où Γ^{q+1}, γ^q et β^q sont des ε'-chaînes, β^q étant de plus situé dans B. $z^q_{\delta p^k}$ étant un δ-cycle mod p^k relativement à B, on a

$$z^q_{\delta p^k} = p^k \cdot \zeta^{q-1} + \eta^{q-1},$$

η^{q-1} étant situé dans B, donc

$$p\dot{\gamma}^q + \dot{\beta}^p = p^k \zeta^{q-1} + \eta^{q-1}.$$

On obtient en divisant par p:

$$\dot{\gamma}^q = p^{k-1}\zeta^{q-1} + \frac{1}{p}(\eta^{q-1} - \dot{\beta}^q),$$

donc γ^q est pour chaque ε' un ε'-cycle mod p^{k-1} relativement à B. Ce cycle n'est pas, relativement à B, $\underset{\varepsilon}{\sim} 0$ mod p^{k-1}, car s'il l'était, on aurait $z^q_{\delta p^k} = \dot{\Gamma}^{q+1} + p\gamma^q + \beta^q \underset{\varepsilon}{\sim}$ mod p^k relativement à B, ce qui contredit notre hypothèse. La formule (8) est donc démontrée, de même que la formule (7). La relation (5) est une conséquence immédiate de (6) et (7).

Le résultat définitif peut être formulé comme il suit:

Théorème. *La dimension modulaire de A par rapport à un entier m est égale au maximum de la dimension modulaire de A par rapport à tous les diviseurs premiers de m.*

Sur la dimension par rapport à la dominante.

Par

M. Bockstein (Moskwa).

L'article présent est consacré à l'analyse d'une notion qui se rattache de près à la notion de la dominante dimensionnelle d'un ensemble, introduite par M. P. Alexandroff dans son mémoire „*Dimensionstheorie*" [1]). Cette notion conduit naturellement à poser la définition suivante.

Définition. *Nous appelons dimension d'un sous-ensemble fermé A d'un espace euclidien par rapport à la dominante m,* $\dim_m A$ *(m étant un entier $\geqslant 2$), le plus grand nombre naturel q avec la propriété suivante: il existe un sous-ensemble fermé B de l'ensemble A (qui sera nommé sous-ensemble directeur) pour lequel il se trouve un nombre positif ε tel qu'à chaque nombre positif δ on peut faire correspondre un entier positif k tel qu'il y a dans A un δ-cycle q-dimensionnel module m^k relativement à B qui, relativement à B, n'est pas ε-homologue à zéro module m^k* [2]) (ce qui veut dire, si l'on emploie la terminologie de M. P. Alexandroff [3]), qu'il existe dans A un Potenzzyklus relatif q-dimensionnel avec la dominante m qui n'est pas homologue à zéro).

Le résultat fondamental de M. P. Alexandroff formulé dans le dernier alinéa du numéro 50 de sa „*Dimensionstheorie*" donne lieu à la proposition suivante:

Théorème 1. *La dimension ordinaire (au sens de Brouwer-Urysohn-Menger)* $\dim A$ *d'un ensemble fermé A est égale au maximum des dimensions de A par rapport à toutes les dominantes possibles,*

$$\dim A = \max_{m \geqslant 2} \dim_m A.$$

---

[1]) Math. Annalen **106** (1932), pp. 161-238 (cité plus tard „*Dimensionstheorie*"), n° 59, définition.

[2]) Pour les définitions de toutes ces notions voir mon article précédent „*Sur la dimension module m*" dans ce volume des Fundamenta Math.

[3]) *Dimensionstheorie*, n° 21.

Nous allons montrer en premier lieu que pour notre nouvelle notion on a le

Théorème 2. *Soit* $\dim_m A = q$, *avec le sous-ensemble directeur* B. *Il existe alors un* $\varepsilon_0 > 0$ *tel qu'on peut faire correspondre à tout* $\delta > 0$ *un nombre naturel* k_δ *tel que pour chaque* $k \geqslant k_\delta$ *il y ait dans* A *un* δ*-cycle* q*-dimensionnel module* m^k *relativement à* B *qui, relativement à* B, *ne soit pas* ε_0*-homologue à zéro module* m^k.

Démonstration. Soit ε un nombre positif tel qu'à tout $\delta > 0$ on peut faire correspondre un δ-cycle z_δ^q à q dimensions module m^{k_δ} relativement à B qui, relativement à B, n'est pas $\underset{\varepsilon}{\sim} 0$ [4]) module m^{k_δ}, k_δ étant un entier positif qui dépend de δ. Un tel ε existe en vertu de la définition de la dimension par rapport à la dominante m et du sous-ensemble directeur B.

z_δ^q étant des δ-cycles mod m^{k_δ} relativement à B, on a

$$z_\delta^q = m^{k_\delta} \cdot \zeta_\delta^{q-1} + \eta_\delta^{q-1},$$

η_δ^{q-1} étant situés dans B. Il en résulte pour tout $k \geqslant k_\delta$ que

$$m^{k-k_\delta} z_\delta^q = m^k \cdot \zeta_\delta^{q-1} + m^{k-k_\delta} \eta_\delta^{q-1},$$

donc pour $k \geqslant k_\delta$, $m^{k-k_\delta} z_\delta^q$ sont des δ-cycles module m^k relativement à B.

S'il existe un nombre positif ε_0 tel que, pour un ensemble de δ contenant des nombres positifs aussi petits que l'on veut, on a

$$m^{k-k_\delta} z_\delta^q \underset{\varepsilon_0}{\not\sim} 0 \qquad (\text{mod } m^k, \text{ rel. à } B),$$

le théorème est démontré.

Dans le cas contraire on peut faire correspondre à tout $\varepsilon' > 0$ un nombre positif δ, qui peut être toujours choisi inférieur à ε', et un nombre naturel k dépassant k_δ tels que l'on ait

$$m^{k-k_\delta} z_\delta^q \underset{\varepsilon'}{\sim} 0 \qquad (\text{mod } m^k, \text{ rel. à } B),$$

c'est-à-dire que

$$m^{k-k_\delta} z_\delta^q = \dot{\Gamma}^{q+1} + m^k \cdot \gamma^q + \beta^q,$$

β^q étant situé dans B et Γ^{q+1}, γ^q et β^q étant des ε'-chaînes dans A. Il s'ensuit:

$$\dot{\Gamma}^{q+1} + \beta^q = m^{k-k_\delta}(z_\delta^q - m^{k_\delta} \gamma^q),$$

[4]) Comme dans l'article précédent, $\underset{\varepsilon}{\sim}$ est le signe de ε-homologie, $\underset{\varepsilon}{\not\sim}$ le signe contraire.

et comme $\dot{\Gamma}^{q+1} + \beta^q$ est évidemment pour tout $\varepsilon' > 0$ un ε'-cycle intégral relativement à B, $\mathfrak{z}^q = z_\delta^q - m^{k_\delta}\gamma^q$ l'est aussi. Il est donc *a fortiori* un ε'-cycle module m^k relativement à B. Pour achever la démonstration il suffit de montrer que, relativement à B, $\mathfrak{z}^q$ n'est pas ε-homologue à zéro module m^k pour $k \geqslant k_\delta$, parce qu'alors on peut poser $\varepsilon_0 = \varepsilon$. Mais on voit qu'il n'est pas ε-homologue à zéro relativement à B même par rapport au module m^{k_δ} (donc *a fortiori* par rapport à m^k), car par rapport à ce module $\mathfrak{z}^q = z_\delta^q - m^{k_\delta}\gamma^q$ est congruent à $z_\delta^q \underset{\varepsilon}{\not\sim} 0$ (mod m^{k_δ}, rel. à B).

Remarque. Le théorème démontré permet de donner une autre définition de la dimension de A par rapport à la dominante m équivalente à la définition précédemment donnée, à savoir celle du plus grand nombre q pour lequel l'affirmation du théorème 2 a lieu [5]). C'est une conséquence immédiate de ce théorème et de la définition de $\dim_m A$.

Il est facile maintenant de démontrer les propositions suivantes:

Théorème 3. *On a pour tout* $s = 1, 2, \ldots$

$$\dim_{m^s} A = \dim_m A. \tag{1}$$

Démonstration. Soit $\dim_{m^s} A = q$. D'après la définition, il existe un sous-ensemble fermé B de A et un $\varepsilon > 0$ tels qu'à tout $\delta > 0$ on peut faire correspondre un entier $k > 0$ et un δ-cycle q-dimensionnel mod $(m^s)^k$, c'est-à-dire mod m^{sk}, relativement à B qui n'est pas $\underset{\varepsilon}{\sim} 0$ (mod m^{sk}, rel. à B). Mais comme m^{sk} est aussi la puissance du nombre m, la définition montre qu'on a $\dim_m A \geqslant q$, c'est-à-dire

$$\dim_m A \geqslant \dim_{m^s} A. \tag{2}$$

Soit maintenant $\dim_m A = q$. D'après le théorème 2, il existe donc un $B \subset A$ fermé (à savoir le sous-ensemble directeur) et un $\varepsilon_0 > 0$ tels qu'à chaque $\delta > 0$ on peut faire correspondre un nombre naturel k_δ tel que pour tout $k \geqslant k_\delta$, en particulier pour $k = k_\delta s$, il y a dans A un δ-cycle q-dimensionnel module m^k, dans notre cas mod $m^{k_\delta s}$, c'est-à-dire mod $(m^s)^{k_\delta}$, relativement à B qui n'est pas, relativement à B, ε_0-homologue à zéro mod m^k, dans notre

[5]) Cependant nous réservons le mot *définition* pour désigner la définition primitive de $\dim_m A$.

cas mod $(m^s)^{k_\delta}$. D'après la définition cela montre que l'on a $\dim_{m^s} A \geqslant g$, c'est-à-dire

$$\dim_{m^s} A \geqslant \dim_m A. \tag{3}$$

Les relations (2) et (3) impliquent la relation cherchée (1).

Théorème 4. *Soit $m = m_1 m_2$, les nombres m_1 et m_2 étant sans diviseurs communs. On a*

$$\dim_m A = \max(\dim_{m_1} A, \dim_{m_2} A). \tag{4}$$

Démonstration. Soit $\dim_{m_1} A = q_1$. D'après la définition il existe alors un $B \subset A$ fermé et un $\varepsilon > 0$ tels qu'on peut faire correspondre à tout $\delta > 0$ un δ-cycle $z_\delta^{q_1}$ à q_1 dimensions module m_1^k relativement à B qui, relativement à B, n'est pas ε-homologue à zéro mod m_1^k, k étant un nombre naturel qui dépend du choix de δ. Mais, comme nous l'avons montré dans la première moitié de la démonstration de la proposition 1^0 de notre article précédent[6]) (on n'a qu'à remplacer m_1 et m_2 respectivement par m_1^k et m_2^k), $m_2^k z_\delta^{q_1}$ sont alors (en vertu de $(m_1^k, m_2^k) = 1$) les δ-cycles q-dimensionnels module $m_1^k m_2^k = m^k$ relativement à B qui ne sont pas $\underset{\varepsilon}{\sim} 0$ (mod m^k, rel. à B). Selon la définition on a donc

$$\dim_m A \geqslant q_1 = \dim_{m_1} A \tag{5}$$

et, d'une façon analogue,

$$\dim_m A \geqslant \dim_{m_2} A. \tag{6}$$

Soit maintenant $\dim_m A = q$. Il existe alors, d'après la définition, un $B \subset A$ fermé et un $\varepsilon > 0$ tels qu'à tout $\delta > 0$ on peut faire correspondre un δ-cycle z_δ^q à q dimensions module m^k relativement à B qui n'est pas $\underset{\varepsilon}{\sim} 0$ (mod m^k, rel. à B), k étant un entier positif qui dépend du choix de δ. Comme nous l'avons montré dans la seconde moitié de la démonstration de la proposition 1^0 de l'article précédent[6]), z_δ^q est alors ou bien un δ-cycle module m_1^k relativement à B qui n'est pas $\underset{\varepsilon}{\sim} 0$ (mod m_1^k, rel. à B), ou bien un δ-cycle module m_2^k relativement à B qui n'est pas $\underset{\varepsilon}{\sim} 0$ (mod m_2^k, rel. à B). Une au moins de ces deux possibilités a lieu pour un ensemble de δ contenant des nombres positifs aussi petits que l'on veut, donc, en vertu de de la définition, on a

$$\max(\dim_{m_1} A, \dim_{m_2} A) \geqslant q = \dim_m A. \tag{7}$$

[6]) „*Sur la dimension module m*", ce volume.

Les inégalités obtenues (5), (6) et (7) impliquent la relation désirée (4), ce qui démontre le théorème.

Une conséquence immédiate des théorèmes 3 et 4 est la proposition suivante:

Théorème 5. *Le développement du nombre m en facteurs premiers étant*

$$m = p_1^{\xi_1} p_2^{\xi_2} \ldots p_n^{\xi_n},$$

on a

$$\dim_m A = \max(\dim_{p_1} A, \dim_{p_2} A, \ldots, \dim_{p_n} A).$$

Il s'ensuit qu'on peut se borner dans toutes les questions à ne considérer que la dimension par rapport à des dominantes premières, la dimension par rapport aux autres dominantes étant calculable au moyen de celle-ci.

Rapproché du théorème 5, le théorème 1 donne:

Théorème 6. *La dimension ordinaire (au sens de Brouwer-Urysohn-Menger)* dim A *d'un ensemble fermé A est égale au maximum des dimensions de A par rapport à toutes les dominantes premières,*

$$\dim A = \max_p \dim_p A$$

(p parcourt l'ensemble des nombres premiers).