four determined by the fixed points of the two original rotations φ and ψ can indeed be perfectly distributed among the sets A, B, C.

Note that these four classes are distinct. For example, if $v\varphi = v$, then all transforms of v can be written uniquely in the form $v\beta$, where β does not start with φ. If $v\beta$ were fixed for ψ, then $v\beta\psi$ when simplified would give a new representation for the point $v\beta$. Thus no transform of a fixed point for φ is fixed for ψ. In a similar way, we see that the two fixed points for φ or for ψ are not transforms of each other.

For these four classes we proceed as follows. If v is one of the two fixed points for φ, write all points of the class in the form $v\beta$, where β is simplified and does not begin with φ. We then distribute the points $v\beta$ as follows:

Put v and $v\alpha\varphi$ in A, $v\alpha\psi$ in B, $v\alpha\psi^{-1}$ in C.

This is a perfect distribution, except that the point v is in A, and its transform by φ is also in A. If v is one of the two fixed points for ψ, write all points of the class in the form $v\beta$, where β is simplified and does not begin with $\psi^{\pm 1}$. We then distribute the points $v\beta$ as follows:

Put $v\alpha\varphi$ in A, $v\alpha\psi$ in B, $v\alpha\psi^{-1}$ in C, v in D.

This is a perfect distribution, except that the point $v\varphi$ is in A and its transform by φ is in D. The set D consists of the two fixed points of ψ.

If we denote by E the set consisting of the two fixed points of φ, then we see that we have a decomposition of S into four disjoint sets,

$$S = A + B + C + D,$$

such that

$$(A - E)\varphi = B + C + D, \quad (B + C + D)\varphi = A - E, \quad E\varphi = E,$$
$$A\psi = B, \quad B\psi = C, \quad C\psi = A, \quad D\psi = D.$$

Thus we have divided S into three congruent parts, with only two points left over, in such a way that one piece A, omitting two points, is congruent to the complement of A. In a similar way, each of the sets B and C, with a pair of points omitted, is congruent to its complementary set, the rotations involved being $\psi^{-1}\varphi\psi$ and $\psi\varphi\psi^{-1}$.

University of California and Princeton University.

Sur l'application de la notion d'homotopie au problème du nombre algébrique des points invariants[1]).

Par

Casimir Kuratowski (Warszawa).

1. Soit E un ensemble fermé et borné situé sur le plan euclidien $\mathcal{E}^2$. Soit f une transformation continue de E en un sous-ensemble $f(E) \subset E$. Désignons par F et I la frontière et l'intérieur de E:

$$(0) \qquad F = E \cdot \overline{\mathcal{E}^2 - E} \quad \text{et} \quad I = E - \overline{\mathcal{E}^2 - E}.$$

Nous supposons dans tout ce qui va suivre que *la fonction f n'admet aucun point invariant sur la frontière F de E*, c. à d. que

$$(1) \qquad f(x) \neq x \quad \text{quel que soit} \quad x \in F;$$

ou encore: en désignant par Z l'ensemble des points invariants de la fonction f, on a $Z \subset I$.

Dans le cas où la fonction f est *holomorphe* à l'intérieur I de E et où $p \in Z$, c. à d. où p est un zéro de la fonction

$$(2) \qquad f^*(x) = f(x) - x,$$

il est naturel de nommer *ordre du point invariant* p l'ordre du point p considéré comme zéro de la fonction f^*.

Cette notion se prête à une extension au cas où f est continue (holomorphe ou non) et où p est un point invariant *isolé* (appartenant à I)[2]). On se sert à ce but de la notion d'*indice*, qui est défini comme suit[3]).

---

[1]) Présenté à la Soc. Polon. de Math., Section de Wrocław, le 7. VI. 1946.

[2]) Voir Alexandroff-Hopf, *Topologie I*, Berlin, Springer 1935, Chap. XIV, § 2, où le cas plus général de l'espace $\mathcal{E}^n$ à n dimensions est considéré.

[3]) Voir, par exemple, mon ouvrage *Théorèmes sur l'homotopie des fonctions conitinues de variable complexe et leurs rapports à la Théorie des fonctions analytiques*, Fund. Math. **33** (1945), p. 320 et 351.

D'après un théorème bien connu, si le continu C situé sur le plan admet une représentation paramétrique continue $x=g(t)$, où $0\leqslant t\leqslant 1$, et si le point p est situé en dehors de C, il existe une fonction continue $u(t)$ à valeurs complexes telle que

$$g(t)-p=e^{u(t)}.$$

En supposant que $g(0)=g(1)$, on a donc $u(1)-u(0)=2k\pi i$. L'entier k, qui est indépendant de la façon dont on a choisi la fonction u, est nommé l'indice du point p relatif au „parcours" g du continu C; en symboles

$$k=\mathrm{ind}_g\, p.$$

Dans la suite nous allons nous borner au cas où C est une courbe simple fermée et où pour chaque couple $t\neq t'$ autre que 0,1 on a $g(t)\neq g(t')$. Nous allons distinguer, comme d'habitude, les parcours positifs et négatifs.

Dans le cas de fonction holomorphe la notion d'indice est étroitement liée à celle de l'ordre d'un zéro de cette fonction: p étant un zéro de la fonction h holomorphe (et non identiquement égale à 0), on entoure ce point d'un cercle D suffisamment petit pour ne contenir aucun autre zéro de la fonction h; en conférant à la circonférence C de ce cercle un parcours positif, le point p est — comme on prouve[4]) — un zéro d'ordre $\mathrm{ind}_{hg}\, 0$ de la fonction h (où hg désigne la fonction superposée $h[g(t)]$).

Il est donc naturel de nommer — dans le cas envisagé (où f est une fonction continue arbitraire) — ordre du point invariant p l'indice $\mathrm{ind}_{f^*g}\, 0$, où g est un parcours positif du contour C d'un cercle (ouvert) D assujetti aux conditions suivantes: $p\in D$, $D\subset I$ et $p=DZ$. Comme on prouve, cet indice ne dépend pas du choix du cercle D et de la fonction g.

Admettons que tous les points invariants appartiennent à I et soient isolés. L'ensemble Z est donc fini: $Z=(p_1, p_2, \dots, p_n)$. Pour calculer le nombre algébrique des points invariants, nombre que nous désignons ν_f, on procède comme suit. On entoure chaque p_k d'un cercle D_k de façon que

$$(3)\qquad \bar{D}_k\subset I \quad \text{et} \quad \bar{D}_k\cdot\bar{D}_{k'}=0 \qquad \text{pour } k\neq k',$$

on confère au contour C_k de D_k un parcours positif g_k et on pose

$$(4)\qquad \nu_f=\mathrm{ind}_{f^*g_1}\, 0+\dots+\mathrm{ind}_{f^*g_n}\, 0.$$

[4]) Cf. ibid. p. 349, th. 2 et p. 355 (1) (ainsi que p. 343 (3)).

Envisageons à présent le cas particulier où l'ensemble E est un *continu élémentaire*, c. à d. un continu tel que

$$(5)\qquad E=\bar{R}_0-(R_1+\dots+R_m),$$

où $R_0, \dots, R_m$ sont des disques (régions bornées ayant une courbe simple fermée pour frontière) satisfaisant aux conditions:

$$(6)\qquad \bar{R}_j\subset R_0 \quad \text{et} \quad \bar{R}_j\cdot\bar{R}_{j'}=0 \qquad \text{pour } 0<j<j'.$$

En conférant un parcours positif h_0 à la frontière K_0 de R_0 et un parcours négatif h_j à la frontière K_j de R_j $(j>0)$, on appelle *caractéristique de Kronecker* de la fonction f^* (relativement au continu E) la somme

$$(7)\qquad \mathrm{car}_E\, f^*=\mathrm{ind}_{f^*h_0}\, 0+\dots+\mathrm{ind}_{f^*h_m}\, 0.$$

D'après un théorème général [5]), si une fonction à valeurs complexes définie sur E ne s'annule en aucun point, sa caractéristique s'annule. De là nous déduirons que *si la fonction continue f satisfait à la condition* (1) *et si l'ensemble Z des points invariants est fini, on a*

$$(8)\qquad \nu_f=\mathrm{car}_E\, f^*.$$

En effet, $D_1, \dots, D_n$ ayant le même sens que dans (3), la fonction f n'admet aucun point invariant sur le continu élémentaire H défini par l'égalité $H=E-(D_1+\dots+D_n)$, c. à d. que la fonction $f^*(x)=f(x)-x$ ne s'annule en aucun point de H. Par conséquent

$$(9)\qquad \mathrm{car}_H\, f^*=0.$$

Or, on a par définition de caractéristique (rappelons que les parcours $g_1, \dots, g_n$ sont positifs)

$$\mathrm{car}_H\, f^*=\mathrm{ind}_{f^*h_0}\, 0+\dots+\mathrm{ind}_{f^*h_m}\, 0-(\mathrm{ind}_{f^*g_1}\, 0+\dots+\mathrm{ind}_{f^*g_n}\, 0).$$

La formule (8) en résulte en vertu de (4), (7) et (9).

La formule (8) a été établie, bien entendu, dans l'hypothèse que l'ensemble Z est fini. Sans cette hypothèse, le terme „nombre algébrique des points invariants" n'est pas défini. Or, nous admettons l'égalité (8) comme *définition* du coefficient ν_f (que l'ensemble des points invariants soit fini ou infini).

[5]) Cf. ibid. p. 358 et Alexandroff-Hopf, op. cit. pp. 467 et 470.

D'une façon plus générale encore, le coefficient ν_f se laisse définir dans le cas où E est un sous-ensemble fermé et borné arbitraire du plan. On pose alors

(10) $$\nu_f = \mu_I f^*,$$

le coefficient $\mu_I f^*$, nommé *multiplicité de l'ensemble I par rapport à la fonction f^**, étant défini comme suit [6]).

D'après un théorème général [7]), on peut faire correspondre à la fonction f^* deux fonctions: une fonction rationnelle $r(x)$ et une fonction continue $u(x)$ assujetties à la condition

(11) $$f^*(x) = e^{u(x)} \cdot r(x) \qquad \text{pour } x \in F.$$

Le coefficient $\mu_I f^*$ est égal par définition au nombre algébrique des zéros et pôles de la fonction r situés dans I (c. à d. au nombre des zéros et pôles, chacun compté avec sa multiplicité). Ce nombre est, comme on prouve [8]), indépendant du choix des fonctions r et u satisfaisant à (11).

Dans le cas particulier où E est un continu élémentaire, cette définition est d'accord avec la précédente. On démontre en effet que dans ce cas: $\mu_I f^* = \operatorname{car}_E f$; de sorte que l'égalité (10) équivaut à (8).

D'autre part, si l'on ne fait aucune restriction sur E, mais l'on demande que l'ensemble Z soit fini, $\mu_I f^*$ coïncide avec le nombre algébrique des points invariants donné par la formule (4).

En résumé: *le coefficient ν_f, qui présente une extension de la notion du nombre algébrique des points invariants de la transformation f de E en $f(E) \subset E$, est défini par la formule* (10) *pour chaque fonction continue assujettie à la condition* (1).

---

[6]) Ibid. p. 341, IX.

[7]) Voir ibid. p. 332, théorème 4. D'après ce théorème: étant donné sur le plan euclidien (augmenté du point à l'infini) un ensemble fermé arbitraire F, on a une relation de la forme (11), quelle que soit la fonction continue f^*, à valeurs complexes $\neq 0$ et définie sur F.

[8]) Ibid. p. 333, th. 5. Il est à remarquer que la multiplicité d'un pôle est négative par définition.

La définition précitée du coefficient $\mu_I f^*$ est valable en admettant d'une façon générale que F et f^* satisfont aux conditions formulées dans le renvoi précédent et que I est un ensemble (ouvert) arbitraire formé par la réunion d'un nombre fini ou dénombrable de composantes du complémentaire de F.

Remarque. Dans le cas où E est un polytope, la fonction f peut être approchée par une suite uniformément convergente de fonctions f_n telles que $f_n(E) \subset E$ et que l'ensemble Z_n de points invariants de la fonction f_n est fini [9]). Ce fait permet de réduire l'étude du coefficient ν_f au cas de fonction à nombre fini de points invariants. On a en effet le théorème suivant (valable pour tout ensemble E fermé et borné):

La fonction f étant supposée limite d'une suite uniformément convergente de fonctions f_n telles que $f_n(E) \subset E$, on a $\nu_f = \lim\limits_{n=\infty} \nu_{f_n}$.

Autrement dit: *on a $\nu_f = \nu_{f_n}$ pour n suffisamment grand.*

Posons, en effet, $f_n^*(x) = f_n(x) - x$. Donc $|f_n^*(x) - f^*(x)| = |f_n(x) - f(x)|$. La suite f_n^* est donc uniformément convergente vers f^*. Cela implique [10]) que $\mu_I f^* = \lim\limits_{n=\infty} \mu_I f_n^*$, d'où la conclusion demandée (selon (10)).

2. E étant un polyèdre, le nombre ν_f peut être calculé en considérant la trace de l'autohomomorphie du premier groupe de Betti induite par la fonction f [11]). Nous allons établir dans cette note un théorème analogue où le groupe $\mathfrak{B}(E)$, déduit de la notion d'homotopie, remplace le groupe de Betti basé sur la notion d'homologie. Ce théorème sera applicable aux continus qui sont des rétractes absolus de voisinage. La méthode de sa démonstration ne va pas utiliser les notions d'homologie; elle se rattache directement à celle de mon mémoire cité de Fund. Math. 33.

Rappelons d'abord la définition du groupe $\mathfrak{B}(E)$.

La famille $\mathfrak{P}^E$ de toutes les fonctions continues définies sur E et dont les valeurs appartiennent à l'ensemble $\mathfrak{P}$ = le plan $\mathcal{E}^2$ privé du point 0, peut être conçue comme un groupe abelien en convenant que l'égalité $g_3 = g_1 g_2$ veut dire que l'on a $g_3(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$ pour chaque $x \in E$. La famille $F(E)$ de toutes les fonctions-éléments de $\mathfrak{P}^E$ qui admettent une branche continue univoque du logarithme (c. à d. fonctions de la forme $g(x) = e^{u(x)}$ où $u(x)$ est une fonction

---

[9]) Voir Alexandroff-Hopf, op. cit. p. 542, th. II.

[10]) Voir mon ouvrage cité, p. 342, th. 6.

[11]) Cf. Alexandroff-Hopf, op. cit., chap. XIV, § 3. Voir aussi S. Lefschetz, Trans. Amer. Math. Soc. **28** (1926), p. 1.

continue) est évidemment un sous-groupe du groupe $\mathcal{P}^E$. Par définition, $\mathfrak{B}(E)$ est le groupe-facteur $\mathcal{P}^E/\Gamma(E)$ [12]).

Toute transformation continue f de E en un sous-ensemble $f(E)$ de E détermine une autohomomorphie du groupe $\mathcal{P}^E$ ainsi que du groupe $\mathfrak{B}(E)$. A savoir, à l'élément g de $\mathcal{P}^E$ vient correspondre la fonction superposée gf, qui est également un élément du groupe $\mathcal{P}^E$. A l'élément X de $\mathfrak{B}(E)$ qui contient g vient correspondre l'élément $F(X)$ de $\mathfrak{B}(E)$ qui contient gf.

Admettons à présent que l'ensemble E décompose le plan en un nombre *fini* $m+1$ de composantes. Soit $p_1,\dots,p_m$ un système de points extraits de différentes composantes bornées de $\mathcal{E}^2-E$ $(m\geqslant 0)$. D'après un théorème général [13]), chaque fonction $g\in\mathcal{P}^E$ se laisse représenter sous la forme

$$(12)\qquad g(x)=e^{u(x)}(x-p_1)^{k_1}\dots(x-p_m)^{k_m}$$

où $k_1,\dots,k_m$ sont des entiers (déterminés d'une façon univoque) et $u(x)$ est une fonction continue.

Par suite: $H_1,\dots,H_m$ désignant les éléments du groupe $\mathfrak{B}(E)$ qui contiennent respectivement les translations $x-p_1,\dots,x-p_m$, le groupe $\mathfrak{B}(E)$ est isomorphe au groupe $\mathcal{G}^m$ des points entiers de l'espace cartésien $\mathcal{E}^m$ (avec l'addition comme l'opération du groupe) et les éléments $H_1,\dots,H_m$ en constituent les générateurs. Plus précisément, l'isomorphie entre le groupe $\mathfrak{B}(E)$ et $\mathcal{G}^m$ s'obtient en faisant correspondre à g le système de coefficients $(k_1,\dots,k_m)$ donné par la formule (12).

En écrivant $g\sim h \bmod \Gamma(E)$, ou — tout court — $g\sim h$, pour exprimer que la fonction $g:h$ appartient à $\Gamma(E)$ (c. à d. qu'elle est de la forme $e^{u(x)}$), la formule (12) s'énonce d'une façon plus brève:

$$(13)\qquad g(x)\sim(x-p_1)^{k_1}\dots(x-p_m)^{k_m}.$$

L'hypothèse faite au début que $f(x)\in E$ pour chaque x, implique que la fonction $f(x)-p_j$ ne s'annule pas. On a donc pour chaque $j\leqslant n$

$$(14)\qquad f(x)-p_j\sim(x-p_1)^{k_{j1}}\dots(x-p_m)^{k_{jm}}\qquad \text{pour } x\in E.$$

[12]) Pour la définition de ce groupe et son rapport au premier groupe de Betti, cf. S. Eilenberg, *Transformations continues en circonférence et la topologie du plan*, Fund. Math. **26** (1936), p. 89, N. Bruschlinsky, *Stetige Abbildungen und Bettische Gruppen der Dimensionszahlen 1 und 3*, Math. Ann. **109** (1934), pp. 525-537, ainsi que mon ouvrage cité, p. 317.

[13]) Voir mon ouvrage cité, p. 332, th. 4.

En tenant compte du fait, que la condition $g\sim h$ implique $gf\sim hf$ et que la condition $g_1\sim g_2\cdot g_3$ entraîne $g_1f\sim g_2f\cdot g_3f$, la fonction F fait correspondre à l'élément $X\in\mathfrak{B}(E)$ qui contient g l'élément $F(X)\in\mathfrak{B}(E)$ qui contient gf, est une homomorphie.

Envisageons les éléments $F(H_1),\dots,F(H_m)$ du groupe $\mathfrak{B}(E)$. Ils contiennent donc respectivement les fonctions:

$$f(x)-p_1,\dots,f(x)-p_m.$$

La trace de l'autohomomorphie F est donc, par définition de trace [14]) et selon (14):

$$(15)\qquad \sigma_f=k_{11}+\dots+k_{mm}.$$

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant:

Théorème. *Le sous-continu E de $\mathcal{E}^2$ étant supposé un rétracte absolu de voisinage et la fonction continue f qui transforme E en un sous-ensemble $f(E)$ de E étant assujettie à la condition* (1), *le nombre algébrique ν_f des points invariants de cette fonction satisfait à la formule*

$$(16)\qquad \nu_f=1-\sigma_f\ [15]).$$

En d'autres termes (cf. (10)):

$$(17)\qquad \mu_I f^*=1-\sigma_f.$$

3. Avant de passer à la démonstration du théorème, rappelons [16]) que g_0 et g_1 étant deux éléments de l'espace fonctionnel $\mathcal{P}^X$ (où X est un espace arbitraire), la relation $g_0\sim g_1$ équivaut à l'homo-

[14]) Voir p. ex. Alexandroff-Hopf, op. cit. p. 568. Etant donnés: un groupe G isomorphe au groupe $\mathcal{G}^m$ (des points entiers de l'espace cartésien $\mathcal{E}^m$), une base $a_1,\dots,a_m$ de ce groupe et une homomorphie f du groupe G en un sous-groupe, on nomme *trace* de cette homomorphie le nombre

$$k_{11}+\dots+k_{mm}\quad\text{où}\quad f(a_j)=a_1^{k_{j1}}\cdot\ldots\cdot a_m^{k_{jm}},\quad\text{pour}\quad j=1,\dots,m.$$

[15]) Cf. S. Lefschetz, *Topology*, New York 1930, p. 358.

Un espace Y est dit un *rétracte absolu de voisinage*, si quel que soit l'espace (métrique séparable) X, chaque fonction continue f définie sur un sous-ensemble fermé F de X et telle que $f(F)\subset Y$ admet une extension continue g sur un entourage G de F et telle que $g(G)\subset Y$. Cette notion est due à M. Borsuk; voir *Ueber eine Klasse lokal zusammenhängenden Räumen*, Fund. Math. **19** (1932), p. 222.

[16]) Voir mon ouvrage cité, p. 327, th. 2. Sous une forme légèrement différente, ce théorème important a été formulé pour la première fois par M. Eilenberg dans sa note précitée, p. 68, th. 1.

topie des fonctions g_0 et g_1 (dans l'espace $\mathcal{P}^X$), c. à d. à l'existence d'une fonction continue $h(x,t)$, où $x \in X$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$, satisfaisant aux conditions suivantes:

(18) $h(x,0)=g_0(x)$, $h(x,1)=g_1(x)$ et $h(x,t) \neq 0$ pour chaque x et t.

Lemme. *Donnons-nous, sur le plan $\mathcal{E}^2$, une courbe simple fermée C et une transformation continue f de C en $f(C) \subset \mathcal{E}^2$ sans point invariant. Soient D la région bornée déterminée dans le plan par C et p un point de D. On a les deux implications suivantes:*

1º si $f(C) \subset \overline{D}$, on a $f(x)-x \sim p-x$;

2º si $D \cdot f(C)=0$, on a $f(x)-x \sim f(x)-p$.

Envisageons d'abord le cas particulier où D désigne le cercle ouvert D_0 de centre $p=0$ et de rayon 1.

Dans le cas 1º posons $h(x,t)=t \cdot f(x)-x$. Il vient

$$h(x,0)=-x \quad \text{et} \quad h(x,1)=f(x)-x.$$

De plus $h(x,t) \neq 0$. Car en supposant le contraire, on aurait $t \cdot f(x)=x$, d'où $t \cdot |f(x)|=|x|=1$ et comme par hypothèse $|f(x)| \leqslant 1$, il vient $t=1$, c. à d. $h(x,1)=0$. Mais on aurait alors $f(x)-x=0$, contrairement à l'hypothèse.

Il est donc établi que $f(x)-x \sim -x$.

Dans le cas 2º posons $h(x,t)=f(x)-tx$. Il vient

$$h(x,0)=f(x) \quad \text{et} \quad h(x,1)=f(x)-x.$$

De plus $h(x,t) \neq 0$. Car on aurait autrement $f(x)=tx$, d'où $|f(x)|=t|x|=t$ et comme $|f(x)| \geqslant 1$, il vient $t=1$. Mais alors $f(x)=x$, contrairement à l'hypothèse.

Le lemme se trouve ainsi établi pour $D=D_0$ et $p=0$. Pour déduire le lemme dans le cas général, on transforme le plan par une homéomorphie g telle que

$$g(\mathcal{E}^2)=\mathcal{E}^2, \quad g(\overline{D}_0)=\overline{D} \quad \text{et} \quad g(0)=p.$$

On constate d'une façon analogue que les fonctions

$$h(x,t)=g\{tg^{-1}[f(x)]\}-x \quad \text{et} \quad h(x,t)=f(x)-g[tg^{-1}(x)]$$

fournissent les homotopies demandées.

4. Démonstration du théorème. Envisageons d'abord le cas où E est un continu élémentaire. E et F étant supposés assujettis aux conditions (5), (6) et (0), le complémentaire $\mathcal{E}^2-F$ a pour composantes les régions bornées $I, R_1, \ldots, R_m$, ainsi que la région non-bornée $Q=\mathcal{E}^2-\overline{R}_0$. Par définition du coefficient μ (p. 264), il vient (en posant $f^*(x)=f(x)-x$ pour $x \in F$):

(19) $$\mu_I f^* + \mu_Q f^* + \mu_{R_1} f^* + \ldots + \mu_{R_m} f^* = 0 \text{ [17]}.$$

Désignons par C_j, où $j=0,\ldots,m$, le contour de R_j et par f_j la fonction partielle $f^*|C_j$ (qui s'obtient de f^* en restreignant la variabilité de x à C_j). On a

(20) $$\mu_{R_j} f^* = \mu_{R_j} f_j, \quad \mu_Q f^* = \mu_Q f_0 \quad \text{et} \quad \mu_Q f_0 + \mu_{R_0} f_0 = 0,$$

cette dernière égalité étant une conséquence de: $\mathcal{E}^2-C_0=Q+R_0$.

Les formules (19) et (20) entraînent

(21) $$\mu_I f^* = \mu_{R_0} f_0 - (\mu_{R_1} f_1 + \ldots + \mu_{R_m} f_m).$$

Soit $p_j \in R_j$. L'application du lemme conduit aux homotopies:

(22) $$f_0(x) \sim p_0 - x \quad \text{et} \quad f_j(x) \sim f(x)-p_j \qquad \text{pour } j>0.$$

Or, le coefficient μ étant un invariant de l'homotopie [18], il vient d'une part

(23) $$\mu_{R_0} f_0 = \mu_{R_0}(p_0 - x) = 1,$$

cette dernière égalité étant une conséquence du fait que la région R_0 contient le (seul) zéro de la fonction p_0-x et que ce zéro est d'ordre 1.

D'autre part, en appliquant la formule (14), il vient pour $j>0$:

$$\begin{aligned}\mu_{R_j} f_j &= \mu_{R_j}[f(x)-p_j] = \mu_{R_j}[(x-p_1)^{k_{j1}} \ldots (x-p_m)^{k_{jm}}] \\ &= k_{j1} \cdot \mu_{R_j}(x-p_1) + \ldots + k_{jm} \cdot \mu_{R_j}(x-p_m),\end{aligned}$$

puisque la multiplicité du produit de deux fonctions est la somme des multiplicités de ces fonctions [19].

[17]) D'après les th. 1 et 2, p. 341, de mon ouvrage cité.

[18]) Ibid. p. 341, th. 4.

[19]) Ibid. p. 341, th. 3.

Comme $p_j \in R_j$, on a $\mu_{R_j}(x-p_j)=1$ et comme $p_{j'}$ non-$\in R_j$ pour $0<j'\neq j$, on a $\mu_{R_j}(x-p_{j'})=0$. Par conséquent

(24) $$\mu_{R_j} f_j = k_{jj} \qquad \text{pour } j>0.$$

En définitive, les formules (21), (23) et (24) donnent

$$\mu_I f^* = 1-(k_{11}+\ldots+k_{mm}) = 1-\sigma_f.$$

C'est bien la formule (17). Le théorème se trouve ainsi établi dans le cas particulier où E est un continu élémentaire.

Passons à présent au cas général où E est un continu-rétracte absolu de voisinage. Le complémentaire d'un rétracte absolu de voisinage étant formé d'un nombre fini de composantes [20]), admettons que l'ensemble $\mathcal{E}^2-E$ soit formé des composantes $R_0,\ldots,R_m$, la composante R_0 étant non-bornée. Soit $p_j \in R_j$.

Conformément à la définition de rétracte absolu de voisinage, il existe une fonction continue h définie sur un entourage A de E et telle que $h(A)\subset E$ et que $h(x)=f(x)$ pour $x\in E$. Cet entourage étant supposé suffisamment voisin de E, il n'existe aucun point invariant de la fonction h en dehors de E (donc en dehors de Z). Car en supposant le contraire et en considérant une suite d'entourages qui approchent E, il existerait une suite convergente de points: $\lim_{k=\infty} p_k = p$ telle que $h(p_k)=p_k$ et que $p_k \in A-E$; mais on aurait alors $p\in E\cdot\overline{\mathcal{E}^2-E}$ et $h(p)=p$, c. à d. $f(p)=p$, contrairement à (1).

Chaque continu étant le produit d'une suite décroissante de continus élémentaires [21]), il est légitime d'admettre — comme on montre facilement — que A est un continu élémentaire dont le complémentaire $\mathcal{E}^2-A$ est formé de $m+1$ composantes contenant respectivement les points $p_0,\ldots,p_m$.

Soit J l'intérieur de A et B sa frontière. Posons $h^*(x)=h(x)-x$ pour $x\in B$. Comme nous venons de démontrer, on a

(25) $$\mu_J h^* = 1-\sigma_h.$$

Posons (cf. (14)):

$$h(x)-p_j \sim (x-p_1)^{k_{j1}}\ldots(x-p_m)^{k_{jm}} \qquad \text{pour } x\in A.$$

[20]) Voir K. Borsuk, l. cit. p. 230, 16.
[21]) Théor. 2, p. 359 de mon ouvrage cité,

Rapprochée de l'identité $h(x)=f(x)$, valable pour $x\in E$, cette homotopie entraîne l'homotopie (14). Il en résulte que

(26) $$\sigma_h = \sigma_f.$$

La fonction h n'admettant aucun point invariant sur l'ensemble fermé $U=A-I$, il existe une fonction rationnelle r telle que (voir renvoi [7])):

(27) $$h(x)-x \sim r(x) \qquad \text{pour } x\in U.$$

La même homotopie a donc lieu en particulier sur les sous-ensembles B et F de U, c. à d. que

(28) $$h^*\sim r \quad \text{et} \quad f^*\sim r.$$

Or les coefficients $\mu_J h^*$ et $\mu_I f^*$ désignant, par définition, le nombre algébrique des zéros et pôles de la fonction r qui appartiennent à J, respectivement à I, il résulte de (28) que

(29) $$\mu_J h^* = \mu_I f^*.$$

Car, d'une part, $I\subset J$ et d'autre part, $J-I\subset A-I=U$ et l'ensemble U ne contient aucun zéro ni pôle de la fonction $r(x)$, puisque la fonction $h(x)-x$, qui lui est homotope (selon (27)), ne s'annule pas sur U.

Les formules (25), (26) et (29) entraînent l'identité (17).