infinies de fonctions périodiques comme des exemples de la méthode constructive. Lorsqu'il s'agit des théorèmes d'existence des fonctions assujeties à certaines singularités, on emploie dans les dernières années de plus en plus la notion de catégorie de Baire. On démontre p. ex. que dans un espace métrique complet, convenablement choisi, composé de fonctions continues, toutes les fonctions, exception faite d'un ensemble de I catégorie de Baire, sont dépourvues de dérivée partout [1]). Cette méthode a quelque avantage vis à vis de la méthode constructive: elle s'appuie sur une idée générale, qu'on peut employer aussi avec succès dans plusieurs problèmes analogues, elle montre aussi que pour les fonctions continues, l'indérivabilité est un phénomène, pour ainsi dire, habituel. Cette méthode exige moins de calculs, mais d'autre part, ne conduit qu'indirectement aux exemples effectifs des fonctions ayant les singu-

[1]) Voir: S. Mazurkiewicz, *Sur les fonctions non dérivables*, Studia Math. **3** (1931), p. 92-94; S. Banach, *Über die Bairesche Kategorie gewisser Funktionenmengen*, ibidem, p. 174-179. Cf. aussi p. ex. H. Auerbach et S. Banach, *Über die Höldersche Bedingung*, ibidem, p. 180-184, où la notion de catégorie de Baire est utilisée pour les buts analogues.