Sur la dimension module m.

Par

M. Bockstein (Moskwa).

Soit A un ensemble fermé d'un espace euclidien E^n, ou, plus généralement, un espace métrique compact, et soit m un entier $\geqslant 2$. On appelle *dimension homologique de A module m*, $\Delta_m A$, le plus grand nombre entier q avec la propriété suivante: il existe un sous-ensemble fermé B de l'ensemble (de l'espace) A pour lequel on peut trouver un nombre positif ε tel que, quel que soit $\delta > 0$, il y a dans A un δ-cycle q-dimensionnel module m relativement à B qui, relativement à B, n'est pas ε-homologue à zéro mod m [1]).

Le but de cet article est de montrer que pour calculer la dimension homologique module m de A pour toutes les valeurs de m $(m \geqslant 2)$ il suffit de la connaître par rapport aux modules premiers.

1^0 *Soit* $m = m_1 m_2$, $(m_1, m_2) = 1$. *On a*

$$\Delta_m A = \max(\Delta_{m_1} A, \Delta_{m_2} A). \tag{1}$$

[1]) Cf. P. Alexandroff, *Dimensionstheorie*, Math. Ann. **106** (1932), pp. 161—238, n⁰ 50. Une chaîne à q dimensions (c'est-à-dire une combinaison linéaire de simplexes q-dimensionnels aux coefficients entiers) est dite située dans l'ensemble A si les sommets de tous ses simplexes appartiennent à A. Elle est appelée δ-chaîne si les diamètres de ses simplexes ne dépassent pas δ. Une δ-chaîne z^q à q dimensions est appelée δ-cycle module m relativement à B si l'on a pour la frontière $\dot z^q$ de z^q

$$\dot z^q = m\xi_\delta^{q-1} + \eta_\delta^{q-1},$$

ξ_δ^{q-1} et η_δ^{q-1} étant des δ-chaînes à $q-1$ dimensions, dont la seconde est située dans B.

z^q est dite ε-homologue à zéro module m relativement à B si l'on a

$$z^q = \dot\Gamma^{q+1} + m\gamma^q + \beta^q,$$

Γ^{q+1} étant une ε-chaîne et β^q étant situé dans B.

En effet, soit $\Delta_{m_1} A = q_1$, et soient B un sous-ensemble fermé de A, ε et δ deux nombres positifs et $z^{q_1}_{m_1}$ un δ-cycle à q_1 dimensions module m_1 relativement à B qui, relativement à B, n'est pas ε-homologue à zéro mod m_1. Alors $m_2 z^{q_1}_{m_1}$ est un δ-cycle à q dimensions module $m = m_1 m_2$ relativement à B. On a

$$m_2 z^{q_1}_{m_1} \underset{\varepsilon}{\not\sim} 0 \text{ [2])} \qquad \text{(rel. à } B \text{ mod } m),$$

car le contraire voudrait dire que

$$m_2 z^{q_1}_{m_1} = \dot\Gamma^{q_1+1} + m\gamma^{q_1} + \beta^{q_1},$$

Γ^{q_1+1} étant une ε-chaîne et β^{q_1} étant situé dans B; comme en vertu de $(m_1, m_2) = 1$ il existe des entiers λ et μ tels que

$$1 = \lambda m_1 + \mu m_2,$$

on aurait donc, en contradiction avec le choix de $z^{q_1}_{m_1}$,

$$z^{q_1}_{m_1} = \lambda m_1 z^{q_1}_{m_1} + \mu m_2 z^{q_1}_{m_1} = \mu \dot\Gamma^{q_1}_{m_1} + m_1(\mu m_2 \gamma^{q_1} + \lambda z^{q_1}_{m_1}) + \mu\beta^{q_1} \underset{\varepsilon}{\sim} 0$$

(rel. à B mod m).

D'après la définition de la dimension homologique il en résulte que

$$\Delta_m A \geqslant q_1 = \Delta_{m_1} A. \tag{2}$$

On démontre de même que l'on a

$$\Delta_m A \geqslant \Delta_{m_2} A. \tag{3}$$

Soit, d'autre part, $\Delta_m A = q$ et soient $B \subset A$ un sous-ensemble fermé, ε et δ deux nombres positifs et z^q_m un δ-cycle q-dimensionnel module m relativement à B (donc, à plus forte raison, un δ-cycle mod m_1, et un δ-cycle mod m_2 relativement à B) qui, relativement à B, n'est pas ε-homologue à zéro mod m. On ne peut pas avoir en même temps

$$z^q_m \underset{\varepsilon}{\sim} 0 \qquad \text{(rel. à } B \text{ mod } m_1)$$

et

$$z^q_m \underset{\varepsilon}{\sim} 0 \qquad \text{(rel. à } B \text{ mod } m_2),$$

car s'il en était ainsi, on aurait

$$z^q_m = \dot\Gamma_1^{q+1} + m_1\gamma_1^q + \beta_1^q = \dot\Gamma_2^{q+1} + m_2\gamma_2^q + \beta_2^q,$$

[2]) $\underset{\varepsilon}{\sim}$ est le signe de ε-homologie, $\underset{\varepsilon}{\not\sim}$ le signe contraire.

Γ_1^{q+1} et Γ_2^{q+1} étant des ε-chaînes et β_1^q et β_2^q étant situés dans B, d'où

$$m_1 z_m^q = m_1\dot{\Gamma}_2^{q+1} + m\gamma_2^q + m_1\beta_2^q, \qquad m_2 z_m^q = m_2\dot{\Gamma}_1^{q+1}+m\gamma_1^q+m_2\beta_1^q;$$

comme $1=\lambda m_1+\mu m_2$, on aurait donc, en contradiction avec le choix de z_m^q:

$$z_m^q = \lambda m_1 z_m^q + \mu m_2 z_m^q = \lambda m_1 \dot{\Gamma}_2^{q+1} + \mu m_2 \dot{\Gamma}_1^{q+1} + m(\lambda\gamma_2^q+\mu\gamma_1^q) \underset{\varepsilon}{\sim} 0$$

(rel. à B mod m).

Le δ-cycle z_m^q à q dimensions module m relativement à B (qui l'est aussi, comme nous avons remarqué, mod m_1 et mod m_2) n'est donc pas, relativement à B, ε-homologue à zéro par rapport à un au moins des modules m_1 et m_2, c'est-à-dire

(4) $$\max(\Delta_{m_1}A, \Delta_{m_2}A) \geq q = \Delta_m A.$$

Les inégalités (2), (3) et (4) impliquent la relation désirée (1).

2° *Soit p un nombre premier. On a*

(5) $$\Delta_{p^k}A = \Delta_p A \qquad (k>1).$$

1) Supposons $\Delta_p A$ égal à q et montrons d'abord que l'on a

(6) $$\Delta_{p^k}A \geq q = \Delta_p A.$$

Soient B un sous-ensemble fermé de A et ε un nombre positif tel qu'à tout $\delta>0$ on peut faire correspondre un δ-cycle $z_{\delta p}^q$ à q dimensions module p relativement à B qui, relativement à B, n'est pas $\underset{\varepsilon}{\sim} 0$ mod p. Il suffit de montrer qu'il existe alors un $\varepsilon'>0$ tel que, pour chaque $\delta>0$, on peut trouver un δ-cycle $z_{\delta p^k}^q$, q-dimensionnel mod p^k relativement à B qui, relativement à B, n'est pas $\underset{\varepsilon'}{\sim} 0$ mod p^k.

$z_{\delta p}^q$ étant des δ-cycles mod p relativement à B, on a

$$\dot{z}^{p}_{\delta q} = p\cdot\zeta_\delta^{q-1}+\eta_\delta^{q-1},$$

η_δ^{q-1} étant situés dans B. On a par conséquent

$$p^{k-1}\dot{z}_{\delta p}^q = p^k\zeta_\delta^{q-1}+p^{k-1}\eta_\delta^{q-1},$$

donc $p^{k-1}z_{\delta p}^q$ est un δ-cycle module p^k relativement à B. Si pour un $\varepsilon'>0$ et pour un ensemble de δ contenant des nombres aussi

petits que l'on veut il n'est pas, relativement à B, ε'-homologue à zéro module p^k, tout est démontré. Dans le cas contraire à tout $\varepsilon'>0$ on peut faire correspondre un $\delta'>0$, qui peut être toujours choisi inférieur à ε', tel que $\delta\leq\delta'$ entraîne [3])

$$p^{k-1}z_{\delta p}^q = \dot{\Gamma}^{q+1}+p^k\cdot\gamma^q+\beta^q,$$

β^q étant situé dans B, et Γ^{q+1}, γ^q et β^q étant des ε'-chaînes dans A, donc

$$\dot{\Gamma}^{q+1}+\beta^q = p^{k-1}(z_{\delta p}^q - p\gamma^q).$$

$\dot{\Gamma}^{q+1}+\beta^q$ étant évidemment pour tout $\varepsilon'>0$ un ε'-cycle intégral relativement à B, $\mathfrak{z}^q = z_{\delta p}^q - p\gamma^q$ l'est aussi, donc, à plus forte raison, c'est un ε'-cycle module p^k relativement à B. Il reste à montrer que, relativement à B, $\mathfrak{z}^q$ n'est pas ε-homologue à zéro module p^k. Mais c'est un fait évident, car on a

$$\mathfrak{z}^q = z_{\delta p}^q - p\gamma^q \equiv z_{\delta p}^q \underset{\varepsilon}{\not\sim} 0 \qquad (\text{mod } p, \text{ rel. à } B),$$

et a fortiori $\mathfrak{z}^q \underset{\varepsilon}{\not\sim} 0$ (rel. à B mod p^k).

2) Démontrons maintenant l'inégalité inverse:

(7) $$\Delta_p A \geq \Delta_{p^k}A \qquad (k>1).$$

Pour cela nous allons prouver que l'on a

(8) $$\Delta_{p^{k-1}}A \geq \Delta_{p^k}A.$$

Soit $B\subset A$ un sous-ensemble fermé et ε un nombre positif tel qu'à tout $\delta>0$ on peut faire correspondre un δ-cycle $z_{\delta p^k}^q$, q-dimensionnel module p^k relativement à B qui, relativement à B, n'est pas $\underset{\varepsilon}{\sim} 0$ mod p^k (q désigne ici la dimension $\Delta_{p^k}A$). $z_{\delta p^k}^q$ étant pour chaque δ relativement à B un δ-cycle module p^k, il l'est aussi par rapport au module p. S'il n'est pas, relativement à B, $\underset{\varepsilon'}{\sim} 0$ (mod p) pour un $\varepsilon'>0$ et un ensemble de δ contenant des nombres aussi petits que l'on veut, la relation (7) est démontrée, donc aussi la relation (8), qui d'après (6) en est une conséquence. Dans le cas contraire, on peut faire correspondre à tout $\varepsilon'>0$ un $\delta'>0$ ($\delta'<\varepsilon'$) tel que pour $\delta\leq\delta'$ [3])

$$z_{\delta p^k}^q = \dot{\Gamma}^{q+1}+p\gamma^q+\beta^q,$$

[3]) Si δ' est déjà pris inférieur à ε', il nous suffirait pour la suite de poser $\delta=\delta'$ (dans le cas général, on peut choisir pour δ un nombre positif $<\min(\varepsilon',\delta')$).

où Γ^{q+1}, γ^q et β^q sont des ε'-chaînes, β^q étant de plus situé dans B. $z^q_{\delta p^k}$ étant un δ-cycle mod p^k relativement à B, on a

$$z^q_{\delta p^k} = p^k \cdot \zeta^{q-1} + \eta^{q-1},$$

η^{q-1} étant situé dans B, donc

$$p\dot{\gamma}^q + \dot{\beta}^p = p^k \zeta^{q-1} + \eta^{q-1}.$$

On obtient en divisant par p:

$$\dot{\gamma}^q = p^{k-1}\zeta^{q-1} + \frac{1}{p}(\eta^{q-1} - \dot{\beta}^q),$$

donc γ^q est pour chaque ε' un ε'-cycle mod p^{k-1} relativement à B. Ce cycle n'est pas, relativement à B, $\underset{\varepsilon}{\sim} 0$ mod p^{k-1}, car s'il l'était, on aurait $z^q_{\delta p^k} = \dot{\Gamma}^{q+1} + p\gamma^q + \beta^q \underset{\varepsilon}{\sim}$ mod p^k relativement à B, ce qui contredit notre hypothèse. La formule (8) est donc démontrée, de même que la formule (7). La relation (5) est une conséquence immédiate de (6) et (7).

Le résultat définitif peut être formulé comme il suit:

Théorème. *La dimension modulaire de A par rapport à un entier m est égale au maximum de la dimension modulaire de A par rapport à tous les diviseurs premiers de m.*

Sur la dimension par rapport à la dominante.

Par

M. Bockstein (Moskwa).

L'article présent est consacré à l'analyse d'une notion qui se rattache de près à la notion de la dominante dimensionnelle d'un ensemble, introduite par M. P. Alexandroff dans son mémoire „*Dimensionstheorie*" [1]). Cette notion conduit naturellement à poser la définition suivante.

Définition. *Nous appelons dimension d'un sous-ensemble fermé A d'un espace euclidien par rapport à la dominante m*, $\dim_m A$ (*m étant un entier $\geqslant 2$*), *le plus grand nombre naturel q avec la propriété suivante: il existe un sous-ensemble fermé B de l'ensemble A (qui sera nommé sous-ensemble directeur) pour lequel il se trouve un nombre positif ε tel qu'à chaque nombre positif δ on peut faire correspondre un entier positif k tel qu'il y a dans A un δ-cycle q-dimensionnel module m^k relativement à B qui, relativement à B, n'est pas ε-homologue à zéro module m^k* [2]) (ce qui veut dire, si l'on emploie la terminologie de M. P. Alexandroff [3]), qu'il existe dans A un Potenzzyklus relatif q-dimensionnel avec la dominante m qui n'est pas homologue à zéro).

Le résultat fondamental de M. P. Alexandroff formulé dans le dernier alinéa du numéro 50 de sa „*Dimensionstheorie*" donne lieu à la proposition suivante:

Théorème 1. *La dimension ordinaire (au sens de Brouwer-Urysohn-Menger)* $\dim A$ *d'un ensemble fermé A est égale au maximum des dimensions de A par rapport à toutes les dominantes possibles*,

$$\dim A = \max_{m \geqslant 2} \dim_m A.$$

---

[1]) Math. Annalen **106** (1932), pp. 161-238 (cité plus tard „*Dimensionstheorie*"), n⁰ 59, définition.

[2]) Pour les définitions de toutes ces notions voir mon article précédent „*Sur la dimension module m*" dans ce volume des Fundamenta Math.

[3]) *Dimensionstheorie*, n⁰ 21.