Sur un théorème de M. Tarski concernant les alephs.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

En 1926 MM. A. Lindenbaum et A. Tarski ont publié une *Communication sur les recherches de la Théorie des Ensembles* [1]) dans laquelle ils ont énoncé sans démontrer entre autres plus que cent propositions de la théorie des nombres cardinaux. „Tous les résultats de M. Tarski — nous lisons l. c., p. 300 — se trouvent recueillis dans un mémoire plus étendu destiné à paraître sous le titre „L'arithmétique des nombres cardinaux" dans le volume prochain du journal *Fundamenta Mathematicae*".

Malheureusement, il y a presque 20 ans depuis que ce fut annoncé et M. Tarski n'a pas publié les démonstrations de plusieurs de théorèmes énoncés dans cette communication. Pendant les dernières années j'ai trouvé les démonstrations de plusieurs de ces théorèmes qui parfois étaient difficiles. Or, je m'occuperai ici d'un théorème de M. Tarski que je ne sais pas démontrer et qui, s'il pouvait être démontré, entraînerait une proposition dont la démonstration est regardée comme débordant les limites actuelles de la science.

P. 310 l. c. nous lisons:

75. $\mathfrak{a}=\aleph(\mathfrak{m})$, lorsque $\mathfrak{m}$ est un nombre non-fini et $\mathfrak{a}$ est le plus petit parmi tous les alephs $\mathfrak{x}$ pour lesquels on a $\mathfrak{x}$ non $\leqslant \mathfrak{m}$.

Admettons qu'il existe un nombre cardinal non-fini $\mathfrak{n}$ qui n'est pas $\geqslant\aleph_0$; d'après la définition **75** nous aurons donc

$$\aleph(\mathfrak{n})=\aleph_0. \tag{1}$$

Or, p. 311 l. c. M. Tarski énonce la proposition P suivante (qui est une partie de son théorème **78**):

[1]) Comptes rendus de séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, **19** (1926), Cl. III. pp. 299-330.

P. On peut démontrer sans faire appel à l'axiome du choix que les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) $\mathfrak{m}$ est un aleph,

(d) $[\mathfrak{m}+\aleph(\mathfrak{m})]-\mathfrak{m}=\aleph(\mathfrak{m})$.

Quant à la différence de deux nombres cardinaux, sa définition est donnée l. c., p. 306:

47. $\mathfrak{p}=\mathfrak{n}-\mathfrak{m}$, lorsque $\mathfrak{p}$ est le seul nombre cardinal $\mathfrak{x}$ pour lequel $\mathfrak{n}=\mathfrak{m}+\mathfrak{x}$.

Or, j'affirme:

Si la proposition P de M. Tarski est vraie, alors on peut démontrer sans faire appel à l'axiome du choix que tout nombre cardinal non-fini est $\geqslant\aleph_0$.

Admettons, en effet, qu'il existe un nombre cardinal non-fini $\mathfrak{n}$ qui n'est pas $\geqslant\aleph_0$; nous aurons donc la formule (1). Or, je dis que

$$(\mathfrak{n}+\aleph_0)-\mathfrak{n}=\aleph_0. \tag{2}$$

Vu la définition **47**, il suffit évidemment de démontrer que, si $\mathfrak{p}$ est un nombre cardinal tel que

$$\mathfrak{n}+\aleph_0=\mathfrak{n}+\mathfrak{p}, \tag{3}$$

on a $\mathfrak{p}=\aleph_0$.

Soit donc $\mathfrak{p}$ un nombre cardinal pour lequel on a l'égalité (3). On démontre d'une façon tout à fait élémentaire (et sans appel à l'axiome du choix) la proposition suivante:

(4) Si $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{p}$ sont 4 nombres cardinaux, tels que $\mathfrak{q}+\mathfrak{m}=\mathfrak{n}+\mathfrak{p}$, il existe 4 nombres cardinaux $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$, $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$ tels que $\mathfrak{q}=\mathfrak{n}_1+\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{m}=\mathfrak{n}_2+\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}_1+\mathfrak{n}_2$, $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2$.

Donc, d'après (3) et (4) il existe 4 nombres cardinaux $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$, $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$ tels que

(5) $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}_1+\mathfrak{p}_1$, (6) $\aleph_0=\mathfrak{n}_2+\mathfrak{p}_2$, (7) $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}_1+\mathfrak{n}_2$, (8) $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2$.

D'après (6) on a $\aleph_0\geqslant\mathfrak{n}_2$. S'il était $\mathfrak{n}_2=\aleph_0$, (7) donnerait $\mathfrak{n}\geqslant\aleph_0$, contrairement à la définition de $\mathfrak{n}$. On a donc $\mathfrak{n}_2<\aleph_0$, c. à d. $\mathfrak{n}_2$ est un nombre fini.

Admettons que le nombre $\mathfrak{p}_1$ est non-fini. Le nombre $\mathfrak{n}_2$ étant fini, on aura évidemment $\mathfrak{p}_1>\mathfrak{n}_2$ et il existe un nombre cardinal non-fini $\mathfrak{p}_3$ tel que $\mathfrak{p}_1=\mathfrak{n}_2+\mathfrak{p}_3$. D'après (5) on aura donc $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}_1+\mathfrak{n}_2+\mathfrak{p}_3$, d'où, d'après (7): $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}+\mathfrak{p}_3$, ce qui donne $\mathfrak{n}\geqslant\mathfrak{n}+1$, donc (vu que

$\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{n}+1)$ $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}+1$, d'où il résulte, comme on sait, sans l'aide de l'axiome du choix que $\mathfrak{n} \geqslant \aleph_0$, contrairement à la définition du nombre $\mathfrak{n}$.

Le nombre $\mathfrak{p}_1$ est donc fini. Or, d'après (6), vu que le nombre $\mathfrak{n}_2$ est fini, nous trouvons $\mathfrak{p}_2=\aleph_0$. Comme $\mathfrak{p}_1$ est fini, nous concluons donc d'après (8) que $\mathfrak{p}=\aleph_0$, c. q. f. d.

On a donc la formule (2), c. à d. (d) est vrai pour $\mathfrak{m}=\mathfrak{n}$. Si la proposition P est vraie, il en résulte (sans appel à l'axiome du choix) que (a) est vrai pour $\mathfrak{m}=\mathfrak{n}$, c. à d. que $\mathfrak{n}$ est un aleph, donc $\mathfrak{n} \geqslant \aleph_0$, contrairement à la définition de $\mathfrak{n}$.

Il n'existe donc aucun nombre cardinal non-fini qui n'est pas $\geqslant \aleph_0$. Notre assertion est ainsi démontrée.

Il est à remarquer qu'on peut démontrer sans faire appel à l'axiome du choix que la différence

$$[\mathfrak{m}+\aleph(\mathfrak{m})]-\aleph(\mathfrak{m}) \tag{9}$$

n'existe pour aucun nombre cardinal non-fini $\mathfrak{m}$.

En effet, soit $\mathfrak{m}$ un nombre cardinal non-fini. On a évidemment

$$\mathfrak{m}+\aleph(\mathfrak{m})=\aleph(\mathfrak{m})+\mathfrak{m}$$

et

$$\mathfrak{m}+\aleph(\mathfrak{m})=\aleph(\mathfrak{m})+[\aleph(\mathfrak{m})+\mathfrak{m}]$$

(puisque $\aleph(\mathfrak{m})+\aleph(\mathfrak{m})=\aleph(\mathfrak{m})$). Donc, si la différence (9) existe, on a

$$\mathfrak{m}=\aleph(\mathfrak{m})+\mathfrak{m},$$

d'où $\aleph(\mathfrak{m}) \leqslant \mathfrak{m}$, contrairement à la définition du nombre $\aleph(\mathfrak{m})$. La différence (9) ne peut donc exister.

Sur un ensemble plan qui se décompose en $2^{\aleph_0}$ ensembles disjoints superposables avec lui.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

A. Lindenbaum a annoncé en 1926 qu'il sait démontrer à l'aide de l'axiome du choix la proposition suivante:

Il existe pour tout $\mathfrak{m} \leqslant 2^{\aleph_0}$ un ensemble plan qui se décompose en $\mathfrak{m}$ parties disjointes superposables avec lui [1]).

La démonstration de A. Lindenbaum n'a pas été publiée et elle m'est inconnue. Le but de cette Note est de démontrer la proposition de A. Lindenbaum *sans faire appel à l'axiome du choix et d'une façon effective*. Je vais démontrer, en effet ce

Théorème. *E étant un ensemble quelconque de nombres réels de l'intervalle $0 \leqslant t < 1$ tel que $0 \in E$, on sait nommer un ensemble plan P et une famille F de la même puissance que E de sous-ensembles de P deux à deux disjoints, dont l'ensemble-somme est P et dont chacun est superposable avec P.*

Démonstration. Posons pour $t>0$:

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty} 2^{2^{\mathrm{E}nt}-2^{n^2}},$$

où $\mathrm{E}x$ désigne le plus grand entier ne dépassant pas x.

La fonction $f(t)$ est croissante pour $t>0$ [2]). Soit N l'ensemble de toutes les valeurs de $f(t)$ pour $t>0$. M. von Neumann a démontré [3]) que toute suite finie de nombres de N est un système de nombres algébriquement indépendants (c. à d. que $a_1, a_2, \dots, a_n$ étant

---

[1]) A. Lindenbaum et A. Tarski: *Communication sur les recherches de la Théorie des Ensembles*, Comptes rendus Soc. Sc. et Lettres Varsovie **19** (1926), p. 327, th. **3***.

[2]) Voir S. Ruziewicz et W. Sierpiński, Fund. Math. **19** (1932), p. 17.

[3]) Math. Ann. **99**, p. 134-141.