Un théorème sur les puissances des ensembles.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Le but de cette Note est de démontrer sans faire appel à l'axiome du choix un théorème sur les puissances des ensembles qui semble être tout à fait intuitif, mais dont la démonstration est plus difficile qu'on pourrait le croire. C'est le théorème suivant:

Théorème. *Si M est un ensemble de puissance $\mathfrak{m}$, P un sous-ensemble de M de puissance $\mathfrak{p}$ et si $\mathfrak{n}$ est un nombre cardinal, tel que $\mathfrak{m}\geqslant\mathfrak{n}\geqslant\mathfrak{p}$, il existe un ensemble N de puissance $\mathfrak{n}$ tel que $M\supset N\supset P$.*

Je démontrerai d'abord ce

Lemme. *Soient P et Q deux ensembles quelconques. Si $\varphi(x)$ est une fonction définie pour $x\in Q$ à valeurs quelconques mais distinctes dans Q* [1]) *et si $\psi(x)$ est une fonction définie pour $x\in P$, à valeurs distinctes dans P, telle que $\psi(P)\subset Q$* [2]), *il existe un ensemble E tel que*

$$(1)\qquad Q\supset E\supset Q-\psi(P),\qquad \varphi(E)\psi^{-1}(Q-E)=0\ ^{3)},\qquad \varphi(E)+\psi^{-1}(Q-E)\supset P.$$

Démonstration du lemme. Il existe des ensembles H tels que

$$(2)\qquad Q\supset H\supset Q-\psi(P)$$

et qu'on a

$$(3)\qquad \psi[P\varphi(X)]\subset H\quad\text{pour}\quad X\subset H;$$

tel est p. e. l'ensemble $H=Q$, puisque $\psi(P)\subset Q$. Soit E la partie commune (le produit ΠH) de tous tels ensembles H. D'après (2), on aura

$$(4)\qquad Q\supset E\supset Q-\psi(P),$$

[1]) c. à. d. $\varphi(x_1)\neq\varphi(x_2)$ pour $x_1\in Q$, $x_2\in Q$, $x_1\neq x_2$.

[2]) $\psi(P)$ désigne l'ensemble de tous les éléments $\psi(x)$ pour $x\in P$.

[3]) $\psi^{-1}(x)$ désigne la fonction définie pour $x\in\psi(P)$, inverse pour la fonction $\psi(x)$.

puisqu'on a la formule (2) pour tout facteur H du produit ΠH, et, d'après (3), on trouve

$$(5)\qquad \psi[P\varphi(X)]\subset E\quad\text{pour}\quad X\subset E,$$

puisque, si $X\subset E$ et si H est un facteur du produit ΠH, on a $X\subset H$ et la formule (3).

Pour $X=E$ la formule (5) donne

$$(6)\qquad \psi[P\varphi(E)]\subset E;$$

d'après (4) on a donc

$$(7)\qquad E\supset[Q-\psi(P)]+\psi[P\varphi(E)].$$

Posons

$$(8)\qquad H=[Q-\psi(P)]+\psi[P\varphi(E)];$$

on aura évidemment la formule (2). Or, soit X un ensemble tel que $X\subset H$; d'après (7) on aura $X\subset E$, donc $\psi[P\varphi(X)]\subset\psi[P\varphi(E)]$, d'où, d'après (8), $\psi[P\varphi(X)]\subset H$. On a donc la formule (3). L'ensemble H satisfait ainsi aux formules (2) et (3) et parsuite est un des facteurs du produit $\Pi H=E$. On a donc $E\subset H$ et les formules (8) et (7) donnent

$$(9)\qquad E=[Q-\psi(P)]+\psi[P\varphi(E)],$$

d'où $\varphi(E)=\varphi[Q-\psi(P)]+\varphi\psi[P\varphi(E)]$ et comme, d'après (9) (et vu que $\psi(P)\subset Q$) $Q-E=\psi(P)-\psi[P\varphi(E)]$, on a $\psi^{-1}(Q-E)=P-\varphi(E)$, donc $\varphi(E)\cdot\psi^{-1}(Q-E)=0$ et $P\subset\varphi(E)+\psi^{-1}(Q-E)$.

Notre lemme est ainsi démontré.

Il est à remarquer qu'on pourrait définir l'ensemble E comme l'ensemble-somme de la série infinie d'ensembles

$$E=[Q-\psi(P)]+\psi P\varphi[Q-\psi(P)]+\psi P\varphi\psi P\varphi[Q-\psi(P)]+\dots$$

Démonstration du théorème. Soit M un ensemble de puissance $\mathfrak{m}$, P un sous-ensemble de M de puissance $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{n}$ un nombre cardinal tel que $\mathfrak{m}\geqslant\mathfrak{n}\geqslant\mathfrak{p}$. Soit Q un ensemble de puissance $\mathfrak{n}$; comme $\mathfrak{m}\geqslant\mathfrak{n}\geqslant\mathfrak{p}$, il existe une transformation biunivoque φ de l'ensemble Q en un sous-ensemble de M et une transformation biunivoque ψ de P en un sous-ensemble de Q. D'après notre lemme, il existe un ensemble E pour lequel on a les formules (1). Posons $N=\varphi(E)+\psi^{-1}(Q-E)$; nous aurons, comme on voit sans peine, $M\supset N\supset P$. Or, posons $f(x)=\varphi(x)$ pour $x\in E$ et $f(x)=\psi^{-1}(x)$ pour $x\in Q-E$. On constate facilement que la fonction $f(x)$ transforme d'une façon biunivoque l'ensemble Q en N. On a donc $\overline{\overline{N}}=\overline{\overline{Q}}=\mathfrak{n}$. Notre théorème est ainsi démontré.

M. Mostowski a remarqué que notre théorème résulte sans peine du théorème suivant que MM. A. Lindenbaum et A. Tarski ont publié sans démonstration en 1926 [4]):

Si A, B, C, A_1 et C_1 sont des ensembles tels que $A \supset B \supset C$, $A_1 \supset C_1$, $A \sim A_1$ et $C \sim C_1$, il existe un ensemble B_1 tel que $A_1 \supset B_1 \supset C_1$ et $B \sim B_1$.

En effet, soit $M \supset P$, $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{m}$, $\overline{\overline{P}} = \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{p}$. D'après $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{n}$ il existe un sous-ensemble Q de M de puissance $\mathfrak{n}$ et, d'après $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{p}$, il existe un sous-ensemble R de Q de puissance $\mathfrak{p}$. On a donc $M \supset Q \supset R$ et $R \sim P$ et, comme $M \supset P$, il existe, d'après le théorème de MM. Lindenbaum et Tarski, un ensemble N tel que $M \supset N \supset P$ et $N \sim Q$, donc $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{n}$, c. q. f. d.

Il est à remarquer que notre théorème cesse d'être vrai lorsqu'on y remplace les nombres cardinaux par les nombres ordinaux. En effet, soit M un ensemble ordonné du type $\omega+1$ et soit P son sous-ensemble formé du dernier élément de M. On a donc $\overline{M} = \omega+1$, $\overline{P} = 1$ et $\omega+1 > \omega > 1$; or, il n'existe évidemment aucun ensemble N tel que $M \supset N \supset P$ et $\overline{N} = \omega$.

Notre théorème est également en défaut lorsqu'on y remplace les nombres cardinaux par les nombres de dimension de M. Fréchet. En effet, soient A, B, C et D quatre segments (fermés) de droites dans le plan ayant une extrémité commune, p, et soit $M = A+B+C+D$, $P = M - \{p\}$, $Q = A+B+C$. dX désignant le nombre de dimension de l'ensemble X, on a, comme on voit sans peine, $dM > dQ > dP$ (puisque $dP = 1$, 1 désignant le nombre de dimension de la droite), mais il n'existe aucun ensemble N tel que $M \supset N \supset P$ et $dN = dQ$.

Voici encore un autre exemple de ce genre formé d'ensembles linéaires dénombrables. Soit P l'ensemble formé des nombres $1 - \frac{1}{n}$ et $2 - \frac{1}{n}$, où $n = 2, 3, \ldots$, et soit M l'ensemble qu'on obtient en adjoignant à l'ensemble P le nombre 1. Soit Q l'ensemble formé des nombres $1 - \frac{1}{n}$, où $n = 2, 3, \ldots$ et du nombre 1. On voit sans peine que $dM > dQ > dP$ (puisque P est homéomorphe à $Q - \{1\}$) et qu'il n'existe aucun ensemble N tel que $M \supset N \supset P$ et $dN = dQ$.

[4]) C. R. Soc. Sciences et Lettres Varsovie Cl. III, XIX (1926), p. 303, th. 15. Quant à l'idée de la démonstration, voir mon livre *Zarys teorii mnogości*, t. I, 3-me éd. Warszawa 1928, p. 90, renvoi [2]).

On choices from finite sets.

By

Wanda Szmielew (Łódź).

This paper is closely connected with a paper published by Mostowski in the previous volume of this journal [1]). We shall call a class $\boldsymbol{S}$ of sets a n-class, if every set of this class has exactly n elements. A function $f(X)$ defined for $X \epsilon \boldsymbol{S}$ and such that $f(X) \epsilon X$ for $X \epsilon \boldsymbol{S}$ will be called a choice-function for $\boldsymbol{S}$. Any set A such that $A \cdot X$ has exactly one element for every $X \epsilon \boldsymbol{S}$ will be called a choice-set for $\boldsymbol{S}$.

We consider the following particular cases of the multiplicative axiom:

For every n-class of mutually disjoint sets there is a choice-set.

This proposition will be abbreviated as $[n]$ and it will be supposed that n is a natural number (i. e. a finite cardinal number different from 0). M being a finite non-empty set of natural numbers

$$M = (m_1, \ldots, m_r),$$

we shall abbreviate the conjuction $[m_1] \& [m_2] \& \ldots \& [m_r]$ as $[M]$.

Mostowski established in 1939 a necessary condition for the derivability of the implication

$$(1) \qquad [M] \rightarrow [n]$$

on the base of the Zermelo's axioms of set-theory and he asked whether this condition is at the same time sufficient. This problem is not solved as yet. The purpose of this paper is to establish another condition (S) which is sufficient for the derivability of the foresaid

[1]) A. Mostowski, Fund. Math. **33** (1945), p. 137-168. Quoted below as M.