infinie de nombres naturels $n_1^\xi, n_2^\xi, n_3^\xi, \ldots$; k étant un nombre naturel donné, désignons par E_k l'ensemble formé de tous les points p_ξ, tels que $k \epsilon \{n_1^\xi, n_2^\xi, \ldots\}$. Je dis que la suite infinie d'ensembles $E_1, E_2, E_3, \ldots$ ne contient aucune sous-suite convergente. Soit, en effet, $E_{k_1}, E_{k_2}, \ldots$, où $k_1 < k_2 < \ldots$ une sous-suite quelconque de la suite $E_1, E_2, \ldots$ D'après la définition de la suite transfinie $\{s^\xi\}_{\xi<\Omega}$ il existe un nombre ordinal $\alpha < \Omega$, tel que s^α est la suite infinie $k_2, k_4, k_6, \ldots$, donc que $n_i^\alpha = k_{2i}$ pour $i=1,2,\ldots$ Vu que $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$, on a donc $k_{2i} \epsilon \{n_1^\alpha, n_2^\alpha, \ldots\}$ et k_{2i-1} non $\epsilon \{n_1^\alpha, n_2^\alpha, \ldots\}$, donc $p_\alpha \epsilon E_{k_{2i}}$ et p_α non $\epsilon E_{k_{2i-1}}$ pour $i=1,2,\ldots$ La sphère ouverte au centre p_α et au rayon d (qui se réduit évidemment à un seul point p_α) contient donc un point commun avec chacun des ensembles $E_{k_2}, E_{k_4}, E_{k_6}, \ldots$ et ne contient aucun point des ensembles $E_{k_1}, E_{k_3}, E_{k_5}, \ldots$ Par conséquent la suite infinie d'ensembles $E_{k_1}, E_{k_2}, E_{k_3}, \ldots$ n'est pas convergente. La suite $E_1, E_2, \ldots$ ne contient donc aucune sous-suite convergente, c. q. f. d.

Notre proposition se trouve ainsi démontrée.

Sur une proposition qui entraîne l'existence des ensembles non mesurables.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

On pourrait regarder comme presque évidente la proposition P suivante:

P. *Une image univoque d'un ensemble ne peut pas avoir une puissance supérieure que cet ensemble lui-même.*

Or, je démontrerai ici ce

Théorème 1. *Il résulte de la proposition P sans l'aide de l'axiome du choix que*

a) $\aleph_1 \leqslant 2^{\aleph_0}$,

b) *on n'a pas* $2^{\aleph_0} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, *où* $\mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$ *et* $\mathfrak{n} < 2^{\aleph_0}$,

c) *il existe un ensemble linéaire ne contenant aucun ensemble parfait (non vide),*

d) *il existe un ensemble linéaire non mesurable (au sens de Lebesgue).*

Pour démontrer le théorème 1 je prouverai d'abord ce

Théorème 2. *La proposition P entraîne sans l'aide de l'axiome du choix la proposition Q suivante:*

Q. *Un ensemble de puissance $\mathfrak{n}$ n'est pas une somme de plus que $\mathfrak{n}$ ensembles disjoints non vides.*

Démonstration. Admettons que la proposition Q soit fausse. Il existe donc un ensemble N de puissance $\mathfrak{n}$ qui est une somme de $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$ ensembles disjoints non vides. Nous pouvons donc poser $N = \sum_{y \epsilon M} E_y$, où l'indice y parcourt les éléments d'un ensemble M de puissance $\mathfrak{m}$, et où $E_y \neq 0$ pour $y \epsilon M$ et $E_y E_{y'} = 0$ pour $y \epsilon M$, $y' \epsilon M$, $y \neq y'$. Il résulte donc de la formule $N = \sum_{y \epsilon M} E_y$ qu'il existe pour tout élément x de N un et un seul élément $y=f(x)$ de M tel que $x \in E_y$. D'autre part, si $y \in M$, on a $E_y \neq 0$ et il existe (au moins) un élément x de E_y et, vu la définition de $f(x)$, on a $y=f(x)$. On a donc $f(N)=M$, d'où, d'après la proposition P, $\overline{\overline{M}}$ non $>\overline{\overline{N}}$, contrairement à l'inégalité $\mathfrak{m}>\mathfrak{n}$.

Nous avons ainsi démontré que $P \rightarrow Q$. Le théorème 2 se trouve ainsi démontré.

Il est à remarquer qu'on pourrait aussi démontrer sans faire appel à l'axiome du choix que la proposition P équivaut à la proposition Q et aussi à la proposition R suivante:

R. *Si M et N sont deux ensembles tels que $\overline{\overline{M}}>\overline{\overline{N}}$, et si à tout élément x de N correspond un ensemble H_x, de sorte que $M=\sum_{x \in N} H_x$, il existe (au moins) un élément x de N tel que $\overline{\overline{H}}_x>1$* (En d'autres mots: Si un ensemble de puissance $\mathfrak{m}$ est une somme de moins que $\mathfrak{m}$ termes (qui ne sont pas nécessairement distincts ou disjoints) un au moins de ces termes est un ensemble qui a plus qu'un élément).

Théorème 3. *Il résulte de la proposition Q sans l'aide de l'axiome du choix que $\aleph_1 \leqslant 2^{\aleph_0}$* [1]).

Démonstration. On peut nommer, d'après Lebesgue[2]), une décomposition de l'intervalle $I=(0,1)$ en $\aleph_1$ ensembles disjoints non vides. D'autre part, l'ensemble de tous les nombres réels qui n'appartiennent pas à l'intervalle I est évidemment une somme de $2^{\aleph_0}$ ensembles disjoints non vides (dont chacun est formé d'un seul élément). On obtient ainsi une décomposition de l'ensemble X de tous les nombres réels en $\mathfrak{m}=\aleph_1+2^{\aleph_0}$ ensembles disjoints non vides. D'après la proposition Q on a donc $\mathfrak{m}$ non $>\overline{\overline{X}}=2^{\aleph_0}$ et, comme évidemment $\mathfrak{m} \geqslant 2^{\aleph_0}$, on trouve $\mathfrak{m}=2^{\aleph_0}$, donc $\aleph_1+2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$, d'où $\aleph_1 \leqslant 2^{\aleph_0}$, c. q. f. d.

Il est à remarquer qu'en s'appuyant sur l'existence d'une décomposition d'un ensemble de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ en $\aleph_2$ ensembles disjoints non vides, que j'ai établie (sans l'axiome du choix) dans

[1]) Ce théorème est dû à M. Tarski et sa démonstration a été publiée dans mon livre *Zarys teorii mnogości* Część I (3-me édition) Warszawa 1928, p. 227 (en polonais).

[2]) Cf. H. Lebesgue, Journ. de Math. 6-e série, t. I (1905), p. 213 aussi mon livre *Leçons sur les nombres transfinis*, Paris 1928, p. 209 et Fund. Math. **29** (1937), p. 1.

Fund. Math. **29**, p. 3, on pourrait démontrer de même qu'*il résulte de la proposition Q sans l'aide de l'axiome du choix que $\aleph_2 \leqslant 2^{2^{\aleph_0}}$*.

Théorème 4. *Il résulte de la proposition Q sans l'aide de l'axiome du choix que si le nombre cardinal $2^{\aleph_0}$ est une somme de deux nombres cardinaux, un (au moins) parmi eux est égal à $2^{\aleph_0}$* [3]).

Démonstration. Admettons que $2^{\aleph_0}=\mathfrak{m}+\mathfrak{n}$. L'ensemble H de tous les points du plan étant de puissance $2^{\aleph_0}$, on a donc $H=M+N$, où $MN=0$, $\overline{\overline{M}}=\mathfrak{m}$ et $\overline{\overline{N}}=\mathfrak{n}$. S'il existe un nombre réel x_0, tel que le point (x_0,y) appartient à M quel que soit le nombre réel y, l'ensemble M a un sous-ensemble de puissance $2^{\aleph_0}$ et, comme $M \subset H$, on en conclut tout de suite que $\overline{\overline{M}}=2^{\aleph_0}$, donc $\mathfrak{m}=2^{\aleph_0}$.

S'il n'existe aucun nombre réel x_0 tel que $(x_0,y) \in M$ pour y réels, l'ensemble T_{x_0} de tous les points (x,y) de N, où $x=x_0$ est non vide pour tout x_0 réel. Or, on a évidemment $N=\sum_{x \in X} T_x$, la sommation s'étendant à tous les nombres réels x. L'ensemble N est donc une somme de $2^{\aleph_0}$ ensembles non vides disjoints, d'où il résulte, d'après la proposition Q, que $2^{\aleph_0}$ non $>\mathfrak{n}$, et comme d'autre part $2^{\aleph_0} \geqslant \mathfrak{n}$, on trouve $\mathfrak{n}=2^{\aleph_0}$. Le théorème 4 est ainsi démontré.

Théorème 5. *Il résulte de la proposition Q sans l'aide de l'axiome du choix qu'il existe un ensemble linéaire indénombrable ne contenant aucun sous-ensemble parfait (non vide)* [4]).

Démonstration. Admettons la proposition Q. D'après le théorème 3 on a $\aleph_1 \leqslant 2^{\aleph_0}$, donc ou bien $\aleph_1<2^{\aleph_0}$, ou bien $\aleph_1=2^{\aleph_0}$. Si $\aleph_1<2^{\aleph_0}$, il existe un ensemble indénombrable de nombres réels de puissance inférieure à celle du continu. Un tel ensemble ne peut contenir aucun sous-ensemble parfait non vide (la puissance d'un ensemble parfait non vide étant celle du continu). Or, si $\aleph_1=2^{\aleph_0}$, le continu est bien ordonné et il en résulte, comme on sait (sans l'aide de l'axiome du choix) que l'ensemble de tous les nombres réels est une somme de deux ensembles dont chacun a au moins un point commun avec tout ensemble linéaire parfait, et parsuite ne contient aucun sous-ensemble parfait [5]).

Le théorème 5 se trouve ainsi démontré.

[3]) Ce théorème a été énoncé sans démonstration par M. Tarski dans la Communication de A. Lindenbaum et A. Tarski dans les Comptes rendus de la Société des Sc. et des L. de Varsovie, Cl. III, **19** (1926), p. 313, th. 84 C_2.

[4]) Ce théorème a été énoncé par A. Tarski l. c., th. 84 C_2.

[5]) Voir p. e. Fund. Math. **1** (1920), p. 8, renvoi [1]).

Théorème 6. *La proposition Q implique sans l'aide de l'axiome du choix l'existence d'un ensemble linéaire non mesurable au sens de Lebesgue* [6]).

Démonstration. Dans sa démonstration (à l'aide de l'axiome du choix) de l'existence des ensembles non mesurables G. Vitali utilise une décomposition de l'ensemble X de tous les nombres réels en classes disjointes, en rangeant dans une même classe deux nombres réels dans ce cas et seulement dans ce cas si leur différence est rationnelle. Appelons *classes de Vitali* les classes ainsi obtenues. Or, j'ai démontré dans le volume III du journal *Mathematica* (Cluj 1930), p. 2, la proposition U suivante:

U. *Si l'on savait nommer une ordination simple de toutes les classes de Vitali, on saurait nommer un ensemble non mesurable* (au sens de Lebesgue).

I étant l'intervalle $(0,1)$ et V une classe de Vitali, on a évidemment $IV \neq 0$. Soit F_1 la famille de tous les ensembles IV, où V est une classe de Vitali, et soit F_2 la famille de tous les ensembles formés d'un seul élément qui est un nombre quelconque de l'ensemble $X-I$. L'ensemble X est évidemment la somme disjointe de tous les ensembles de la famille $F=F_1+F_2$ qui sont tous non vides. Il résulte donc de la proposition Q que $\overline{\overline{F}}$ non $>\overline{\overline{X}}=2^{\aleph_0}$. Or, on a $F=F_1+F_2$ et $F_1F_2=0$, d'où $\overline{\overline{F}}=\overline{\overline{F}}_1+\overline{\overline{F}}_2$ et, comme évidemment $F_2=2^{\aleph_0}$, on a $\overline{\overline{F}} \geqslant 2^{\aleph_0}$, donc, vu que $\overline{\overline{F}}$ non $>2^{\aleph_0}$, on a $\overline{\overline{F}}=2^{\aleph_0}$, d'où $\overline{\overline{F}}_1+\overline{\overline{F}}_2=2^{\aleph_0}$, ce qui donne $\overline{\overline{F}}_1 \leqslant 2^{\aleph_0}$. Il existe donc une correspondance $f(IV)$ d'après laquelle à tout ensemble IV appartenant à la famille F_1 correspond un nombre réel de sorte qu'aux ensembles distincts de la famille F_1 correspondent des nombres réels distincts. Nous pouvons ainsi ordonner toutes les classes V de Vitali d'après la grandeur des nombres $f(IV)$ correspondants. Vu la proposition U, il en résulte l'existence d'un ensemble non mesurable. Le théorème 6 se trouve ainsi démontré.

Vu le théorème 2, les théorèmes 3, 4, 5 et 6 entraînent tout de suite le théorème 1. Il est à remarquer que les propositions a), c) et d) résultent sans l'aide de l'axiome du choix de la proposition suivante (qui est un cas particulier de la proposition P):

[6]) Ce théorème a été énoncé par M. Tarski, l. c. th. 84 C_3, sans démonstration.

L'ensemble de toutes les valeurs d'une fonction univoque (pas nécessairement réelle) *d'une variable réelle ne peut pas être de puissance supérieure à celle du continu.*

Quant à la proposition Q il est à remarquer qu'elle résulte tout de suite (sans faire appel à l'axiome du choix) de la proposition qu'*une somme d'une famille F d'ensembles non vides et disjoints a une puissance égale ou supérieure à celle de la famille F*. Or c'est M. Beppo Levi qui a remarqué déjà en 1902 (donc quelques années avant que Zermelo énonça l'axiome du choix) qu'on peut démontrer cette proposition si l'on sait distinguer un élément dans chacun des ensembles de la famille F [7]).

Quant à la proposition R il est à remarquer qu'on sait démontrer sans faire appel à l'axiome du choix que si un ensemble de puissance $\mathfrak{m}$ est une somme de moins que $\mathfrak{m}$ ensembles disjoints, un au moins de ces ensembles a plus qu'un élément (puisque si un ensemble de puissance $\mathfrak{m}$ est une somme de $\mathfrak{n}$ ensembles disjoints contenant chacun au plus un élément, on a évidemment $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$).

Or, sans utiliser l'axiome du choix nous ne savons pas démontrer que si un ensemble non fini de puissance $\mathfrak{m}$ est une somme de moins que $\mathfrak{m}$ ensembles disjoints, un au moins de ces ensembles contient plus que 2 éléments.

Pour terminer notons encore que *la proposition S suivante équivaut à l'axiome du choix*:

S. *De deux ensembles non vides un au moins est une image univoque de l'autre.*

En effet, soient $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ deux nombres cardinaux (non nuls) et soit M un ensemble de puissance $\mathfrak{m}$ et N un ensemble de puissance $\mathfrak{n}$. Si N est une image univoque de M, soit $f(M)=N$, à tout élément y de N correspond un sous-ensemble non vide de M, $E(y)=\underset{x}{E}[x \in M, f(x)=y]$ et l'ensemble M est une somme de $\mathfrak{n}$ ensembles non vides et disjoints, $M=\sum_{y \in N} E(y)$.

La proposition S entraîne donc (sans l'aide de l'axiome du choix) la proposition T suivante:

T. *$\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ étant deux nombres cardinaux, ou bien chaque ensemble de puissance $\mathfrak{m}$ est une somme de $\mathfrak{n}$ ensembles non vides et disjoints, ou bien chaque ensemble de puissance $\mathfrak{n}$ est une somme de $\mathfrak{m}$ ensembles non vides et disjoints.*

[7]) Rendiconti de R. Ist. Lomb. di sc. et lett. Serie II, vol. **35** (1902).

Inversement la proposition T entraîne (sans l'aide de l'axiome du choix) la proposition S.

En effet, admettons la proposition T et soient M et N deux ensembles non vides quelconques, $\overline{\overline{M}}=\mathfrak{m}$, $\overline{\overline{N}}=\mathfrak{n}$. D'après T on a un (au moins) de deux cas suivants:

1⁰ l'ensemble M est une somme de $\mathfrak{n}$ ensembles non vides et disjoints, soit $M=\sum\limits_{y\epsilon N} E(y)$; dans ce cas à tout élément x de M correspond un et un seul élément y de N tel que $x\epsilon E(y)$; en posant $y=f(x)$ on a donc une fonction univoque définie dans M et telle que $f(M)=N$. L'ensemble N est donc une image univoque de M.

2⁰ l'ensemble N est une somme de $\mathfrak{m}$ ensembles non vides et disjoints; on en déduit pareillement que l'ensemble M est une image univoque de N.

Nous avons ainsi démontré sans l'aide de l'axiome du choix que *les propositions S et T sont équivalentes*.

Or, en 1926 A. Lindenbaum a énoncé (sans démonstration) le théorème que *la proposition T équivaut à l'axiome du choix* [8]). La démonstration de ce théorème a été donnée récemment par moi [9]). Ainsi la proposition S, elle aussi équivaut à l'axiome du choix, c. q. f. d.

[8]) Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, XIX (1926), p. 312, théorème **82** (L) A_6.

[9]) l. c. XXXIX (1946), séance du 8 novembre 1946.

Sur les images de classe 1 d'ensembles linéaires.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

$f(x)$ étant une fonction réelle définie dans un ensemble linéaire X et de classe α de Baire dans X, nous appellerons l'ensemble $f(X)$ *image de classe α* de X. Le but de cette Note est de démontrer ce

Théorème. *Toute image de classe 2 d'un ensemble linéaire est une image de classe 1 d'une image de classe 1 de cet ensemble.*

Démonstration. Une famille Φ d'ensembles est dite *anneau*, si elle contient toute somme et tout produit de deux ensembles qu'elle contient.

Φ étant une famille d'ensembles, désignons par Φ_σ, resp. Φ_δ la famille de tous les ensembles qui sont des sommes, resp. des produits d'une infinité dénombrable d'ensembles de Φ. Comme j'ai démontré [1]):

Si Φ est un anneau d'ensembles et si $E_1\epsilon\Phi_\delta$, $E_2\epsilon\Phi_\sigma$ et $E_1\subset E_2$, il existe un ensemble E, tel que $E\epsilon\Phi_\sigma\Phi_\delta$ et $E_1\subset E\subset E_2$.

Soit X un ensemble linéaire donné et désignons par P^α, resp. Q^α la famille de tous les sous-ensembles de X qui sont de classe $\leqslant\alpha$ additive, resp. multiplicative relativement à X (c. à d. qui sont produits de X par les ensembles linéaires de classe $\leqslant\alpha$ additive, resp. multiplicative), et soit $\Phi^\alpha=P^\alpha Q^\alpha$. La famille Φ^α est, comme on sait, un anneau d'ensembles (pour tout $\alpha<\Omega$) et on a $\Phi^\alpha_\sigma=P^\alpha$ et $\Phi^\alpha_\delta=Q^\alpha$. Il résulte donc de notre théorème cité (pour $\Phi=\Phi^\alpha$) ce

Lemme 1. *Si $E_1\epsilon Q^\alpha$, $E_2\epsilon P^\alpha$ et $E_1\subset E_2$, il existe un ensemble E tel que $E\epsilon P^\alpha Q^\alpha$ et $E_1\subset E\subset E_2$.*

Soit $f(x)$ une fonction définie dans X et de classe $\leqslant\alpha$ dans X. Les ensembles $\underset{x}{E}[x\epsilon X, f(x)<a]$ et $\underset{x}{E}[x\epsilon X, f(x)\leqslant a]$, où a est un

[1]) Fund. Math. **18** (1932), p. 22.