Sur l'extension de deux théorèmes topologiques à la Théorie des ensembles.

Par

Casimir Kuratowski (Warszawa).

Nous considérons les deux théorèmes topologiques suivants:

A. *Il existe sur la ligne droite une famille composée de $2^{\mathfrak{c}}$ ensembles dont aucun n'est une image continue d'un autre* [1]).

B. *Il existe sur la ligne droite une famille composée de $2^{\mathfrak{c}}$ ensembles dont aucun n'est homéomorphe à un sous-ensemble d'un autre* [2]).

Bien qu'énoncés en termes topologiques, ces deux théorèmes expriment en réalité des faits qui appartiennent à la Théorie générale des ensembles [3]). On verra, en effet, qu'ils résultent directement d'un théorème de la Théorie des ensembles, qui va suivre, rapproché du simple fait topologique, que chaque fonction continue se laisse prolonger sur un ensemble G_δ [4]) et que la famille des fonctions continues (à valeurs réelles) définies sur des G_δ est de la puissance du continu.

[1]) Théorème signalé par A. Lindenbaum. Voir ses communications dans les Annales de la Soc. Pol. Math. t. X (1932), p. 114 et t. XV (1937), p. 185. Pour la démonstration, voir W. Sierpiński, *Deux théorèmes sur les familles des transformations*, ce volume, p. 30.

[2]) Voir ma note *Sur la puissance de l'ensemble des „nombres de dimension"* au sens de M. Fréchet, Fund. Math. 8 (1926), p. 201 et ma *Topologie* I (1933), p. 218.

[3]) Dans cet ordre d'idées, cf. les ouvrages précités de A. Lindenbaum, W. Sierpiński et moi.

[4]) Cf. p. ex. *Topologie* I, p. 210.

Lemme 1. *Etant donnée une fonction qui fait correspondre à chaque $\xi<\omega_\delta$ un ensemble $F(\xi)$ de puissance $\aleph_\delta$, il existe une fonction $G(\xi)$ où $\xi<\omega_\delta$ telle que:*

$$(1) \qquad G(\xi)\cdot G(\xi')=0 \quad \textit{pour} \quad \xi\neq\xi', \quad G(\xi)\subset F(\xi), \quad \overline{\overline{G}}(\xi)=\aleph_\delta.$$

Rangeons, en effet, tous les $\xi<\omega_\delta$ en une suite transfinie $\{a_\eta\}$ du type ω_δ, dont chaque terme est répété $\aleph_\delta$ fois. Faisons correspondre à chaque $\eta<\omega_\delta$ un élément $p(\eta)$ de $F(a_\eta)$ de façon que l'on ait $p(\eta)\neq p(\eta')$ pour $\eta'<\eta$.

Nous désignons par $G(\xi)$ l'ensemble des $p(\eta)$ tels que $a_\eta=\xi$.

En supposant que $p(\eta)\in G(\xi)\cdot G(\xi')$, il vient $\xi=a_\eta=\xi'$, d'où $\xi=\xi'$. La première des conditions (1) est donc réalisée.

Pour établir la deuxième, posons $p(\eta)\in G(\xi)$. Donc $a_\eta=\xi$. Mais, selon la définition de $p(\eta)$, on a $p(\eta)\in F(a_\eta)$. Par suite $p(\eta)\in F(\xi)$. Cela prouve que $G(\xi)\subset F(\xi)$.

L'ensemble des η tels que $a_\eta=\xi$ est, pour ξ fixe, de la puissance $\aleph_\delta$. Il en est donc de même de l'ensemble de tous les $p(\eta)$ satisfaisant à cette égalité, c. à d. de l'ensemble $G(\xi)$.

On démontre facilement qu'*étant donné un ensemble $\mathfrak{X}$ de puissance $\mathfrak{m}$ (infinie), il existe une famille $\boldsymbol{F}^*$ de puissance $2^{\mathfrak{m}}$ de sous-ensembles de $\mathfrak{X}$ dont les différences mutuelles sont de puissance $\mathfrak{m}$* [5]). Nous allons préciser cet énoncé comme suit.

Lemme 2. *Soient $\overline{\overline{\mathfrak{X}}}=\mathfrak{m}$ et A_x un sous-ensemble de $\mathfrak{X}$ tel que $\overline{\overline{A}}_x=\mathfrak{m}$ (x parcourant $\mathfrak{X}$). Il existe une famille $\boldsymbol{F}$ de puissance $2^{\mathfrak{m}}$ de sous-ensembles de $\mathfrak{X}$ tels que les conditions $X\in\boldsymbol{F}$, $Y\in\boldsymbol{F}$ et $X\neq Y$ entraînent $\overline{\overline{A_x\cdot X-Y}}=\mathfrak{m}$, quel que soit $x\in\mathfrak{X}$.*

En vertu du lemme 1 il est légitime d'admettre que les ensembles A_x sont disjoints deux à deux (car on peut les remplacer, au besoin, par des sous-ensembles satisfaisant à cette condition supplémentaire).

A chaque $x\in\mathfrak{X}$ correspond, par hypothèse, une transformation biunivoque f_x de $\mathfrak{X}$ en A_x. Faisons correspondre à chaque $X\in\boldsymbol{F}^*$ ($\boldsymbol{F}^*$ désignant la famille envisagée tout-à-l'heure), l'ensemble

$$F(X)=\sum_{x\in\mathfrak{X}} f_x(X) \text{ [6])}$$

[5]) Cf. *Topologie* I, p. 218, renvoi 4.

[6]) $f(X)$ désigne l'ensemble des y tels qu'il existe un x tel que $y=f(x)$ et $x\in X$. Nous ne demandons pas que la fonction f soit définie pour chaque $x\in X$.

3*

et désignons par $\boldsymbol{F}$ la famille de tous les ensembles $F(X)$, X parcourant la famille $\boldsymbol{F}^*$.

Les relations: $f_x(X) \subset A_x$ et $A_x \cdot A_{x_0} = 0$ si $x \neq x_0$, entraînent:

$$A_{x_0} \cdot F(X) = A_{x_0} \cdot \sum_x f_x(X) = A_{x_0} \cdot f_{x_0}(X) = f_{x_0}(X),$$

d'où

$$A_{x_0} \cdot F(X) - F(Y) = A_{x_0} \cdot F(X) - A_{x_0} \cdot F(Y) = f_{x_0}(X) - f_{x_0}(Y).$$

La fonction f_{x_0} étant biunivoque, on a

$$f_{x_0}(X) - f_{x_0}(Y) = f_{x_0}(X - Y), \quad \text{d'où} \quad \overline{\overline{f_{x_0}(X) - f_{x_0}(Y)}} = \overline{\overline{f_{x_0}(X-Y)}} = \overline{\overline{X-Y}}.$$

Les ensembles $F(X)$ et $F(Y)$ étant supposés différents, on a $X \neq Y$, d'où $\overline{\overline{X-Y}} = \mathfrak{m}$ et par conséquent $\overline{\overline{A_{x_0} \cdot F(X) - F(Y)}} = \mathfrak{m}$. La même égalité montre que l'inégalité $X \neq Y$ implique que $F(X) \neq F(Y)$; d'où $\overline{\overline{\boldsymbol{F}}} = \overline{\overline{\boldsymbol{F}^*}} = 2^{\mathfrak{m}}$.

Théorème. *Soient $\mathfrak{X}$ un ensemble infini de puissance $\mathfrak{m}$ et Φ une famille de puissance $\leqslant \mathfrak{m}$ de transformations de sous-ensembles de $\mathfrak{X}$ en sous-ensembles de puissance $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{X}$. Il existe une famille $\boldsymbol{F}$ de puissance $2^{\mathfrak{m}}$ de sous-ensembles de $\mathfrak{X}$ telle que: les conditions $X \in \boldsymbol{F}$, $Y \in \boldsymbol{F}$, $X \neq Y$ entraînent $\overline{\overline{f(X)-Y}} = \mathfrak{m}$, quelle que soit la fonction $f \in \Phi$.*

Posons $\mathfrak{m} = \aleph_\delta$ et rangeons les éléments de la famille Φ en une suite transfinie $f_0, f_1, \dots, f_\alpha, \dots$ où $\alpha < \omega_\delta$ de façon que chaque terme de cette suite soit répété $\mathfrak{m}$ fois. Pour f fixe, faisons correspondre à chaque valeur y de la fonction f un x tel que $f(x) = y$ et pour $f_\alpha = f$ désignons par A_α l'ensemble des x ainsi obtenus. On a donc $\overline{\overline{A_\alpha}} = \mathfrak{m}$ et la fonction partielle g_α qui s'obtient de f_α en restreignant la variabilité de l'argument à A_α est biunivoque.

Il existe une suite transfinie $p_0, p_1, \dots, p_\alpha, \dots, \alpha < \omega_\delta$ telle que $p_\alpha \in A_\alpha$ et que

1⁰ $p_\alpha \neq p_\xi$ pour $\xi < \alpha$,

2⁰ $p_\alpha \neq g_\eta(p_\xi)$ pour $\xi < \alpha$ et $\eta < \alpha$,

3⁰ $g_\eta(p_\alpha) \neq p_\xi$ pour $\xi < \alpha$ et $\eta < \alpha$.

Car l'ensemble des p_ξ avec $\xi < \alpha$, des $g_\eta(p_\xi)$ avec $\xi < \alpha$ et $\eta < \alpha$, ainsi que des $g_\eta^{-1}(p_\xi)$ (où g_η^{-1} désigne la fonction inverse à g_η) est pour α fixe de puissance $< \aleph_\delta$, tandis que $\overline{\overline{A_\alpha}} = \aleph_\delta$.

Les termes de la suite $\{p_\alpha\}$, $\alpha < \omega_\delta$, étant distincts deux à deux, leur ensemble P est de puissance $\mathfrak{m}$. Plus encore: en posant $A_\alpha^* = PA_\alpha$, on a $\overline{\overline{A_\alpha^*}} = \mathfrak{m}$, chaque A_α étant répété dans la suite $\{A_\xi\}$, $\xi < \omega_\delta$, $\mathfrak{m}$ fois. Il est donc légitime de remplacer, dans le lemme 2, $\mathfrak{X}$ par P et A_x par A_α^*. Il en résulte qu'il existe une famille $\boldsymbol{F}$ de puissance $2^{\mathfrak{m}}$ de sous-ensembles de P tels que les conditions $X \in \boldsymbol{F}$, $Y \in \boldsymbol{F}$ et $X \neq Y$ entraînent $\overline{\overline{A_\alpha^* \cdot X - Y}} = \mathfrak{m}$, quel que soit $\alpha < \omega_\delta$. Nous allons démontrer que cette dernière égalité entraîne $\overline{\overline{f_\alpha(X) - Y}} = \mathfrak{m}$ (ce qui terminera la démonstration).

Or, pour α fixe, soit $\{p_{\beta_\eta}\}$ où $\eta < \omega_\delta$ une suite d'éléments de $A_\alpha^* \cdot X - Y$. Admettons, d'ailleurs, que $\beta_\eta \geqslant \eta > \alpha$. Comme $p_{\beta_\eta} \in A_\alpha$, la fonction g_α est définie pour p_{β_η} et on a $g_\alpha(p_{\beta_\eta}) \in f_\alpha(X)$. Cette fonction étant biunivoque, l'ensemble des $g_\alpha(p_{\beta_\eta})$ pour η variable est de puissance $\mathfrak{m}$. Il reste ainsi à prouver que $g_\alpha(p_{\beta_\eta})$ n'appartient pas à Y.

Supposons le contraire. Comme $Y \subset P$, il existe alors un $\zeta < \omega_\delta$ tel que $g_\alpha(p_{\beta_\eta}) = p_\zeta$. En outre, $\zeta \neq \beta_\eta$ puisque, par hypothèse, $p_{\beta_\eta} \in P - Y$ et $p_\zeta \in Y$.

On a donc deux cas à considérer:

1) $\beta_\eta < \zeta$, d'où $\alpha < \zeta$. Or les conditions:

$$p_\zeta = g_\alpha(p_{\beta_\eta}), \quad \beta_\eta < \zeta \quad \text{et} \quad \alpha < \zeta$$

sont incompatibles selon 2⁰.

2) $\zeta < \beta_\eta$. Les conditions suivantes sont incompatibles selon 3⁰:

$$g_\alpha(p_{\beta_\eta}) = p_\zeta, \quad \zeta < \beta_\eta \quad \text{et} \quad \alpha < \beta_\eta.$$

On aboutit ainsi à une contradiction dans les deux cas.

Le théorème établi, nous en déduirons le th. A sous une forme un peu précisée:

A'. *Il existe sur la ligne droite (ou plus généralement: dans tout espace complet, séparable et indénombrable) une famille $\boldsymbol{F}$ composée de $2^{\mathfrak{c}}$ ensembles telle que les conditions $X \in \boldsymbol{F}$, $Y \in \boldsymbol{F}$ et $X \neq Y$ entraînent $\overline{\overline{f(X)-Y}} = \mathfrak{c}$, quelle que soit la fonction continue f, définie sur X et admettant une infinité de puissance $\mathfrak{c}$ de valeurs.*

Il suffit, en effet, de substituer à Φ la famille de toutes les fonctions continues, définies sur des G_δ et admettant $\mathfrak{c}$ valeurs.

La même famille F satisfait aussi à A. Car la condition $\overline{\overline{f(X)-Y}}=\mathfrak{c}$ implique que $\overline{\overline{X}}=\mathfrak{c}$; en conséquence, aucun ensemble-élément de la famille F ne se laisse transformer en un autre par une fonction dont l'ensemble des valeurs ait la puissance $<\mathfrak{c}$.

Le th. B résulte évidemment de A'. Il se déduit aussi du théorème p. 36 en substituant à Φ la famille de toutes les homéomorphies définies sur des G_δ indénombrables (en vertu du théorème de M. Lavrentieff [7]), d'après lequel chaque homéomorphie se laisse étendre sur un ensemble G_δ).

[7]) C. R. Paris t. 178 (1924), p. 187. Cf. *Topologie* I, p. 214.

Les correspondances multivoques et l'axiome du choix.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

On dit qu'on a défini entre deux ensembles quelconques P et Q une correspondance bi-ν-voque (où ν est un nombre naturel) si l'on a défini une correspondance qui fait correspondre à tout élément p de P un ensemble $K(p)$ formé de ν éléments de Q, telle qu'il existe pour tout élément q de Q précisémment ν éléments p de P tels que $q \in K(p)$. En utilisant l'axiome du choix Dénes König a démontré [1]) que s'il existe une correspondance bi-ν-voque entre deux ensembles P et Q, il existe aussi une transformation biunivoque f telle qu'elle ne fait correspondre deux éléments que si ces éléments se correspondent par la correspondance bi-ν-voque donnée (c. à d. telle que $f(p) \in K(p)$ pour $p \in P$).

Dans le n° 1 de cette Note je prouverai que si l'on savait démontrer ce théorème de M. D. König pour $\nu=2$ sans faire appel à l'axiome du choix, on saurait démontrer sans l'aide de cet axiome l'existence d'un ensemble non mesurable au sens de Lebesgue. Je nommerai notamment une correspondance bi-2-voque entre deux ensembles bien définis d'ensembles linéaires et je démontrerai que si l'on savait nommer une correspondance biunivoque entre ces ensembles, on saurait nommer un ensemble linéaire non mesurable L.

Dans le n° 2 de cette Note je démontrerai le théorème de M. D. König pour $\nu=2$ en admettant l'axiome du choix pour les familles d'ensembles disjoints formés de deux éléments.

1. Divisons tous les nombres irrationnels en classes, en rangeant dans une même classe deux nombres dans ce et seulement dans ce cas, si leur différence est un nombre rationnel. Nous appellerons ces classes *classes* de Vitali. On obtient ainsi une décomposition de l'ensemble N de tous les nombres irrationnels en classes de Vitali disjointes. Si l'ensemble linéaire V est une classe de Vitali,

[1]) Fundamenta Mathematicae **8**, p. 114.