[13] J. B. Rosser, *Gödel's theorems for non constructive logics*. The Journal of Symbolic Logic, vol. **2** (1937), pp. 129-137.

[14] J. B. Rosser, *Extensions of some theorems of Gödel and Church*. Ib., vol. **1** (1936), pp. 87-91.

[15] J. B. Rosser, Review of [5]. Ib., vol. 1 (1936), p. 116.

[16] Alfred Tarski, *Fundamentale Begriffe de Methodologie der deduktiven Wissenschaften I*. Monatshefte für Mathematik und Physik, vol. **37** (1930), pp. 361-404.

[17] Alfred Tarski, *Einige Betrachtungen über die Begriffe der ω-Widerspruchsfreiheit und ω-Vollständigkeit*. Ib., vol. **40** (1933), pp. 97-112.

[18] Alfred Tarski, *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*. Studia Philosophica, vol. **1** (1935), pp. 261-405.

[19] Alfred Tarski, *Sur les ensembles définissables de nombres réels*. Fundamenta Mathematicae, vol. **17** (1931), pp. 210-239.

[20] Alfred Tarski, *On undecidable statements in enlarged systems of logic and the concept of truth*. The Journal of Symbolic Logic, vol. **4** (1939), pp. 105-112.

[21] A. M. Turing, *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*. Proceedings of the London Mathematical Society (2), vol. **42** (1937), pp. 230-265.

Note. This paper was already under press, when an interesting paper of S. C. Kleene, *Recursive predicates and quantifiers* (Transactions of the American Mathematical Society, vol. **53** (1943), pp. 41-83) became available in Poland.

A considerable part of the theory developed above is to be found in the Kleene's paper. It seems me, however, that some of my results are new (e.g. remarks 4.3) and that my presentation of the theory based on analogies with the theory of projective sets may be of some interest for a mathematical reader.

Professor A. Tarski informed me that he also found already in 1942 results very similar to mines.

Démonstration de l'égalité $2^{\mathfrak{m}}-\mathfrak{m}=2^{\mathfrak{m}}$ pour les nombres cardinaux transfinis.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

$\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ étant deux nombres cardinaux, on dit que $\mathfrak{m}-\mathfrak{n}=\mathfrak{p}$ si $\mathfrak{p}$ est le seul nombre cardinal tel que $\mathfrak{m}=\mathfrak{n}+\mathfrak{p}$.

En 1926 M. A. Tarski a énoncé [1]) ce

Théorème: *On peut démontrer sans utiliser l'axiome du choix que, lorsque $\mathfrak{m}$ est un nombre cardinal transfini* (c. à. d. $\geqslant\aleph_0$), *on a*

$$2^{\mathfrak{m}}-\mathfrak{m}=2^{\mathfrak{m}} \quad [2]). \tag{1}$$

M. Tarski n'a pas publié la démonstration de ce théorème. Il a seulement indiqué (l. c.) qu'elle s'appuie sur les lemmes 4, 6 et 58 énoncés également sans démonstration (l. c., p. 301 et p. 308).

La démonstration du théorème et des lemmes de M. Tarski m'est inconnue. Dans cette Note je vais démontrer le lemme 5 de M. Tarski et j'en déduirai son théorème (sans utiliser les lemmes 4 et 58).

Lemme 1 (de M. Tarski). *On peut démontrer sans utiliser l'axiome du choix que si A et B sont deux ensembles tels que $A\sim B$, il existe des ensembles C_1, C_2, D_1 et D_2 remplissant les conditions*:

$$A-B=C_1+C_2, \qquad B-A=D_1+D_2, \qquad C_1C_2=0=D_1D_2,$$
$$C_1\sim D_1, \qquad C_2+AB\sim AB\sim D_2+AB.$$

[1]) Comptes rendus des séances de la Soc. des Sciences et des Lettres de Varsovie **19** (1926), Classe III, p. 307, Th. 56. Aussi: Ann. Soc. Polonaise de Math. **5** (1926), p. 101.

[2]) Il résulte du théorème de Zermelo sur le bon ordre qu'on a $\mathfrak{n}-\mathfrak{m}=\mathfrak{n}$ pour tout nombre cardinal transfini $\mathfrak{n}$ et tout nombre cardinal $\mathfrak{m}<\mathfrak{n}$, donc, en particulier, que $2^{\mathfrak{m}}-\mathfrak{m}=2^{\mathfrak{m}}$ pour tout nombre cardinal transfini $\mathfrak{m}$; voir p. e. mes *Leçons sur les nombres transfinis*, Paris 1928, p. 233.

Démonstration. Comme $A \sim B$, il existe une transformation biunivoque φ de l'ensemble A en l'ensemble B. Soit φ^{-1} la transformation inverse. Pour tout élément x de A, $\varphi(x)$ est donc un élément déterminé de B. Si $\varphi(x) \in A$, $\varphi^2(x) = \varphi(\varphi(x))$ est un élément de B. Généralement, si pour un nombre naturel n, $\varphi^n(x)$ est un élément de A, $\varphi^{n+1}(x)$ est un élément de B. Pareillement, pour tout élément y de B, $\varphi^{-1}(y)$ est un élément déterminé de A, et, si pour un nombre naturel n, $\varphi^{-n}(y)$ est un élément de B, $\varphi^{-n-1}(y)$ est un élément de A.

Désignons par C_2 l'ensemble de tous les éléments x (de A) tels que

$$(2) \qquad x \in A-B \quad \text{et} \quad \varphi^n(x) \in A, \qquad \text{pour } n=1,2,\ldots;$$

désignons par D_2 l'ensemble de tous les éléments y (de B) tels que

$$(3) \qquad y \in B-A \quad \text{et} \quad \varphi^{-n}(y) \in B, \qquad \text{pour } n=1,2,\ldots,$$

et posons

$$(4) \qquad C_1 = (A-B)-C_2, \qquad D_1 = (B-A)-D_2.$$

Je dis que les ensembles C_1, C_2, D_1 et D_2 satisfont à notre lemme. Il suffira évidemment de démontrer que

$$(5) \qquad C_1 \sim D_1 \quad \text{et} \quad C_2 + AB \sim AB \sim D_2 + AB.$$

Désignons par P_n, pour n naturel, l'ensemble de tous les éléments x (de A), tels que

$$(6) \qquad x \in A-B,\ \varphi(x) \in A \qquad \text{pour } k=1,2,\ldots,n-1, \text{ et } \varphi^n(x) \in B-A,$$

et désignons par Q_n l'ensemble de tous les éléments y (de B), tel que

$$(7) \qquad y \in B-A,\ \ \varphi^{-k}(y) \in B \quad \text{pour } k=1,2,\ldots,n-1, \text{ et } \varphi^{-n}(y) \in A-B.$$

Les ensembles $P_1, P_2, \ldots$ et $Q_1, Q_2, \ldots$ sont évidemment deux à deux disjoints.

Il résulte tout de suite de (4) et de la définition des ensembles C_2, D_2, P_n et Q_n que

$$(8) \qquad C_1 = P_1 + P_2 + \ldots \quad \text{et} \quad D_1 = Q_1 + Q_2 + \ldots$$

Je dis que pour tout n naturel donné la fonction $\varphi^n(x)$ est déterminée pour tout élément x de P_n et qu'on a

$$(9) \qquad \varphi^n(P_n) = Q_n.$$

Soit, en effet, x un élément de P_n; vu la définition de P_n, on a donc les formules (6). Posons $y = \varphi^n(x)$; d'après (6) on a donc $y \in B-A$ et

$$\varphi^{-n}(y) = \varphi^{-n}(\varphi^n(x)) = x \in A-B.$$

Or,

$$\varphi^{-k}(y) = \varphi^{-k}(\varphi^n(x)) = \varphi^{n-k}(x) \in B \qquad \text{pour } k=1,2,\ldots,n-1,$$

puisque, si $\varphi^p(x)$ existe pour un p naturel, on a $\varphi^p(x) \in B$. Vu la définition de Q_n, on a donc $y \in Q_n$. Donc, si $x \in P_n$, on a $\varphi^n(x) \in Q_n$; la fonction $\varphi^n(x)$ est donc définie dans P_n et on a $\varphi^n(P_n) \subset Q_n$.

Soit, d'autre part, y un élément de Q_n; vu la définition de Q_n, on a donc les formules (7). Posons $x = \varphi^{-n}(y)$; d'après (7) nous aurons

$$x \in A-B \quad \text{et} \quad \varphi^n(x) = \varphi^n(\varphi^{-n}(y)) = y \in B-A.$$

Or,

$$\varphi^k(x) = \varphi^k(\varphi^{-n}(y)) = \varphi^{k-n}(y) \in A \qquad \text{pour } k=1,2,\ldots,n-1,$$

puisque, si $\varphi^{-q}(x)$ existe pour un q naturel, on a $\varphi^{-q}(y) \in A$. Vu la définition de P_n, on a d'où $x \in P_n$. Il existe par conséquent, pour tout élément y de Q_n un élément x de P_n tel que $x = \varphi^{-n}(y)$, d'où $\varphi^n(x) = y$; vu que $x \in P_n$, on trouve donc $y \in \varphi^n(P_n)$. On a par suite $y \in \varphi^n(P_n)$ pour $y \in Q_n$, donc $Q_n \subset \varphi^n(P_n)$. Or, nous avons démontré auparavant l'inclusion inverse. On a donc l'égalité (9).

Or, la fonction $\varphi^n(x)$ est évidemment à valeurs distinctes dans tout ensemble dans lequel $\varphi^n(x)$ est un élément déterminé; la formule (9) prouve donc que

$$(10) \qquad P_n \sim Q_n \qquad \text{pour } n=1,2,\ldots$$

Les ensembles $P_1, P_2, \ldots$ et $Q_1, Q_2, \ldots$ étant deux à deux disjoints, il résulte de (8) et (10) que $C_1 \sim D_1$.

D'après la définition de C_2 on a évidemment $C_2 \subset A-B$, donc $C_2 \cdot AB = 0$. Or, pour n naturel, si $x \in C_2$, on a (vu la définition de C_2) $\varphi^n(x) \in A$ et, comme toujours $\varphi^n(x) \in B$ (si $\varphi^n(x)$ est défini), on a $\varphi^n(x) \in AB$ pour $x \in C_2$. Donc, pour $n=1,2,\ldots,\varphi^n(C_2)$ est un ensemble déterminé et on a $\varphi^n(C_2) \subset AB$. Or, je dis que $\varphi^k(C_2)\varphi^l(C_2) = 0$ pour k et l naturels, $k \neq l$. En effet, soit p. e. $l = k+m$, où m est un nombre naturel. Comme $C_2 \subset A-B$ et $\varphi^m(C_2) \subset AB$, on a $C_2\varphi^m(C_2) = 0$, d'où $\varphi^k(C_2\varphi^m(C_2)) = 0$. Or, la fonction φ^k étant définie et à valeurs distinctes dans C_2, on a

$$\varphi^k(C_2\varphi^m(C)) = \varphi^k(C_2 \cdot \varphi^{k+m}(C_2)).$$

La formule $\varphi^k(C_2)\varphi^l(C_2)=0$ pour k et l naturels, $k\neq l$, est ainsi établie. Posons maintenant

$$AB-\sum_{n=1}^{\infty}\varphi^n(C_2)=R.$$

Il vient

(11) $$AB=R+\varphi(C_2)+\varphi^2(C_2)+\varphi^3(C_2)+\dots$$

et

(12) $$C_2+AB=R+C_2+\varphi(C_2)+\varphi^2(C_2)+\dots$$

Or, $\varphi^n(x)$ étant une transformation biunivoque de l'ensemble C_2, on a

(13) $$\varphi(C_2)\sim C_2 \quad \text{et} \quad \varphi^{n+1}(C_2)\sim\varphi^n(C_2) \quad \text{pour } n=1,2,\dots$$

Les ensembles R, C_2, $\varphi(C_2)$, $\varphi^2(C_2)$, ... étant deux à deux disjoints, les formules (11), (12) et (13) prouvent que $C_2+AB\sim AB$.

La démonstration de la formule $D_2+AB\sim AB$ est tout à fait analogue.

Les formules (5) sont ainsi établies et notre lemme se trouve démontré.

Comme l'a signalé M. Tarski (l. c., p. 301, th. 6), le lemme que nous venons de démontrer, formulé en langage de la théorie des nombres cardinaux, prend la forme suivante:

(14) *On peut démontrer sans utiliser l'axiome du choix que, si* $\mathfrak{m}+\mathfrak{p}=\mathfrak{m}+\mathfrak{q}$, *il existe des nombres cardinaux* $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}_1$ *et* $\mathfrak{q}_1$ *tels que*

$$\mathfrak{p}=\mathfrak{n}+\mathfrak{p}_1,\qquad \mathfrak{q}=\mathfrak{n}+\mathfrak{q}_1,\qquad \mathfrak{m}+\mathfrak{p}_1=\mathfrak{m}=\mathfrak{m}+\mathfrak{q}_1.$$

En effet, soit $\mathfrak{m}+\mathfrak{p}=\mathfrak{m}+\mathfrak{q}$ et soient M, P et Q trois ensembles disjoints tels que $\overline{\overline{M}}=\mathfrak{m}$, $\overline{\overline{P}}=\mathfrak{p}$ et $\overline{\overline{Q}}=\mathfrak{q}$. Posons $A=M+P$, $B=M+Q$. Il vient $AB=M$, $A-B=P$, $B-A=Q$. Or, vu que $\mathfrak{m}+\mathfrak{p}=\mathfrak{m}+\mathfrak{q}$, on a $M+P\sim M+Q$, donc $A\sim B$. Soient C_1, C_2, D_1 et D_2 les ensembles satisfaisant au lemme de M. Tarski, et posons

$$\overline{\overline{C_1}}=\overline{\overline{D_1}}=\mathfrak{n},\qquad \overline{\overline{C_2}}=\mathfrak{p}_1,\qquad \overline{\overline{D_2}}=\mathfrak{q}_1.$$

Comme

$$P=A-B=C_1+C_2,\qquad Q=B-A=D_1+D_2,\qquad C_1C_2=D_1D_2=0,$$

on trouve $\mathfrak{p}=\mathfrak{n}+\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{q}=\mathfrak{n}+\mathfrak{q}_1$ et, comme

$$C_2+M=C_2+AB\sim AB=M\sim D_2+AB=D_2+M,$$

on trouve $\mathfrak{p}_1+\mathfrak{m}=\mathfrak{m}=\mathfrak{q}_1+\mathfrak{m}$. La thèse (14) est ainsi établie.

Lemme 2. *Si* $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{p}$ *et* $\mathfrak{s}$ *sont des nombres cardinaux tels que* $2^{\mathfrak{m}}=\mathfrak{m}+\mathfrak{p}$ *et* $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}+\mathfrak{s}$, *on a* $\mathfrak{p}\geqslant 2^{\mathfrak{s}}$.

Démonstration. Soit M un ensemble de puissance $\mathfrak{m}$. Comme $2^{\mathfrak{m}}=\mathfrak{m}+\mathfrak{p}$, l'ensemble T de tous les sous-ensembles de M est une somme de deux ensembles disjoints M_1 et P tels que $\overline{\overline{M_1}}=\mathfrak{m}$ et $\overline{\overline{P}}=\mathfrak{p}$. Or, comme $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}+\mathfrak{s}$, M est une somme de deux ensembles disjoints M_2 et S tels que $\overline{\overline{M_2}}=\mathfrak{m}$ et $\overline{\overline{S}}=\mathfrak{s}$. La formule $M\sim M_1\sim M_2$ implique l'existence d'une transformation biunivoque f de l'ensemble M en M_1 ainsi que d'une transformation biunivoque g de l'ensemble M_2 en M. X étant un sous-ensemble quelconque de S, posons

(15) $$h(X)=X+\underset{x}{E}\,[x\in M_2, x \text{ non}\in f(g(x))].$$

Vu que $M_2S=0$, on a évidemment $h(X_1)\neq h(X_2)$ pour $X_1\subset S$, $X_2\subset S$, $X_1\neq X_2$. Or, s'il on avait $h(X)\in M_1$, il existerait un élément t de M tel que $h(X)=f(t)$. Or, comme $t\in M$, il existe un élément x_0 de M_2 tel que $t=g(x_0)$. On aurait donc $h(X)=f(g(x_0))$, où $x_0\in M_2$. Or, comme $x_0\in M_2$, on a $x_0 \text{ non}\in X$ et, si $x_0\in h(X)$, la formule (15) donne $x_0 \text{ non}\in f(g(x_0))$, et si $x_0 \text{ non}\in h(X)$, on a $x_0 \text{ non}\in f(g(x_0))$ et (vu que $x_0\in M_2$) la formule (15) donne $x_0\in h(X)$. On parvient donc dans tous les cas à une contradiction. Cela prouve que $h(X) \text{ non}\in M_1$, donc (comme évidemment $h(X)\in T$) on a $h(X)\in P$. L'ensemble P a donc au moins autant d'éléments que l'ensemble S a de sous-ensembles; c. à d. $\mathfrak{p}\geqslant 2^{\mathfrak{s}}$, c. q. f. d. Le lemme 2 est ainsi démontré (sans utiliser l'axiome du choix).

Soit maintenant $\mathfrak{m}$ un nombre cardinal transfini. On, a, comme on sait: $2^{\mathfrak{m}}>\mathfrak{m}$. Soit $\mathfrak{p}$ un nombre cardinal tel que $2^{\mathfrak{m}}=\mathfrak{m}+\mathfrak{p}$. Comme $\mathfrak{m}$ est un nombre cardinal transfini, on a $\mathfrak{m}+1=\mathfrak{m}$, donc

$$2^{\mathfrak{m}}=2^{\mathfrak{m}+1}=2^{\mathfrak{m}}+2^{\mathfrak{m}}\geqslant 2^{\mathfrak{m}}+\mathfrak{m}$$

et, comme d'autre part $\mathfrak{m}+2^{\mathfrak{m}}\geqslant 2^{\mathfrak{m}}$, on trouve $2^{\mathfrak{m}}=\mathfrak{m}+2^{\mathfrak{m}}$. On a donc $\mathfrak{m}+\mathfrak{p}=\mathfrak{m}+2^{\mathfrak{m}}$ et, d'après (14), il existe des nombres cardinaux $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{q}_1$ tels que

$$\mathfrak{p}=\mathfrak{n}+\mathfrak{p}_1,\qquad 2^{\mathfrak{m}}=\mathfrak{n}+\mathfrak{q}_1,\qquad \mathfrak{m}+\mathfrak{p}_1=\mathfrak{m}=\mathfrak{m}+\mathfrak{q}_1.$$

Comme $2^{\mathfrak{m}}=\mathfrak{m}+\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}+\mathfrak{q}_1$, on a d'après le lemme 2, $\mathfrak{p}\geqslant 2^{\mathfrak{q}_1}>\mathfrak{q}_1$. Par suite $\mathfrak{p}\geqslant\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{p}>\mathfrak{q}_1$, d'où $2\mathfrak{p}\geqslant\mathfrak{n}+\mathfrak{q}_1=2^{\mathfrak{m}}=2^{\mathfrak{m}+1}$, donc $2\mathfrak{p}\geqslant 2^{\mathfrak{m}+1}$. D'autre part $2^{\mathfrak{m}}=\mathfrak{m}+\mathfrak{p}\geqslant\mathfrak{p}$, d'où $2^{\mathfrak{m}+1}\geqslant 2\mathfrak{p}$. On a ainsi $2\mathfrak{p}=2\cdot 2^{\mathfrak{m}}$. Or, comme j'ai démontré (sans faire appel à l'axiome du choix)[3]), il en résulte que $\mathfrak{p}=2^{\mathfrak{m}}$. On a ainsi la formule (1) et le théorème de M. Tarski se trouve démontré.

Sans se servir de mon théorème cité tout à l'heure (dont la démonstration est assez compliquée) on peut achever la démonstration du théorème de M. Tarski de la façon suivante.

Comme l'a observé M. Tarski, on tire sans peine de son lemme la proposition suivante de M. F. Bernstein:

(16) *On peut démontrer sans utiliser l'axiome du choix que, si* $\mathfrak{m}+\mathfrak{m}=\mathfrak{m}+\mathfrak{q}$, *on a* $\mathfrak{m}\geqslant\mathfrak{q}$.

En effet, d'après (14) (pour $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}$) il existe des nombres cardinaux $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{q}_1$ tels que

$$\mathfrak{m}=\mathfrak{n}+\mathfrak{p}_1, \qquad \mathfrak{q}=\mathfrak{n}+\mathfrak{q}_1, \qquad \mathfrak{m}+\mathfrak{p}_1=\mathfrak{m}=\mathfrak{m}+\mathfrak{q}_1,$$

d'où

$$\mathfrak{m}=\mathfrak{m}+\mathfrak{q}_1=\mathfrak{n}+\mathfrak{p}_1+\mathfrak{q}_1=\mathfrak{q}+\mathfrak{p}_1\geqslant\mathfrak{q}, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

En vertu de (16) on déduit des formules

$$2\mathfrak{p}\geqslant 2^{\mathfrak{m}+1}=2^{\mathfrak{m}}+2^{\mathfrak{m}}\geqslant 2^{\mathfrak{m}}+\mathfrak{p}$$

et $2^{\mathfrak{m}}+\mathfrak{p}\geqslant\mathfrak{p}+\mathfrak{p}$, donc de $\mathfrak{p}+\mathfrak{p}=\mathfrak{p}+2^{\mathfrak{m}}$, que $\mathfrak{p}\geqslant 2^{\mathfrak{m}}$. Or, comme $2^{\mathfrak{m}}=\mathfrak{m}+\mathfrak{p}\geqslant\mathfrak{p}$, on trouve $\mathfrak{p}=2^{\mathfrak{m}}$, c. q. f. d.

Il est à remarquer qu'à l'état actuel de la science nous ne savons pas démontrer le théorème qu'on obtient en remplaçant dans le théorème de M. Tarski le terme „transfini" par „non fini". En effet, si l'on a, pour un nombre cardinal $\mathfrak{m}$, $2^{\mathfrak{m}}=\mathfrak{m}+2^{\mathfrak{m}}$, on a

$$2^{\mathfrak{m}}\leqslant 1+2^{\mathfrak{m}}\leqslant\mathfrak{m}+2^{\mathfrak{m}}=2^{\mathfrak{m}},$$

d'où $2^{\mathfrak{m}}=1+2^{\mathfrak{m}}$ et $2^{\mathfrak{m}}$ est un nombre transfini. Or, nous ne savons pas démontrer à l'état actuel de la science que, si $\mathfrak{m}$ est un nombre cardinal non fini, $2^{\mathfrak{m}}$ est un nombre cardinal transfini.

---

[3]) Fund. Math. **3**, p. 1.

Sur la différence de deux nombres cardinaux.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

$\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ étant deux nombres cardinaux, on dit que la différence $\mathfrak{m}-\mathfrak{n}$ existe, s'il existe un et un seul nombre cardinal $\mathfrak{p}$, tel que $\mathfrak{m}=\mathfrak{n}+\mathfrak{p}$. On pose alors $\mathfrak{m}-\mathfrak{n}=\mathfrak{p}$.

En admettant l'axiome du choix on démontre que, si $\mathfrak{m}$ est un nombre cardinal non fini, la condition nécessaire et suffisante pour que la différence $\mathfrak{m}-\mathfrak{n}$ existe est que $\mathfrak{n}$ soit un nombre cardinal $<\mathfrak{m}$ (et alors cette différence est $=\mathfrak{m}$)[1]). Le but de cette Note est de démontrer quelques propriétés de la différence de deux nombres cardinaux sans faire appel à l'axiome du choix. Dans cet ordre d'idées nous ne connaissons qu'une seule communication: celle de MM. A. Lindenbaum et A. Tarski contenant (sans démonstration) quelques théorèmes dûs à M. Tarski[2]).

Les propriétés principales de la différence de deux nombres cardinaux sont simples, mais leur démonstration (sans appel à l'axiome du choix) est beaucoup plus difficile qu'on pourrait le croire. Ce sont tout d'abord les propriétés suivantes: si la différence $\mathfrak{m}-\mathfrak{n}$ existe, la différence $\mathfrak{m}_1-\mathfrak{n}$ existe aussi pour tout nombre cardinal $\mathfrak{m}_1>\mathfrak{m}$, ainsi que la différence $\mathfrak{m}-\mathfrak{n}_1$ pour tout nombre cardinal $\mathfrak{n}_1<\mathfrak{n}$. Les démonstrations de ces propriétés sont basées sur le lemme suivant de M. Tarski (énoncé par lui sans démonstration dans la communication citée, p. 301, et dont la démonstration sans appel à l'axiome du choix j'ai publié dans ce volume)[3]).

---

[1]) Voir p. e. mon livre *Leçons sur les nombres transfinis*, Paris 1928, p. 233.

[2]) Comptes rendus des séances de la Soc. des Sciences et des Lettres de Varsovie, 19, Cl. III (1926), p. 307.

[3]) Fund. Math. **34**, p. 113.