du choix)[3]), il en résulte que $\mathfrak{p}=2^{\mathfrak{m}}$. On a ainsi la formule (1) et le théorème de M. Tarski se trouve démontré.

Sans se servir de mon théorème cité tout à l'heure (dont la démonstration est assez compliquée) on peut achever la démonstration du théorème de M. Tarski de la façon suivante.

Comme l'a observé M. Tarski, on tire sans peine de son lemme la proposition suivante de M. F. Bernstein:

(16) *On peut démontrer sans utiliser l'axiome du choix que, si* $\mathfrak{m}+\mathfrak{m}=\mathfrak{m}+\mathfrak{q}$, *on a* $\mathfrak{m}\geqslant\mathfrak{q}$.

En effet, d'après (14) (pour $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}$) il existe des nombres cardinaux $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{q}_1$ tels que

$$\mathfrak{m}=\mathfrak{n}+\mathfrak{p}_1, \qquad \mathfrak{q}=\mathfrak{n}+\mathfrak{q}_1, \qquad \mathfrak{m}+\mathfrak{p}_1=\mathfrak{m}=\mathfrak{m}+\mathfrak{q}_1,$$

d'où

$$\mathfrak{m}=\mathfrak{m}+\mathfrak{q}_1=\mathfrak{n}+\mathfrak{p}_1+\mathfrak{q}_1=\mathfrak{q}+\mathfrak{p}_1\geqslant\mathfrak{q}, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

En vertu de (16) on déduit des formules

$$2\mathfrak{p}\geqslant 2^{\mathfrak{m}+1}=2^{\mathfrak{m}}+2^{\mathfrak{m}}\geqslant 2^{\mathfrak{m}}+\mathfrak{p}$$

et $2^{\mathfrak{m}}+\mathfrak{p}\geqslant\mathfrak{p}+\mathfrak{p}$, donc de $\mathfrak{p}+\mathfrak{p}=\mathfrak{p}+2^{\mathfrak{m}}$, que $\mathfrak{p}\geqslant 2^{\mathfrak{m}}$. Or, comme $2^{\mathfrak{m}}=\mathfrak{m}+\mathfrak{p}\geqslant\mathfrak{p}$, on trouve $\mathfrak{p}=2^{\mathfrak{m}}$, c. q. f. d.

Il est à remarquer qu'à l'état actuel de la science nous ne savons pas démontrer le théorème qu'on obtient en remplaçant dans le théorème de M. Tarski le terme „transfini" par „non fini". En effet, si l'on a, pour un nombre cardinal $\mathfrak{m}$, $2^{\mathfrak{m}}=\mathfrak{m}+2^{\mathfrak{m}}$, on a

$$2^{\mathfrak{m}}\leqslant 1+2^{\mathfrak{m}}\leqslant\mathfrak{m}+2^{\mathfrak{m}}=2^{\mathfrak{m}},$$

d'où $2^{\mathfrak{m}}=1+2^{\mathfrak{m}}$ et $2^{\mathfrak{m}}$ est un nombre transfini. Or, nous ne savons pas démontrer à l'état actuel de la science que, si $\mathfrak{m}$ est un nombre cardinal non fini, $2^{\mathfrak{m}}$ est un nombre cardinal transfini.

[3]) Fund. Math. **3**, p. 1.

Sur la différence de deux nombres cardinaux.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

$\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ étant deux nombres cardinaux, on dit que la différence $\mathfrak{m}-\mathfrak{n}$ existe, s'il existe un et un seul nombre cardinal $\mathfrak{p}$, tel que $\mathfrak{m}=\mathfrak{n}+\mathfrak{p}$. On pose alors $\mathfrak{m}-\mathfrak{n}=\mathfrak{p}$.

En admettant l'axiome du choix on démontre que, si $\mathfrak{m}$ est un nombre cardinal non fini, la condition nécessaire et suffisante pour que la différence $\mathfrak{m}-\mathfrak{n}$ existe est que $\mathfrak{n}$ soit un nombre cardinal $<\mathfrak{m}$ (et alors cette différence est $=\mathfrak{m}$)[1]). Le but de cette Note est de démontrer quelques propriétés de la différence de deux nombres cardinaux sans faire appel à l'axiome du choix. Dans cet ordre d'idées nous ne connaissons qu'une seule communication: celle de MM. A. Lindenbaum et A. Tarski contenant (sans démonstration) quelques théorèmes dûs à M. Tarski[2]).

Les propriétés principales de la différence de deux nombres cardinaux sont simples, mais leur démonstration (sans appel à l'axiome du choix) est beaucoup plus difficile qu'on pourrait le croire. Ce sont tout d'abord les propriétés suivantes: si la différence $\mathfrak{m}-\mathfrak{n}$ existe, la différence $\mathfrak{m}_1-\mathfrak{n}$ existe aussi pour tout nombre cardinal $\mathfrak{m}_1>\mathfrak{m}$, ainsi que la différence $\mathfrak{m}-\mathfrak{n}_1$ pour tout nombre cardinal $\mathfrak{n}_1<\mathfrak{n}$. Les démonstrations de ces propriétés sont basées sur le lemme suivant de M. Tarski (énoncé par lui sans démonstration dans la communication citée, p. 301, et dont la démonstration sans appel à l'axiome du choix j'ai publié dans ce volume)[3]).

[1]) Voir p. e. mon livre *Leçons sur les nombres transfinis*, Paris 1928, p. 233.

[2]) Comptes rendus des séances de la Soc. des Sciences et des Lettres de Varsovie, 19, Cl. III (1926), p. 307.

[3]) Fund. Math. **34**, p. 113.

Lemme de M. Tarski. *Si A et B sont deux ensembles tels que $A\sim B$, il existe des ensembles C_1, C_2, D_1 et D_2 remplissant les conditions:* $A-B=C_1+C_2$, $B-A=D_1+D_2$, $C_1C_2=0=D_1D_2$, $C_1\sim D_1$, $C_2+AB\sim AB\sim D_2+AB$.

Théorème 1. *Si la différence $\mathfrak{n}-\mathfrak{p}$ existe, la différence $(\mathfrak{m}+\mathfrak{n})-\mathfrak{p}$ existe aussi et est égale à $\mathfrak{m}+(\mathfrak{n}-\mathfrak{p})$, quel que soit le nombre cardinal $\mathfrak{m}$.*

Démonstration. Soient $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{p}$ deux nombres cardinaux et admettons que la différence $\mathfrak{n}-\mathfrak{p}$ existe. On a donc $\mathfrak{n}\geqslant\mathfrak{p}$, donc $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}>\mathfrak{p}$ et il existe un nombre cardinal $\mathfrak{q}$ tel que $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}=\mathfrak{p}+\mathfrak{q}$. Vu cette égalité, il existe des ensembles disjoints M et N et des ensembles disjoints P et Q tels que $\overline{\overline{M}}=\mathfrak{m}$, $\overline{\overline{N}}=\mathfrak{n}$, $\overline{\overline{P}}=\mathfrak{p}$, $\overline{\overline{Q}}=\mathfrak{q}$ et $M+N=P+Q$. Or, comme $\mathfrak{n}\geqslant\mathfrak{p}$, il existe un ensemble $P_1\subset N$, tel que $\overline{\overline{P_1}}=\mathfrak{p}$. On a donc $P\sim P_1$ et d'après le lemme de M. Tarski, il existe des ensembles C_1, C_2, D_1 et D_2 tels que $P-P_1=C_1+C_2$, $P_1-P=D_1+D_2$, $C_1C_2=0=D_1D_2$, $C_1\sim D_1$, $C_2+PP_1\sim PP_1\sim D_2+PP_1$.

Soit f une transformation biunivoque de l'ensemble C_1 en D_1 et soit g une transformation biunivoque de C_2+PP_1 en PP_1. Comme $P_1\subset N$, on a $PN=PP_1+(P-P_1)N=PP_1+C_2N+C_1N$. Or, comme $PP_1+C_2\sim PP_1$ et $PP_1\subset PP_1+C_2N\subset PP_1+C_2$, il vient $PP_1+C_2N\sim PP_1$. On a par conséquent $PN\sim PP_1+C_1N$ (puisque $(PP_1+C_2N)C_1N=0$). Or, je dis que l'ensemble $S=PN+f(C_1M)$ est de puissance $\mathfrak{p}$. En effet, comme $f(C_1M)\subset D_1\subset P_1-P$, les ensembles PN et $f(C_1M)$ sont disjoints. En outre $f(C_1M)\sim C_1M=C_1-C_1N$ et $(C_1-C_1N)(PP_1+C_1N)=0$. On a donc

$$PN+f(C_1M)\sim PP_1+C_1N+(C_1-C_1N)=$$
$$=PP_1+C_1\sim PP_1+D_1\sim PP_1+D_2+D_1=P_1,$$

puisque $PP_1\sim PP_1+D_2$ et $(PP_1+D_2)D_1=0$. Comme $\overline{\overline{P_1}}=\mathfrak{p}$, l'ensemble S est donc de puissance $\mathfrak{p}$. Or, je dis que l'ensemble $T=g(PP_1)+D_1+D_2$ est de puissance $\mathfrak{p}$. En effet, les termes de T sont disjoints, puisque $g(PP_1)\subset PP_1$ et $(PP_1)(D_1+D_2)=0$. En outre $g(PP_1)\sim PP_1$; on a donc $T\sim PP_1+D_1+D_2=P_1$, d'où $T=\mathfrak{p}$. Vu que $S\subset N$, $T\subset N$, $\overline{\overline{S}}=\overline{\overline{T}}=\mathfrak{p}$ et vu que la différence $\mathfrak{n}-\mathfrak{p}$ existe, les ensembles $R_1=N-T$ et $R_2=N-S$ sont tous les deux de puissance $\mathfrak{n}-\mathfrak{p}$ et il existe une transformation biunivoque h de R_1 en R_2. Vu que $C_2P_1P=0$ et que la fonction g est à valeurs distinctes sur C_2+PP_1,

on a $g(C_2)g(PP_1)=0$. De plus $g(C_2)(D_1+D_2)=0$, puisque $g(C_2)\subset PP_1$ et $(PP_1)(D_1+D_2)=0$. On a donc $g(C_2)\cdot T=0$, d'où comme $g(C_2)\subset N$, on déduit $g(C_2)\subset R_1$ et, à plus forte raison, $g(C_2M)\subset R_1$; d'où l'existence de l'ensemble $h(g(C_2M))\subset R$. Posons $P_2=PN+f(C_1M)+h(g(C_2M))$; comme $[PN+f(C_1M)]R_2=0$, les termes de la somme P_2 sont disjoints. Comme $PN+f(C_1M)\subset PP_1$ et comme $h(g(C_2M))\sim C_2M$ et $PP_1+C_2\sim PP_1$, nous concluons sans peine que

$$PN+f(C_1M)+h(g(C_2M))\sim PN+f(C_1M),$$

c.à d. que $P_2\sim S$, donc $\overline{\overline{P_2}}=\mathfrak{p}$, d'où vu que $P_2\subset N$, on a $\overline{\overline{N-P_2}}=\mathfrak{n}-\mathfrak{p}$ et $\overline{\overline{(M+N)-P_2}}=\mathfrak{m}+(\mathfrak{n}-\mathfrak{p})$ (puisque $(M+N)-P_2=M+(N-P_2)$). Envisageons les décompositions en ensembles disjoints

$$P=PN+C_1M+C_2M \quad \text{et} \quad P_2=PN+f(C_1M)+h(g(C_2M)).$$

Les ensembles C_1M+C_2M et $f(C_1M)+h(g(C_2M))$ sont disjoints (puisque le second est $\subset N$). On a donc

$$P_2-P=f(C_1M)+h(g(C_2M))\sim C_1M+C_2M=P-P_2,$$

d'où $P_2-P\sim P-P_2$. Or, on a $(M+N)-P=[(M+N)-(P+P_2)]+(P_2-P)$ et $(M+N)-P_2=[(M+N)-(P+P_2)]+(P-P_2)$. Par conséquent $(M+N)-P\sim(M+N)-P_2$; l'ensemble $Q=(M+N)-P$ est donc de puissance $\mathfrak{m}+(\mathfrak{n}-\mathfrak{p})$. Il vient $\mathfrak{q}=\mathfrak{m}+(\mathfrak{n}-\mathfrak{p})$, ce qui prouve que le nombre $(\mathfrak{m}+\mathfrak{n})-\mathfrak{p}$ existe et qu'il est égal à $\mathfrak{m}+(\mathfrak{n}-\mathfrak{p})$. Le théorème 1 est ainsi démontré.

Théorème 2. *Si la différence $\mathfrak{m}-(\mathfrak{n}+\mathfrak{p})$ existe, la différence $\mathfrak{m}-\mathfrak{n}$ existe aussi et est égale à $[\mathfrak{m}-(\mathfrak{n}+\mathfrak{p})]+\mathfrak{p}$.*

Démonstration. L'existence de la différence $\mathfrak{m}-(\mathfrak{n}+\mathfrak{p})$ implique que $\mathfrak{m}\geqslant\mathfrak{n}+\mathfrak{p}$ d'où $\mathfrak{m}\geqslant\mathfrak{n}$. Soit M un ensemble de puissance $\mathfrak{m}$, N un sous-ensemble arbitraire de M de puissance $\mathfrak{n}$ et soit T un sous-ensemble de M de puissance $\mathfrak{n}+\mathfrak{p}$. On a donc $T=N_1+P$, où $N_1P=0$, $\overline{\overline{N_1}}=\mathfrak{n}$, $\overline{\overline{P}}=\mathfrak{p}$. Donc $N\sim N_1$ et d'après le lemme de M. Tarski, il existe des ensembles C_1, C_2, D_1 et D_2 tels que

$$N-N_1=C_1+C_2, \qquad N_1-N=D_1+D_2,$$
$$C_1C_2=0=D_1D_2, \qquad C_1\sim D_1, \qquad C_2+NN_1\sim NN_1\sim D_2+NN_1.$$

Soit f une transformation biunivoque de l'ensemble C_1 en D_1 et soit g une transformation biunivoque de C_2+NN_1 en NN_1. Posons

$$S_1=C_1+C_2+P+f(PC_1)+g(NN_1).$$

Je dis que $S_1=\mathfrak{n}+\mathfrak{p}$. En effet, vu la définition de S_1, on a, comme on voit sans peine, une décomposition de S_1 en 5 ensembles disjoints:

$$S_1=P+(C_1-P)+(C_2-P)+f(PC_1)+g(NN_1).$$

Or, on a $f(PC_1)\sim PC_1$, $g(NN_1)\sim NN_1$ et comme $NN_1\sim NN_1+C_2$ on a, à plus forte raison, $NN_1\sim NN_1+PC_2$; vu que

$$PC_1(NN_1+PC_2)=0 \quad \text{et} \quad [(C_1-P)+(C_2-P)](PC_1+NN_1+PC_2)=0,$$

on trouve donc

$$(C_1-P)+(C_2-P)+f(PC_1)+g(NN_1)\sim(C_1-P)+C_1P+(C_2-P)+$$
$$+PC_2+NN_1=C_1+C_2+NN_1=(N-N_1)+NN_1=N.$$

L'ensemble S_1 est donc une somme de deux ensembles disjoints dont l'un est P et l'autre est $\sim N$. Par conséquent $\overline{\overline{S_1}}=\overline{\overline{P}}+\overline{\overline{N}}=\mathfrak{p}+\mathfrak{n}$, c. q. f. d.

Posons maintenant $S_2=N+P+f(PC_1)$. On a

$$f(PC_1)\subset f(C_1)=D_1\subset N_1-N$$

et comme $PN_1=0$, on trouve $(P+N)f(PC_1)=0$ et la formule pour S_2 donne $\overline{\overline{S_2}}=\overline{\overline{N+P}}+\overline{\overline{f(PC_1)}}$. Or, comme $f(PC_1)\sim PC_1\subset PN$, on a $\overline{\overline{f(PC_1)}}\leqslant\overline{\overline{PN}}$, donc $\overline{\overline{S_2}}\leqslant\overline{\overline{N+P}}+\overline{\overline{PN}}=\overline{\overline{N}}+\overline{\overline{P}}=\mathfrak{n}+\mathfrak{p}$, d'où $\overline{\overline{S_2}}\leqslant\mathfrak{n}+\mathfrak{p}$.

On déduit sans peine du théorème de Cantor-Bernstein que, si $X\supset Y$ et $Y\sim Y+Z$, on a $X\sim X+Z$. Les formules $S_2\supset N\supset NN_1$, $NN_1\sim NN_1+D_2$ et $D_2=f(C_2)\supset f(PC_2)$ entraînent:

$$S_2\sim S_2+D_2\supset N+P+f(PC_1)+f(PC_2)=$$
$$=N+P+f(PC_1+PC_2)=N+P+f(PN),$$

puisque $PC_1+PC_2=P(N-N_1)=PN$ (vu que $PN_1=0$). Or, les ensembles $N+P$ et $f(PN)$ sont disjoints (puisque $f(PN)\subset N_1-N$); la formule $S_2+D_2\supset N+P+f(PN)$ donne donc $\overline{\overline{S_2+D_2}}\geqslant\overline{\overline{N+P}}+\overline{\overline{f(PN)}}$. De plus $\overline{\overline{f(PN)}}=\overline{\overline{PN}}$; vu que $S_2\sim S_1+D_2$, on a donc

$$\overline{\overline{S_2}}\geqslant\overline{\overline{N+P}}+\overline{\overline{NP}}=\overline{\overline{N}}+\overline{\overline{P}}=\mathfrak{n}+\mathfrak{p}.$$

Nous avons prouvé auparavant que $\overline{\overline{S_2}}\leqslant\mathfrak{n}+\mathfrak{p}$. Donc $\overline{\overline{S_2}}=\mathfrak{n}+\mathfrak{p}$, c. q. f. d.

Les ensembles S_1 et S_2 sont donc tous les deux de puissance $\mathfrak{n}+\mathfrak{p}$; comme la différence $\mathfrak{m}-(\mathfrak{n}+\mathfrak{p})$ existe, on a $M-S_1\sim M-S_2$. Soit h une transformation biunivoque de l'ensemble $M-S_1$ en $M-S_2$. On a $C_2\cdot NN_1=0$ et, la fonction g étant à valeurs distinctes dans l'ensemble C_2+NN_1, il vient $g(C_2)\cdot g(NN_1)=0$ et, à plus forte raison, $g(PC_2)g(NN_1)=0$. D'autre part, comme $g(PC_2)\subset NN_1$, on a $g(PC_2)[C_1+C_2+P+f(PC_1)]=0$. On a donc $g(PC_2)\cdot S_1=0$, d'où $g(PC_2)\subset M-S_1$ et l'ensemble $h(g(PC_2))\subset M-S_2$ existe. Posons

$$P_1=(P-N)+f(PC_1)+h(g(PC_2)).$$

Vu que $f(PC_1)\subset S_2$, $P-N\subset S_2$, $h(g(PC_2))\subset M-S_2$, les sommandes de P_1 sont disjoints. Or, on a $f(PC_1)\sim PC_1$, $h(g(PC_2))\sim PC_2$ et les ensembles $P-N$, PC_1 et PC_2 sont disjoints. Donc

$$P_1\sim(P-N)+PC_1+PC_2=(P-N)+PN=P,$$

d'où $\overline{\overline{P_1}}=\mathfrak{p}$. Comme

$$f(PC_1)\subset N_1-N, \qquad h(g(PC_2))\subset M-S_2\subset M-N,$$

il vient $P_1N=0$. Par conséquent $\overline{\overline{N+P_1}}=\overline{\overline{N}}+\overline{\overline{P}}=\mathfrak{n}+\mathfrak{p}$, d'où $\overline{\overline{M-(N+P_1)}}=\mathfrak{m}-(\mathfrak{n}+\mathfrak{p})$ et, comme $M-N=[M-(N+P_1)]+P_1$, on trouve $\overline{\overline{M-N}}=[\mathfrak{m}-(\mathfrak{n}+\mathfrak{p})]+\mathfrak{p}$. L'ensemble N étant un sous-ensemble arbitraire de puissance $\mathfrak{n}$ de M, cela prouve que la différence $\mathfrak{m}-\mathfrak{n}$ existe et qu'elle est égale à $[\mathfrak{m}-(\mathfrak{n}+\mathfrak{p})]+\mathfrak{p}$. Le théorème 2 est ainsi démontré.

Corollaire 1. *Si l'un des nombres $\mathfrak{m}-(\mathfrak{n}+\mathfrak{p})$ et $(\mathfrak{m}-\mathfrak{n})-\mathfrak{p}$, existe, l'autre existe aussi et ces deux nombres sont égaux*[4]).

Démonstration. D'après le théorème 2, si le nombre $\mathfrak{m}-(\mathfrak{n}+\mathfrak{p})$ existe, le nombre $\mathfrak{m}-\mathfrak{n}$ existe également et on a

$$\mathfrak{m}-\mathfrak{n}=[\mathfrak{m}-(\mathfrak{n}+\mathfrak{p})]+\mathfrak{p}\geqslant\mathfrak{p}.$$

En supposant que $\mathfrak{m}-\mathfrak{n}=\mathfrak{p}+\mathfrak{q}$, on a $\mathfrak{m}=\mathfrak{n}+\mathfrak{p}+\mathfrak{q}$ et, comme la différence $\mathfrak{m}-(\mathfrak{n}+\mathfrak{p})$ existe, on a $\mathfrak{q}=\mathfrak{m}-(\mathfrak{n}+\mathfrak{p})$. Cela prouve que la différence $(\mathfrak{m}-\mathfrak{n})-\mathfrak{p}$ existe et qu'elle est égale à $\mathfrak{m}-(\mathfrak{n}+\mathfrak{p})$.

D'autre part, si le nombre $(\mathfrak{m}-\mathfrak{n})-\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$ existe, on a $\mathfrak{m}-\mathfrak{n}=\mathfrak{p}+\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}+\mathfrak{p}+\mathfrak{q}$. Or, si $\mathfrak{m}=\mathfrak{n}+\mathfrak{p}+\mathfrak{q}_1$, alors, vu que la différence $\mathfrak{m}-\mathfrak{n}$ existe, on a $\mathfrak{p}+\mathfrak{q}_1=\mathfrak{m}-\mathfrak{n}$ et, vu que la différence $(\mathfrak{m}-\mathfrak{n})-\mathfrak{p}$

---

[4]) A. Tarski. l. c., th. 49.

existe, on a $\mathfrak{q}_1=(\mathfrak{m}-\mathfrak{n})-\mathfrak{p}$, donc $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}_1$. Cela prouve que la différence $\mathfrak{m}-(\mathfrak{n}+\mathfrak{p})$ existe et qu'elle est égale à $(\mathfrak{m}-\mathfrak{n})-\mathfrak{p}$.

Le corollaire 1 est ainsi démontré.

Corollaire 2. *Si les nombres* $\mathfrak{m}-\mathfrak{n}$ *et* $\mathfrak{n}-\mathfrak{p}$ *existent, le nombre* $\mathfrak{m}-(\mathfrak{n}-\mathfrak{p})$ *existe aussi et est égal à* $(\mathfrak{m}-\mathfrak{n})+\mathfrak{p}$ [5].

Démonstration. D'après le théorème 2, l'existence des différences $\mathfrak{m}-\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}-\mathfrak{p}$ implique l'existence de la différence $\mathfrak{m}-(\mathfrak{n}-\mathfrak{p})$ (puisque $\mathfrak{n}=(\mathfrak{n}-\mathfrak{p})+\mathfrak{p}$). On a évidemment

$$(\mathfrak{n}-\mathfrak{p})+[(\mathfrak{m}-\mathfrak{n})+\mathfrak{p}]=[(\mathfrak{n}-\mathfrak{p})+\mathfrak{p}]+(\mathfrak{m}-\mathfrak{n})=\mathfrak{n}+(\mathfrak{m}-\mathfrak{n})=\mathfrak{m},$$

d'où, vu que la différence $\mathfrak{m}-(\mathfrak{n}-\mathfrak{p})$ existe, nous concluons qu'elle est égale à $(\mathfrak{m}-\mathfrak{n})+\mathfrak{p}$.

Théorème 3. *Si n est un nombre naturel et $\mathfrak{m}$ un nombre cardinal $>n$, la différence $\mathfrak{m}-n$ existe.*

Démonstration. D'après l'inégalité $\mathfrak{m}>n$, il existe un nombre cardinal $\mathfrak{p}$ tel que $\mathfrak{m}=n+\mathfrak{p}$. Soit $\mathfrak{q}$ un nombre cardinal tel que $\mathfrak{m}=n+\mathfrak{q}$. Soit M un ensemble de puissance $\mathfrak{m}$. Comme $\mathfrak{m}=n+\mathfrak{p}=n+\mathfrak{q}$, il existe des ensembles N et N_1 à n éléments et des ensembles P et Q tels que

$$\overline{\overline{P}}=\mathfrak{p},\quad \overline{\overline{Q}}=\mathfrak{q},\quad NP=0=N_1Q,\quad M=N+P=N_1+Q.$$

Il vient $PN_1=(M-N)N_1=N_1-N$, donc

$$P=PQ+PN_1=PQ+(N_1-N)$$

et, pareillement, on trouve $Q=PQ+(N-N_1)$ et (vu que $PN=QN_1=0$) on a $PQ(N_1-N)=0$ et $PQ(N-N_1)=0$. Or, les ensembles N et N_1 ayant chacun n éléments, on a $\overline{\overline{N-N_1}}=\overline{\overline{N_1-N}}$ (puisque $N-N_1=N-NN_1$, $N_1-N=N_1-NN_1$). Les formules obtenues pour P et Q prouvent donc que $\overline{\overline{P}}=\overline{\overline{Q}}$, c. à d. que $\mathfrak{q}=\mathfrak{p}$. La différence $\mathfrak{m}-n$ existe donc, c. q. f. d.

Corollaire. *Soient $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ deux nombres cardinaux et n un nombre naturel. Si l'on a $\mathfrak{m}+n=\mathfrak{n}+n$, alors $\mathfrak{m}=\mathfrak{n}$.*

En effet, en posant $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}+n=\mathfrak{n}+n$, on a $\mathfrak{m}=\mathfrak{p}-n$ et $\mathfrak{n}=\mathfrak{p}-n$.

[5]) A. Tarski, l. c., th. 50.

Théorème 4. *Pour que la différence $\mathfrak{m}-\aleph_0$ existe pour tout nombre cardinal $\mathfrak{m}>\aleph_0$ il faut et il suffit que tout nombre cardinal non fini soit transfini* (c. à d. que tout nombre cardinal soit ou bien $<\aleph_0$, ou bien $\geqslant\aleph_0$).

Démonstration. Supposons que tout nombre cardinal est soit $<\aleph_0$, soit $\geqslant\aleph_0$. Pour chaque nombre cardinal $\mathfrak{m}>\aleph_0$, il existe donc un nombre cardinal $\mathfrak{p}$, tel que $\mathfrak{m}=\aleph_0+\mathfrak{p}$. Si l'on avait $\mathfrak{p}\leqslant\aleph_0$, on aurait $\mathfrak{m}=\aleph_0+\mathfrak{p}\leqslant\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$, d'où $\mathfrak{m}\leqslant\aleph_0$, contrairement à l'hypothèse. On n'a donc pas $\mathfrak{p}\leqslant\aleph_0$; vu notre hypothèse sur les nombres cardinaux, on a donc $\mathfrak{p}>\aleph_0$, ce qui entraîne, comme on sait, que $\aleph_0+\mathfrak{p}=\mathfrak{p}$. Il vient $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}$. Cela prouve que la différence $\mathfrak{m}-\aleph_0$ existe et qu'ells est $=\mathfrak{m}$.

Or, admettons que pour tout nombre cardinal $\mathfrak{m}>\aleph_0$ la différence $\mathfrak{m}-\aleph_0$ existe, et soit $\mathfrak{n}$ un nombre cardinal quelconque. Si l'on n'a pas $\mathfrak{n}\leqslant\aleph_0$, on a alors, comme on voit sans peine, $\mathfrak{n}+\aleph_0>\aleph_0$ (puisque, en tout cas, $\mathfrak{n}+\aleph_0\geqslant\aleph_0$, et l'égalité $\mathfrak{n}+\aleph_0=\aleph_0$ donnerait $\mathfrak{n}\leqslant\aleph_0$). D'après notre hypothèse, la différence $(\mathfrak{n}+\aleph_0)-\aleph_0$ existe donc, c. à d. il existe un et un seul nombre cardinal $\mathfrak{p}$ tel que $\mathfrak{n}+\aleph_0=\aleph_0+\mathfrak{p}$ et, comme $\mathfrak{n}+\aleph_0=\aleph_0+\mathfrak{n}$, on trouve $\mathfrak{p}=\mathfrak{n}$. Or, on a aussi

$$\aleph_0+(\aleph_0+\mathfrak{n})=(\aleph_0+\aleph_0)+\mathfrak{n}=\aleph_0+\mathfrak{n};$$

par suite $\aleph_0+\mathfrak{n}=\mathfrak{n}$, d'où $\mathfrak{n}\geqslant\aleph_0$.

Le théorème 4 est ainsi démontré.

Théorème 5. *L'hypothèse de l'existence de la différence $\mathfrak{m}-\mathfrak{n}$ pour tout nombre cardinal $\mathfrak{m}$ et tout nombre cardinal $\mathfrak{n}<\mathfrak{m}$, équivaut à l'axiome du choix* [6]).

Démonstration. Cette hypothèse résulte, comme on sait de l'axiome du choix [7]). Il suffira donc démontrer qu'elle entraîne l'axiome du choix.

Soit donc $\mathfrak{m}$ un nombre cardinal non fini quelconque. Comme on sait, on peut démontrer sans faire appel à l'axiome du choix qu'il existe un aleph, $\aleph(\mathfrak{m})$, pour lequel on n'a pas $\aleph(\mathfrak{m})\leqslant\mathfrak{m}$ [8]). On aura évidemment $\mathfrak{m}+\aleph(\mathfrak{m})\geqslant\aleph(\mathfrak{m})$. Si l'on avait $\mathfrak{m}+\aleph(\mathfrak{m})>\aleph(\mathfrak{m})$, il résulterait alors de notre hypothèse que la différence

[6]) Ce théorème est énoncé sans démonstration par A. Tarski, l. c., p. 312, th. 82, A_8.

[7]) Cf. p. 119, renvoi 1.

[8]) Voir W. Sierpiński, Fund. Math. **2**, p. 118, aussi A. Tarski, Fund. Math. **5**, p. 148.

$[\mathfrak{m}+\aleph(\mathfrak{m})]-\aleph(\mathfrak{m})$ existe, donc qu'il existe un seul nombre cardinal $\mathfrak{p}$ tel que $\mathfrak{m}+\aleph(\mathfrak{m})=\mathfrak{p}+\aleph(\mathfrak{m})$. Or, cette formule est vraie pour $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}$ et pour $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}+\aleph(\mathfrak{m})$ (puisque $\aleph(\mathfrak{m})+\aleph(\mathfrak{m})=\aleph(\mathfrak{m})$). On aurait donc $\mathfrak{m}+\aleph(\mathfrak{m})=\mathfrak{m}$, d'où $\aleph(\mathfrak{m})\leqslant\mathfrak{m}$, contrairement à la définition du nombre $\aleph(\mathfrak{m})$. On n'a donc pas $\mathfrak{m}+\aleph(\mathfrak{m})>\aleph(\mathfrak{m})$; par conséquent $\mathfrak{m}+\aleph(\mathfrak{m})=\aleph(\mathfrak{m})$, d'où $\mathfrak{m}\leqslant\aleph(\mathfrak{m})$, ce qui prouve que $\mathfrak{m}$ est un aleph. Notre hypothèse entraîne donc que tout nombre cardinal non fini est un aleph, d'où résulte, comme on sait, l'axiome du choix.

Notre théorème est ainsi démontré.

Séparabilité et multiplication cartésienne des espaces topologiques [1]).

Par

Edward Marczewski (Wrocław).

Dans les espaces métriques, *la séparabilité* peut être formulée, comme on sait, de diverses manières équivalentes, p. ex. comme l'existence d'une base dénombrable d'ensembles ouverts, l'existence d'un ensemble dénombrable partout dense, la dénombrabilité de toute famille d'ensembles ouverts disjoints, etc.

Par contre, dans les espaces topologiques plus généraux, ces propriétés cessent d'être équivalentes. Ce phenomène se présente d'une façon naturelle surtout dans l'étude *des produits cartésiens transfinis*.

J'examine dans ce travail d'abord plusieurs propriétés des espaces topologiques généraux qui dans les espaces métriques équivalent à la séparabilité (n^0 1); ensuite j'établis quelques théorèmes sur les produits cartésiens (n^0 2) et, enfin, je discute *l'invariance* des propriétés en question *envers la multiplication cartésienne* (n^0 3)[2]). Les résultats acquis entraînent en particulier quelques propriétés du discontinu généralisé de Cantor et de quelques autres espaces connus (3.4).

Espace topologique ou bien *espace* tout court est entendu ici comme un espace satisfaisant aux trois axiomes énoncés dans la *Topologie I* de M. Kuratowski [1, p. 15] ou, ce qui revient au même, comme „T_1-Raum" au sens de Alexandroff-Hopf [1, p. 59]. En outre, la démonstration d'une partie du théorème 3.2 fait appel à l'existence dans l'espace de deux ensembles ouverts disjoints et non vides, ce qui a lieu en particulier dans chaque „T_2-Raum" (cf. Alexandroff-Hopf [1, p. 67]) ne se réduisant pas à un point. Dans le n^0 3 tout entier, on suppose qu'aucun des espaces considérés $X(t)$ ne se réduit à un point.

---

[1]) Les résultats principaux de ce travail ont été présentés dans une séance organisée par la Faculté des Sciences de l'Université de Lwów en mai 1941.

[2]) Rappelons ici que, pour la bicompacité, le problème analogue est résolu par la généralisation de E. Čech [1, p. 830] du théorème de A. Tychonoff [1], d'après laquelle la bicompacité est un invariant de la multiplication cartésienne transfinie.