$\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{n}+1$) $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}+1$, d'où il résulte, comme on sait, sans l'aide de l'axiome du choix que $\mathfrak{n} \geqslant \aleph_0$, contrairement à la définition du nombre $\mathfrak{n}$.

Le nombre $\mathfrak{p}_1$ est donc fini. Or, d'après (6), vu que le nombre $\mathfrak{n}_2$ est fini, nous trouvons $\mathfrak{p}_2=\aleph_0$. Comme $\mathfrak{p}_1$ est fini, nous concluons donc d'après (8) que $\mathfrak{p}=\aleph_0$, c. q. f. d.

On a donc la formule (2), c. à d. (d) est vrai pour $\mathfrak{m}=\mathfrak{n}$. Si la proposition P est vraie, il en résulte (sans appel à l'axiome du choix) que (a) est vrai pour $\mathfrak{m}=\mathfrak{n}$, c. à d. que $\mathfrak{n}$ est un aleph, donc $\mathfrak{n} \geqslant \aleph_0$, contrairement à la définition de $\mathfrak{n}$.

Il n'existe donc aucun nombre cardinal non-fini qui n'est pas $\geqslant \aleph_0$. Notre assertion est ainsi démontrée.

Il est à remarquer qu'on peut démontrer sans faire appel à l'axiome du choix que la différence

$$[\mathfrak{m}+\aleph(\mathfrak{m})]-\aleph(\mathfrak{m}) \tag{9}$$

n'existe pour aucun nombre cardinal non-fini $\mathfrak{m}$.

En effet, soit $\mathfrak{m}$ un nombre cardinal non-fini. On a évidemment

$$\mathfrak{m}+\aleph(\mathfrak{m})=\aleph(\mathfrak{m})+\mathfrak{m}$$

et

$$\mathfrak{m}+\aleph(\mathfrak{m})=\aleph(\mathfrak{m})+[\aleph(\mathfrak{m})+\mathfrak{m}]$$

(puisque $\aleph(\mathfrak{m})+\aleph(\mathfrak{m})=\aleph(\mathfrak{m})$). Donc, si la différence (9) existe, on a

$$\mathfrak{m}=\aleph(\mathfrak{m})+\mathfrak{m},$$

d'où $\aleph(\mathfrak{m}) \leqslant \mathfrak{m}$, contrairement à la définition du nombre $\aleph(\mathfrak{m})$. La différence (9) ne peut donc exister.

Sur un ensemble plan qui se décompose en $2^{\aleph_0}$ ensembles disjoints superposables avec lui.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

A. Lindenbaum a annoncé en 1926 qu'il sait démontrer à l'aide de l'axiome du choix la proposition suivante:

Il existe pour tout $\mathfrak{m} \leqslant 2^{\aleph_0}$ *un ensemble plan qui se décompose en* $\mathfrak{m}$ *parties disjointes superposables avec lui* [1]).

La démonstration de A. Lindenbaum n'a pas été publiée et elle m'est inconnue. Le but de cette Note est de démontrer la proposition de A. Lindenbaum *sans faire appel a l'axiome du choix et d'une façon effective*. Je vais démontrer, en effet ce

Théorème. *E étant un ensemble quelconque de nombres réels de l'intervalle $0 \leqslant t < 1$ tel que $0 \in E$, on sait nommer un ensemble plan P et une famille F de la même puissance que E de sous-ensembles de P deux à deux disjoints, dont l'ensemble-somme est P et dont chacun est superposable avec P.*

Démonstration. Posons pour $t>0$:

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty} 2^{2^{\mathrm{E}nt-2^{n^2}}},$$

où $\mathrm{E}x$ désigne le plus grand entier ne dépassant pas x.

La fonction $f(t)$ est croissante pour $t>0$ [2]). Soit N l'ensemble de toutes les valeurs de $f(t)$ pour $t>0$. M. von Neumann a démontré [3]) que toute suite finie de nombres de N est un système de nombres algébriquement indépendants (c. à d. que $a_1, a_2, \dots, a_n$ étant

---

[1]) A. Lindenbaum et A. Tarski: *Communication sur les recherches de la Théorie des Ensembles*, Comptes rendus Soc. Sc. et Lettres Varsovie **19** (1926), p. 327, th. **3***.

[2]) Voir S. Ruziewicz et W. Sierpiński, Fund. Math. **19** (1932), p. 17.

[3]) Math. Ann. **99**, p. 134-141.

des nombres de N, deux à deux distincts, l'égalité $F(a_1, a_2, \dots, a_n)=0$, où $F(t_1, t_2, \dots, t_n)$ est un polynôme en t_i $(i=1,2,\dots,n)$ aux coefficients rationnels, a lieu seulement dans le cas où tous les coefficients sont nuls).

Posons pour x réels:

$$\varphi(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}+\frac{2x}{1+x^2}i; \tag{1}$$

ce sont, comme on voit sans peine, des nombres complexes tels que

$$|\varphi(x)|=1 \quad \text{pour } x \text{ réels.} \tag{2}$$

Soit M l'ensemble de tous les nombres $\varphi(x)$, où $x \in N$. Les nombres de N étant algébriquement indépendants, il en est de même des nombres de M et on a d'après (2):

$$|z|=1 \quad \text{pour} \quad z \in M. \tag{3}$$

Or, M est évidemment l'ensemble de tous les nombres $\varphi(f(t))$, où $t>0$. La fonction $f(t)$ étant croissante et positive pour $t>0$ et la fonction $(1-x^2)/(1+x^2)$ étant décroissante pour $x>0$, on conclut sans peine de (1) que la partie réelle de $\varphi(f(t))$ est décroissante pour $t>0$. Il en résulte que $\varphi(f(t)) \neq \varphi(f(t'))$ pour $0<t<t'$.

Posons $a_0=\varphi(f(1))$, $b_0=0$ et, pour $t \in E$, $t>0$:

$$a_t=\varphi(f(t+1)) \quad \text{et} \quad b_t=\varphi(f(t)).$$

Les nombres a_t et b_t où $t \in E$, $t>0$, de même que le nombre $a_0=\varphi(f(1))$, appartiennent donc à M et sont tous distincts et indépendants algébriquement.

Soit P le plus petit ensemble de nombres complexes z (points du plan) jouissant de deux propriétés suivantes:

(i) $0 \in P$,

(ii) si $z \in P$ et $t \in E$, on a $a_t z+b_t \in P$.

Soit pour chaque $t \in E$, $H(t)$ l'ensemble de tous les nombres complexes $a_t z+b_t$, où $z \in P$.

Alors l'ensemble P et la famille F de tous les ensembles $H(t)$ où $t \in E$ satisfont à la thèse du théorème.

En effet, on a d'abord $H(t).H(t')=0$ pour $t \in E$, $t' \in E$ et $t \neq t'$, car on conclut facilement de la définition de P que tout nombre de P est un polynôme en nombres de M à coefficients entiers, de sorte que l'existence d'un $u \in H(t)\cdot H(t')$, entraînerait celle de deux nombres de P, donc de deux polynômes W et W' en nombres de M, tels que $u=a_t W+b_t=a_{t'}W'+b_{t'}$; or, comme $t \neq t'$, l'un au moins des nombres t et t', soit t, n'est pas nul et, vu l'égalité $a_t W-a_{t'}W+b_t-b_{t'}=0$, le nombre $b_t \in M$ ne serait pas algébriquement indépendant des autres nombres de M.

Les ensembles $H(t)$ où $t \in E$ étant ainsi disjoints deux à deux, il est démontré que $\overline{F}=\overline{\overline{E}}$.

On a d'autre part $0=a_0\cdot 0+b_0 \in H(0)$ et il résulte des définitions des ensembles P et $H(t)$ qu'il existe pour tout nombre $z \in P$ un nombre $t \in E$ tel que $z \in H(t)$. L'ensemble P est donc somme de tous les ensembles de la famille F (puisqu'on a évidemment $H(t) \subset P$ pour $t \in E$). Posons pour $z \in P$ et $t \in E$:

$$\psi_t(z)=a_t z+b_t.$$

D'après la définition de $H(t)$ on a donc $H(t)=\psi_t(P)$. La transformation ψ_t de l'ensemble P est isométrique; soient en effet $z \in P$ et $z_1 \in P$; on aura donc $\psi_t(z)-\psi_t(z_1)=a_t(z-z_1)$, d'où

$$|\psi_t(z)-\psi_t(z_1)|=|z-z_1| \quad \text{pour} \quad z \in P \quad \text{et} \quad z_1 \in P, \tag{4}$$

puisque a_t a pour module 1 d'après (3), en tant qu'un nombre de M; l'égalité (4) prouve ainsi que la fonction ψ_t transforme l'ensemble P en l'ensemble superposable avec P.

Les ensembles P et $H(t)$ sont donc superposables pour $t \in E$ et le théorème se trouve ainsi démontré.

En particulier, pour $E=\{0, \frac{1}{2}\}$ ce théorème donne le résultat suivant, trouvé en 1914 par S. Mazurkiewicz et moi: *il existe un ensemble plan* (dénombrable) *superposable avec chacune de ses moitiés* [4]).

Pour $E=[0 \leqslant t<1]$ l'ensemble P est de puissance $2^{\aleph_0}$; il résulte donc du théorème qui vient d'être établi que l'on sait démontrer sans faire appel à l'axiome du choix la proposition suivante, établie en 1921 par S. Ruziewicz à l'aide de cet axiome: *il existe un ensemble plan indénombrable, superposable avec deux de ses sous-ensembles disjoints* [5]).

---

[4]) S. Mazurkiewicz et W. Sierpiński, C. R. Paris **158** (1914), p. 618. D'après A. Lindenbaum. Fund. Math. **8** (1926), p. 218, renvoi [1])) il n'existe aucun ensemble plan borné ou linéaire qui jouisse de cette propriété.

[5]) S. Ruziewicz, Fund. Math. **2** (1921), pp. 4-7.

En modifiant un peu notre démonstration, *on peut nommer aussi un ensemble plan indénombrable qui est somme de deux ensembles disjoints superposables avec lui*, ce qui résoût un problème posé par M. H. Steinhaus [6]).

Posons à ce but

$$u=\varphi(f(1)), \qquad M_1=M-\{u\},$$
$$\alpha^k(z)=u^k z, \qquad \beta^k(z)=z+k, \quad \text{pour } k \text{ entiers},$$
$$Q=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha^k(M_1).$$

Soit S le plus petit ensemble qui contient Q et tel que $z \in S$ entraîne $\alpha(z) \in S$ et $\beta(z) \in S$.

Posons $A=\alpha(S)$ et $B=\beta(S)$. L'ensemble S, en tant que contenant $Q \subset M_1$, est de puissance du continu. Or, on voit sans peine que $\alpha(Q)=Q$ et on en déduit que $S=A+B$. Comme $|u|=1$, $\alpha(z)$ et $\beta(z)$ sont des transformations isométriques; les ensembles A, B et S sont donc superposables. Reste à démontrer que $AB=0$.

Admettons qu'il existe un point $t \in AB$. Il existe donc deux points z_1 et z_2 de S tels que $t=\alpha(z_1)=\beta(z_2)$, donc

$$uz_1=z_2+1. \tag{5}$$

Or, la définition de l'ensemble S implique que tout point z de S est de la forme $W(u)\cdot u^k\zeta+W'(u)$ où ζ est un point de M_1, k un entier, $W(u)$ et $W'(u)$ étant des polynômes en u aux coefficients entiers non négatifs dont $W(u)$ ne s'annule pas identiquement. Il existe donc deux nombres ζ_1 et ζ_2 de M_1 (égaux ou non), deux entiers k_1 et k_2 et 4 polynômes en u aux coefficients entiers non négatifs: $W_1(u) \neq 0$, $W_2(u)$, $W_3(u)$ et $W_4(u)$, tels que

$$z_1=W_1(u)\cdot u^{k_1}\zeta_1+W_2(u), \qquad z_2=W_3(u)\cdot u^{k_2}\zeta_2+W_4(u),$$

d'où selon (5):

$$[W_1(u)\cdot u^{k_1}\zeta_1+W_2(u)]u=W_3(u)\cdot u^{k_2}\zeta_2+W_4(u)+1. \tag{6}$$

Mais le nombre u (en tant qu'un nombre de M distinct de ζ_1 et ζ_2, qui appartiennent à $M_1=M-\{u\}$) est algébriquement indépendant de ζ_1 et de ζ_2; de-même les nombres ζ_1 et ζ_2, en cas où ils sont distincts, sont algébriquement indépendants l'un de l'autre. L'égalité (6) implique donc une contradiction.

[6]) ibidem, p. 4.

$S=A+B$ est par conséquent une décomposition de l'ensemble plan S de puissance du continu en deux sous-ensembles disjoints superposables avec S.

Enfin, je vais démontrer qu'*un ensemble linéaire S (non vide) n'admet jamais deux sous-ensembles disjoints dont chacun soit superposable avec S.*

Supposons, en effet, que l'ensemble linéaire non vide S soit superposable avec chacun de ses sous-ensembles disjoints A et B. Soient φ et ψ respectivement les transformations isométriques de S en A et en B; on a donc $\varphi(S)=A$ et $\psi(S)=B$. Toute transformation isométrique de la droite en elle-même étant, comme on sait, de la forme $\pm x+c$, où c est une constante, on a 4 cas à distinguer:

1° $\varphi(x)=x+a$ et $\psi(x)=x+b$. On a alors $\psi\varphi(x)=x+a+b$ et $\varphi\psi(x)=x+b+a$, donc

$$\psi\varphi(x)=\varphi\psi(x). \tag{7}$$

Comme $S \neq 0$, il existe un élément $x_0 \in S$. Comme $\varphi(S)=A$ et $\psi(S)=B$, on a $\varphi(x_0) \in A \subset S$ et $\psi(x_0) \in B \subset S$, donc $\psi(\varphi(x_0)) \in B$ et $\varphi(\psi(x_0)) \in A$. Vu que $AB=0$, on trouve par conséquent $\psi\varphi(x_0) \neq \varphi\psi(x_0)$, contrairement à (7).

2° $\varphi(x)=x+a$ et $\psi(x)=-x+b$. On a alors $\varphi(x_0)=x_0+a$, $\psi\varphi(x_0)=-x_0-a+b$, donc $\varphi\psi\varphi(x_0)=-x_0+b \in A$ et $-x_0+b=\psi(x_0) \in B$, contrairement à $AB=0$.

3° $\varphi(x)=-x+a$ et $\psi(x)=x+b$. Ce cas se traîte comme le cas 2°.

4° $\varphi(x)=-x+a$ et $\psi(x)=-x+b$. On a alors $\varphi\varphi(x_0)=x_0$ et $\psi\psi(x_0)=x_0$, donc $x_0 \in A$ et $x_0 \in B$, contrairement à $AB=0$. L'impossibilité des isométries en question est ainsi démontrée.

Dans le même ordre d'idées, on peut aussi démontrer qu'il n'existe aucun ensemble plan S **borné** qui soit somme de deux sous-ensembles disjoints superposables avec lui, mais qu'il en existe un dans l'espace à 3 dimensions.