conséquent: *on peut démontrer sans faire appel à l'axiome du choix que si un ensemble de puissance $\geqslant 2^{\aleph_0}$ est décomposé en un nombre fini de parties disjointes de même puissance, chacune d'elles est de puissance $\geqslant 2^{\aleph_0}$.*

Il est à remarquer qu'à l'aide de l'axiome du choix nous savons démontrer ce

Théorème III. *M, N, P et Q étant 4 ensembles disjoints, $\varphi=\varphi^{-1}$ une transformation biunivoque donnée de l'ensemble M en N et de l'ensemble P en Q et ϑ une transformation biunivoque donnée de l'ensemble $M+N$ en un sous-ensemble de $P+Q$, il existe une décomposition de M en 4 ensembles disjoints M_1, M_2, M_3 et M_4, telle que $\vartheta(M_1)$, $\varphi\vartheta(M_2)$, $\vartheta\varphi(M_3)$ et $\varphi\vartheta\varphi(M_4)$ sont des sous-ensembles disjoints de P* [2].

Il résulte sans peine du théorème III que si l'on a 4 ensembles de points (dans un espace métrique) A, B, C, D, tels que $A \underset{f}{=} B$, $C \underset{f}{=} D$ et $A+B \underset{f}{=} E$, où $E \subset C+D$, il existe un ensemble $B_1 \subset B$, tel que $A \underset{f}{=} B_1$ ($A \underset{f}{=} B$ désigne que l'ensemble A est équivalent par décomposition finie avec l'ensemble B) [3].

Or, je ne sais pas démontrer cette proposition sans faire appel à l'xiome du choix.

---

[2]) Cf. C. Kuratowski, Fund. Math. **6** (1924), p. 240.

[3]) Pour la définition de l'équivalence par décomposition finie voir S. Banach et A. Tarski, Fund. Math. **6**, p. 246.

Sur l'inversion du théorème de Bolzano-Weierstrass généralisé.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

On appelle théorème de Bolzano-Weierstrass généralisé la proposition suivante:

Si l'espace métrique M est séparable, chaque suite infinie d'ensembles contenus dans M contient une sous-suite convergente [1]).

Le but de cette Note est de démontrer à l'aide de l'hypothèse du continu le théorème inverse. Je démontrerai ici la proposition suivante:

Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ et si M est un espace métrique tel que chaque suite infinie d'ensembles contenus dans M contient une sous-suite convergente, l'espace M est séparable.

Démonstration. Soit M un espace métrique non séparable. Pour démontrer notre proposition, il suffira évidemment de prouver que si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe une suite infinie d'ensembles contenus dans M qui ne contient aucune sous-suite convergente.

L'espace métrique M étant non séparable, il existe, comme on sait, un nombre positif d et une suite transfinie $\{p_\xi\}_{\xi<\Omega}$ du type Ω formée de points de M tels que $\varrho(p_\xi, p_\eta) \geqslant d$ pour $\xi<\eta<\Omega$, $\varrho(p,q)$ désignant la distance des points p et q de M.

Or, la famille de toutes les suites infinies de nombres naturels étant de puissance du continu, il résulte de l'hypothèse $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ qu'il existe une suite transfinie du type Ω, $\{s^\xi\}_{\xi<\Omega}$, formée de toutes les suites infinies de nombres naturels. Soit (pour $\xi<\Omega$) s^ξ la suite

---

[1]) Voir: C. Kuratowski, *Topologie I* (Monografie Matematyczne, t. III) Warszawa-Lwów 1933, p. 156; F. Hausdorff, *Mengenlehre*, p. 148. $A_1, A_2, A_3, \dots$ étant une suite infinie d'ensembles d'un espace métrique M, on dit qu'elle est convergente, si, p étant un point donné quelconque de M et S une sphère au centre p, il existe toujours un nombre naturel μ (dépendant de p et de S), tel qu'on a ou bien $SA_n \neq 0$ pour $n>\mu$, ou bien $SA_n=0$ pour $n>\mu$.

infinie de nombres naturels $n_1^\xi, n_2^\xi, n_3^\xi, \ldots$; k étant un nombre naturel donné, désignons par E_k l'ensemble formé de tous les points p_ξ, tels que $k \in \{n_1^\xi, n_2^\xi, \ldots\}$. Je dis que la suite infinie d'ensembles $E_1, E_2, E_3, \ldots$ ne contient aucune sous-suite convergente. Soit, en effet, $E_{k_1}, E_{k_2}, \ldots$, où $k_1 < k_2 < \ldots$ une sous-suite quelconque de la suite $E_1, E_2, \ldots$ D'après la définition de la suite transfinie $\{s^\xi\}_{\xi<\Omega}$ il existe un nombre ordinal $\alpha < \Omega$, tel que s^α est la suite infinie $k_2, k_4, k_6, \ldots$, donc que $n_i^\alpha = k_{2i}$ pour $i = 1, 2, \ldots$ Vu que $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$, on a donc $k_{2i} \in \{n_1^\alpha, n_2^\alpha, \ldots\}$ et k_{2i-1} non $\in \{n_1^\alpha, n_2^\alpha, \ldots\}$, donc $p_\alpha \in E_{k_{2i}}$ et p_α non $\in E_{k_{2i-1}}$ pour $i = 1, 2, \ldots$ La sphère ouverte au centre p_α et au rayon d (qui se réduit évidemment à un seul point p_α) contient donc un point commun avec chacun des ensembles $E_{k_2}, E_{k_4}, E_{k_6}, \ldots$ et ne contient aucun point des ensembles $E_{k_1}, E_{k_3}, E_{k_5}, \ldots$ Par conséquent la suite infinie d'ensembles $E_{k_1}, E_{k_2}, E_{k_3}, \ldots$ n'est pas convergente. La suite $E_1, E_2, \ldots$ ne contient donc aucune sous-suite convergente, c. q. f. d.

Notre proposition se trouve ainsi démontrée.

Sur une proposition qui entraîne l'existence des ensembles non mesurables.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

On pourrait regarder comme presque évidente la proposition P suivante:

P. *Une image univoque d'un ensemble ne peut pas avoir une puissance supérieure que cet ensemble lui-même.*

Or, je démontrerai ici ce

Théorème 1. *Il résulte de la proposition P sans l'aide de l'axiome du choix que*

a) $\aleph_1 \leqslant 2^{\aleph_0}$,

b) *on n'a pas* $2^{\aleph_0} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, *où* $\mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$ *et* $\mathfrak{n} < 2^{\aleph_0}$,

c) *il existe un ensemble linéaire ne contenant aucun ensemble parfait (non vide),*

d) *il existe un ensemble linéaire non mesurable (au sens de Lebesgue).*

Pour démontrer le théorème 1 je prouverai d'abord ce

Théorème 2. *La proposition P entraîne sans l'aide de l'axiome du choix la proposition Q suivante:*

Q. *Un ensemble de puissance $\mathfrak{n}$ n'est pas une somme de plus que $\mathfrak{n}$ ensembles disjoints non vides.*

Démonstration. Admettons que la proposition Q soit fausse. Il existe donc un ensemble N de puissance $\mathfrak{n}$ qui est une somme de $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$ ensembles disjoints non vides. Nous pouvons donc poser $N = \sum_{y \in M} E_y$, où l'indice y parcourt les éléments d'un ensemble M de puissance $\mathfrak{m}$, et où $E_y \neq 0$ pour $y \in M$ et $E_y E_{y'} = 0$ pour $y \in M$, $y' \in M$, $y \neq y'$. Il résulte donc de la formule $N = \sum_{y \in M} E_y$ qu'il existe pour tout