Inversement la proposition T entraîne (sans l'aide de l'axiome du choix) la proposition S.

En effet, admettons la proposition T et soient M et N deux ensembles non vides quelconques, $\overline{\overline{M}}=\mathfrak{m}$, $\overline{\overline{N}}=\mathfrak{n}$. D'après T on a un (au moins) de deux cas suivants:

1⁰ l'ensemble M est une somme de $\mathfrak{n}$ ensembles non vides et disjoints, soit $M=\sum_{y\epsilon N}E(y)$; dans ce cas à tout élément x de M correspond un et un seul élément y de N tel que $x\epsilon E(y)$; en posant $y=f(x)$ on a donc une fonction univoque définie dans M et telle que $f(M)=N$. L'ensemble N est donc une image univoque de M.

2⁰ l'ensemble N est une somme de $\mathfrak{m}$ ensembles non vides et disjoints; on en déduit pareillement que l'ensemble M est une image univoque de N.

Nous avons ainsi démontré sans l'aide de l'axiome du choix que *les propositions S et T sont équivalentes*.

Or, en 1926 A. Lindenbaum a énoncé (sans démonstration) le théorème que *la proposition T équivaut à l'axiome du choix* [8]). La démonstration de ce théorème a été donnée récemment par moi [9]). Ainsi la proposition S, elle aussi équivaut à l'axiome du choix, c. q. f. d.

[8]) Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, XIX (1926), p. 312, théorème **82** (L) A_6.

[9]) l. c. XXXIX (1946), séance du 8 novembre 1946.

Sur les images de classe 1 d'ensembles linéaires.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

$f(x)$ étant une fonction réelle définie dans un ensemble linéaire X et de classe α de Baire dans X, nous appellerons l'ensemble $f(X)$ *image de classe α* de X. Le but de cette Note est de démontrer ce

Théorème. *Toute image de classe 2 d'un ensemble linéaire est une image de classe 1 d'une image de classe 1 de cet ensemble.*

Démonstration. Une famille Φ d'ensembles est dite *anneau*, si elle contient toute somme et tout produit de deux ensembles qu'elle contient.

Φ étant une famille d'ensembles, désignons par Φ_σ, resp. Φ_δ la famille de tous les ensembles qui sont des sommes, resp. des produits d'une infinité dénombrable d'ensembles de Φ. Comme j'ai démontré [1]):

Si Φ est un anneau d'ensembles et si $E_1\epsilon\Phi_\delta$, $E_2\epsilon\Phi_\sigma$ et $E_1\subset E_2$, il existe un ensemble E, tel que $E\epsilon\Phi_\sigma\Phi_\delta$ et $E_1\subset E\subset E_2$.

Soit X un ensemble linéaire donné et désignons par P^α, resp. Q^α la famille de tous les sous-ensembles de X qui sont de classe $\leqslant\alpha$ additive, resp. multiplicative relativement à X (c. à d. qui sont produits de X par les ensembles linéaires de classe $\leqslant\alpha$ additive, resp. multiplicative), et soit $\Phi^\alpha=P^\alpha Q^\alpha$. La famille Φ^α est, comme on sait, un anneau d'ensembles (pour tout $\alpha<\Omega$) et on a $\Phi^\alpha_\sigma=P^\alpha$ et $\Phi^\alpha_\delta=Q^\alpha$. Il résulte donc de notre théorème cité (pour $\Phi=\Phi^\alpha$) ce

Lemme 1. *Si $E_1\epsilon Q^\alpha$, $E_2\epsilon P^\alpha$ et $E_1\subset E_2$, il existe un ensemble E tel que $E\epsilon P^\alpha Q^\alpha$ et $E_1\subset E\subset E_2$.*

Soit $f(x)$ une fonction définie dans X et de classe $\leqslant\alpha$ dans X. Les ensembles $\underset{x}{E}[x\epsilon X, f(x)<a]$ et $\underset{x}{E}[x\epsilon X, f(x)\leqslant a]$, où a est un

[1]) Fund. Math. **18** (1932), p. 22.

nombre réel, appartiennent, comme on sait, à Q^α, resp. à P^α. En s'appuyant sur le lemme 1 et en appliquant avec des modifications évidentes la démonstration de la p. 4 du volume **6** des *Fundamenta Mathematicae*, nous obtenons la relativisation du théorème qui y a été démontré, à savoir le

Lemme 2. *$f(x)$ étant une fonction définie sur un ensemble linéaire X et de classe $\leqslant \alpha$ dans X et ε étant un nombre positif donné, il existe une fonction de classe $\leqslant \alpha$ dans X qui ne prend pour $x \in X$ que les valeurs multiples de ε et qui est pour $x \in X$ égale à $f(x)$ à moins de ε près.*

En partant du lemme 2 et en modifiant d'une façon évidente la démonstration que j'ai donné aux pp. 174-176 du volume **20** des *Fund. Math.*, on obtient le

Lemme 3. *Il existe un ensemble linéaire E et une fonction $\varphi(x)$ définie dans E et de classe 1 dans E, telle que pour tout ensemble linéaire X et toute fonction $f(x)$ de classe ν dans X, où ν est un nombre naturel >1, il existe une fonction $\psi(x)$ définie dans X et de classe $\nu-1$ dans X, dont les valeurs appartiennent à E et telle que pour $x \in X$ on a $f(x)=\varphi(\psi(x))$.*

Soit, en particulier, $\nu=2$ et soit X un ensemble linéaire donné et $f(X)$ une image de classe 2 de X. D'après le lemme 3, il existe un ensemble linéaire E et une fonction $\varphi(x)$ définie dans E et de classe 1 dans E et une fonction $\psi(x)$ définie dans X et de classe 1 dans X dont les valeurs appartiennent à E et telle, que pour $x \in X$ on a $f(x)=\varphi(\psi(x))$. Posons $Y=\psi(X)$. L'ensemble Y est évidemment une image de classe 1 de X et on a $Y \subset E$, donc $\varphi(x)$ est de classe $\leqslant 1$ dans Y et $\varphi(Y)$ est une image de classe $\leqslant 1$ de Y. Si $\varphi(Y)$ était une image de classe 0 de Y, $f(X)=\varphi(\psi(X)$ serait une image de classe $\leqslant 1$ de X, contrairement à l'hypothèse. $f(X)$ est donc une image de classe 1 d'une image de classe 1 de X et notre théorème est démontré.

Notre théorème peut être généralisé sans peine aux images de classe finie ν quelconque d'ensembles linéaires (ou même situés dans un espace euclidien à un nombre fini quelconque de dimensions) qu'on peut obtenir comme images ν-fois superposées de classe 1.

Or, il est à remarquer que c'est seulement en admettant l'hypothèse du continu que nous savons démontrer qu'*une image de classe* 1 *d'une image de classe* 1 *d'un ensemble linéaire peut ne pas être une image de classe* $\leqslant 1$ *de cet ensemble.* En effet, en admettant

l'hypothèse du continu j'ai démontré [2]) qu'il existe un ensemble linéaire X et une fonction $f(x)$ de classe 2 dans X, tels que l'ensemble $f(X)$ n'est pas une image de classe $\leqslant 1$ de X. Or, d'après notre théorème, $f(X)$ est une image de classe 1 d'une image de classe 1 de X.

D'autre part, en admettant l'hypothèse du continu on sait démontrer qu'il existe un ensemble linéaire indénombrable X tel que toute image de X de classe quelconque $\leqslant \alpha < \Omega$ de Baire est une image de classe $\leqslant 1$ de X. Tel est, en effet, tout ensemble linéaire indénombrable X ne contenant aucun sous-ensemble indénombrable de mesure nulle, puisque, comme on sait, toute fonction de Baire définie dans X est dans X de classe $\leqslant 1$ [3]).

Or, sans admettre l'hypothèse du continu M. Kuratowski a démontré qu'une image biunivoque de classe 1 d'une image biunivoque de classe 1 d'un ensemble linéaire peut ne pas être une image biunivoque de classe $\leqslant 1$ de cet ensemble.

---

[2]) Fund. Math. **25** (1935), p. 98.

[3]) Voir Fund. Math. **15** (1930), p. 212.