Or, soit K l'ensemble de tous les points (x,y) de M, où y est un des nombres de la suite transfinie $\{y_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$. En partant des ensembles $I-B_\alpha$ (qui sont évidemment aussi boreliens dans I) au lieu d'ensembles B_α et en raisonnant comme plus haut, on conclut que $K-E$ est un ensemble analytique dans M selon la définition I, donc aussi l'ensemble $M-E=(M-K)+(K-E)$, puisque $M-K$ est fermé dans M.

L'ensemble E est donc analytique dans M d'après la définition I en même temps que son complémentaire, et cependant E n'est pas borelien dans M. Le théorème de Souslin est donc faux dans M si l'on adopte la définition I d'ensembles analytiques.

Or, soit Q l'ensemble de tous les points $(0,y)$ de M, où $y \epsilon I$. La distance de deux points distincts de Q étant toujours $=2$, Q est évidemment un ensemble isolé de puissance du continu, fermé dans M (même absolument fermé). Tout ensemble de M est donc une image continue de Q, donc un ensemble analytique dans M, d'après la définition II[5]). Donc, en particulier, les ensembles E et $M-E$ sont analytiques dans M, d'après la définition II. E étant non borelien dans M, le théorème de Souslin est donc faux dans M, si l'on adopte la définition II d'ensembles analytiques.

Il est à remarquer qu'on démontre pareillement que *l'espace M n'admet pas le théorème d'unicité de* N. Lusin (d'après lequel, pour qu'un ensemble contenu dans un espace complet séparable soit borelien, il faut et il suffit qu'il soit noyau d'un système d'unicité formé d'ensembles fermés, c. à d. d'un système déterminant $\{E_{n_1,n_2,\ldots,n_k}\}$ tel que, $m_1, m_2, \ldots$ et $n_1, n_2, \ldots$ étant deux suites infinies distinctes de nombres naturels, on a toujours $\prod_{k=1}^{\infty} E_{m_1,m_2,\ldots,m_k} E_{n_1,n_2,\ldots,n_k}=0$). En effet, tout ensemble borelien linéaire admettant un système d'unicité formé d'ensembles fermés, on démontre, comme plus haut, que l'ensemble E admet un tel système.

Donc, *le théorème d'unicité de N. Lusin ne peut pas être étendu aux espaces complets localement séparables.*

[5]) Il en résulte que les définitions I et II d'ensembles analytiques ne sont pas équivalentes dans M, puisqu'il existe dans M des ensembles non analytiques d'après la définition I, p. e. l'ensemble de tous les points $(x,0)$ de M où $x \epsilon N$, N désignant un ensemble non analytique contenu dans I.

Sur un problème concernant le crible de M. Lusin.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Appelons *crible* toute fonction E_r faisant correspondre à tout nombre rationnel r un ensemble E_r[1]). Appelons noyau du crible déterminé par la fonction E_r, l'ensemble

$$K_r(E_r)=\sum^{*} E_{r_1}E_{r_2}E_{r_3},\ldots,$$

la sommation $\overset{*}{\Sigma}$ s'étendant à toutes les suites infinies de nombres rationnels décroissants $r_1>r_2>\ldots$

Soit E_v^u une fonction faisant correspondre à tout système (u,v) de deux nombres rationnels un ensemble E_v^u, et soit, pour u rationnels: $E^u=K_v(E_v^u)$, $E=K_u(E^u)$. M. Kuratowski a posé récemment le problème s'il existe toujours deux fonctions $\varphi(r)$ et $\psi(r)$ faisant correspondre aux nombres rationnels r des nombres rationnels $\varphi(r)$ et $\psi(r)$, telles qu'en posant, pour r rationnels

(1) $$E_r=E_{\psi(r)}^{\varphi(r)},$$

on ait

$$E=K_r(E_r).$$

Le but de cette Note est de démontrer que *la réponse à ce problème est négative.*

u et v étant deux nombres rationnels donnés, soit E_v^u l'ensemble de toutes les fonctions $f(x,y)$ définies pour x et y rationnels, ne prenant que les valeurs 0 et 1, et telles que $f(u,v)=1$.

Je dis qu'il n'existe pas deux fonctions $\varphi(r)$ et $\psi(r)$ faisant correspondre aux nombres rationnels des nombres rationnels et telles qu'en posant $E_r=E_{\psi(r)}^{\varphi(r)}$ pour r rationnels, on ait

(2) $$K_uK_v(E_v^u)=K_r(E_r).$$

[1]) Cf. N. Lusin, Fund. Math. **10**, p. 9-10; N. Lusin et W. Sierpiński, Journ. de Math. 7-e sér. t. II (1923), p. 54-55.

Admettons, pour démontrer, que des telles fonctions $\varphi(r)$ et $\psi(r)$ existent.

Soit f_1 la fonction $f(x,y)$ égale à 1 pour x et y rationnels. On voit sans peine que $f_1 \epsilon E_v^u$ pour u et v rationnels et il en résulte tout de suite que $f_1 \epsilon E^u$ pour u rationnels et que $f_1 \epsilon K_u K_v(E_v^u)$, donc, d'après (2), $f_1 \epsilon K_r(E_r)$. Il existe donc une suite infinie décroissante de nombres rationnels

$$(3) \qquad r_1 > r_2 > r_3 > \dots$$

telle que

$$(4) \qquad f_1 \epsilon E_{r_n} \qquad \text{pour } n=1,2,\dots$$

Posons

$$(5) \qquad u_n = \varphi(r_n) \quad \text{et} \quad v_n = \psi(r_n) \qquad \text{pour } n=1,2,\dots$$

et distinguons deux cas:

1) La suite infinie $u_1, u_2, \dots$ contient une infinité de termes égaux, soit $u_{n_1} = u_{n_2} = u_{n_3} = \dots$, où $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

Soit $g(x,y)$ la fonction de deux variables rationnelles, telle que $g(u_{n_i}, v_{n_i}) = 1$ pour $i=1,2,\dots$ et $g(x,y)=0$ pour tous les autres systèmes de deux variables rationnelles x, y.

On a donc $g(u,v)=0$ pour $u \neq u_{n_1}$ et v rationnel, donc $g \,\bar{\epsilon}\, E_v^u$ pour $u \neq u_{n_1}$ et v rationnels, d'où $g \,\bar{\epsilon}\, E^u$ pour $u \neq u_{n_1}$ et $g \,\bar{\epsilon}\, K_u K_v(E_v^u)$. D'après (2) on a donc

$$(6) \qquad g \,\bar{\epsilon}\, K_r(E_r).$$

D'autre part, on a $g \epsilon E_{v_{n_i}}^{u_{n_i}}$ pour $i=1,2,\dots$, donc, d'après (5) et (1): $g \epsilon E_{r_{n_i}}$ pour $i=1,2,\dots$, et comme $n_1 < n_2 < \dots$, on a, d'après (3): $r_{n_1} > r_{n_2} > r_{n_3} > \dots$

Vu la définition de l'ensemble $K_r(E_r)$, on a donc $g \epsilon K_r(E_r)$, contrairement à (6).

2) Le cas 1) n'a pas lieu. Il existe alors une suite infinie croissante de nombres naturels $n_1 < n_2 < \dots$ telle que les nombres $u_{n_1}, u_{n_2}, \dots$ sont tous différents. Définissons la fonction g comme dans le cas 1). On voit sans peine que, pour i naturel, $g \,\bar{\epsilon}\, E_v^{u_i}$ pour $v \neq v_i$, donc $g \,\bar{\epsilon}\, K_v(E_v^{u_i})$, et que $g \epsilon E_v^u$ pour $u \neq u_i$ $(i=1,2,\dots)$, donc $g \,\bar{\epsilon}\, K_v(E_v^u)$ pour u et v rationnels quelconques, d'où il résulte que $g \,\bar{\epsilon}\, K_u K_v(E_v^u)$. Comme dans le cas 1), on en déduit une contradiction.

L'hypothèse que les fonctions φ et ψ existent implique donc toujours une contradiction et notre assertion se trouve démontrée.

Φ étant une famille donnée d'ensembles, désignons par $K(\Phi)$ la famille de tous les ensembles $K_r(E_r)$, où E_r sont des ensembles de la famille Φ. Or, désignons par $A(\Phi)$ la famille de tous les ensembles qui sont noyaux de systèmes déterminants formés d'ensembles de la famille Φ. Comme j'ai démontré [2]), si la famille Φ est (simplement) multiplicative, on a la formule

$$(7) \qquad K(\Phi) = A(\Phi).$$

Or, on a $AA(\Phi) = A(\Phi)$ [3]) et il en résulte sans peine que la famille $A(\Phi)$ est multiplicative, donc, d'après (7), la famille $K(\Phi)$ est aussi multiplicative, et on a (en remplaçant dans (7) Φ par $K(\Phi)$):

$$(8) \qquad KK(\Phi) = AK(\Phi),$$

et, comme, d'après (7) $AK(\Phi) = AA(\Phi)$ et $AA(\Phi) = A(\Phi) = K(\Phi)$, la formule (8) donne

$$(9) \qquad KK(\Phi) = K(\Phi).$$

On a donc pour les familles Φ multiplicatives d'ensembles la formule (9).

Or, soit Φ_0 la famille de tous les ensembles E_v^u définis plus haut. On a évidemment $K_u K_v(E_v^u) \epsilon KK(\Phi_0)$. D'autre part, on voit sans peine que si l'on avait $K_u K_v(E_v^u) \epsilon K(\Phi_0)$, il existerait des fonctions $\varphi(r)$ et $\psi(r)$ à valeurs rationnelles pour r rationnels, telles qu'en posant $E_r = E_{\psi(r)}^{\varphi(r)}$, on aurait la formule (2) qui est fausse, comme nous l'avons prouvé plus haut. On a donc $K_u K_v(E_v^u) \,\bar{\epsilon}\, K(\Phi_0)$, donc $KK(\Phi_0) \neq K(\Phi_0)$. Ainsi:

La formule (9) *ne subsiste pas pour les familles quelconques d'ensembles.*

---

[2]) Fund. Math. **11**, p. 18.

[3]) Voir p. e. Fund. Math. **21**, p. 261.