Sur un espace complet qui n'admet pas le théorème de Souslin.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Le théorème connu de Souslin (que tout ensemble analytique en même temps que son complémentaire est borelien) est, comme on sait, démontré dans les espaces complets séparables[1]). Le but de cette Note est de démontrer que le théorème de Souslin peut être faux dans un espace complet localement séparable, et cela indépendamment du choix d'une de deux définitions usuelles d'ensembles analytiques (qui, comme nous le verrons, ne coïncident pas dans les espaces complets localement séparables).

Définition I. Un ensemble E de points d'un espace métrique M est dit *analytique*, s'il est noyau d'un système déterminant formé d'ensembles fermés de M (c. à d. s'il existe un système $\{E_{n_1,n_2,\ldots,n_k}\}$ d'ensembles fermés de M tel que

$$E=\sum E_{n_1}E_{n_1,n_2}E_{n_1,n_2,n_3}\ldots,$$

la sommation s'étendant à toutes les suites infinies de nombres naturels $n_1,n_2,\ldots$)[2]).

Définition II. Un ensemble E de points d'un espace métrique M est dit analytique, s'il est une image continue d'un ensemble borelien de M[3]).

[1]) Voir p. e. F. Hausdorff, *Mengenlehre* 1935, p. 191 (III); C. Kuratowski, Topologie I, Warszawa-Lwów 1933, p. 251 (Corollaire 1).

[2]) Voir p. e. F. Hausdorff, l. c., p. 91 et p. 179 (où les ensembles analytiques sont appelés *ensembles de Souslin*).

[3]) Voir p. e. C. Kuratowski, l. c., p. 234; pour la définition des ensembles boreliens voir ibid., pp. 22-23.

Soit I l'intervalle $0\leqslant x\leqslant 1$ et soit $M=I\times I$ son carré combinatoire, métrisé de la façon suivante: si $x_1,x_2,y\in I$, on a

$$\varrho((x_1,y),(x_2,y))=|x_1-x_2|,$$

et si $x_1,x_2,y_1,y_2\in I$ et $y_1\neq y_2$, on a

$$\varrho((x_1,y_1),(x_2,y_2))=2.$$

On voit sans peine que l'espace M ainsi métrisé est complet et localement séparable.

Or, soit B_α un ensemble borelien de classe α situé dans I. Il résulte de l'axiome du choix qu'il existe une suite transfinie de type Ω, $\{y_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$, de nombres distincts de I. Soit E_α l'ensemble de tous les points (x,y_α) de M, où $x\in B_\alpha$; on voit sans peine que l'ensemble E_α est dans M borelien de classe α. Posons $E=\sum_{\alpha<\Omega}E_\alpha$; ce sera un ensemble qui n'est pas borelien dans M. En effet, si E était un ensemble borelien de classe β dans M, l'ensemble de tous les points $(x,y_{\beta+1})$ de E serait borelien de classe $\leqslant\beta$ dans M (comme produit de E et d'un ensemble fermé dans M); or, cet ensemble coïncide évidemment avec l'ensemble $E_{\beta+1}$ qui est de classe $\beta+1$ dans M, ce qui implique une contradiction[4]).

Or, je dis que E est un ensemble analytique dans M, de même que son complémentaire $M-E$ (d'après chacune des définitions I ou II d'ensembles analytiques).

Soit, en effet, α un nombre ordinal donné $<\Omega$. L'ensemble B_α étant borelien dans I, donc, à plus forte raison, analytique dans I, il est noyau d'un système déterminant $\{H^\alpha_{n_1,n_2,\ldots,n_k}\}$ formé d'ensembles fermés de I. Soit (pour tout système fini donné $n_1,n_2,\ldots,n_k$ de nombres naturels) $E^\alpha_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ l'ensemble de tous les points (x,y_α) de M, où $x\in H^\alpha_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, et posons

$$E_{n_1,n_2,\ldots,n_k}=\sum_{\alpha<\Omega}E^\alpha_{n_1,n_2,\ldots,n_k}.$$

On voit sans peine que les ensembles $E_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ sont fermés dans M et que l'ensemble E est noyau du système déterminant $\{E_{n_1,n_2,\ldots,n_k}\}$; c'est donc un ensemble analytique dans M, d'après la définition I.

[4]) Cf. la démonstration (due à M. Szpilrajn) d'existence d'un ensemble localement borelien (dans un espace métrique localement séparable) qui n'est pas borelien; voir W. Sierpiński, Fund. Math. **21**, pp. 112-113.

Or, soit K l'ensemble de tous les points (x,y) de M, où y est un des nombres de la suite transfinie $\{y_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$. En partant des ensembles $I-B_\alpha$ (qui sont évidemment aussi boreliens dans I) au lieu d'ensembles B_α et en raisonnant comme plus haut, on conclut que $K-E$ est un ensemble analytique dans M selon la définition I, donc aussi l'ensemble $M-E=(M-K)+(K-E)$, puisque $M-K$ est fermé dans M.

L'ensemble E est donc analytique dans M d'après la définition I en même temps que son complémentaire, et cependant E n'est pas borelien dans M. Le théorème de Souslin est donc faux dans M si l'on adopte la définition I d'ensembles analytiques.

Or, soit Q l'ensemble de tous les points $(0,y)$ de M, où $y \epsilon I$. La distance de deux points distincts de Q étant toujours $=2$, Q est évidemment un ensemble isolé de puissance du continu, fermé dans M (même absolument fermé). Tout ensemble de M est donc une image continue de Q, donc un ensemble analytique dans M, d'après la définition II[5]). Donc, en particulier, les ensembles E et $M-E$ sont analytiques dans M, d'après la définition II. E étant non borelien dans M, le théorème de Souslin est donc faux dans M, si l'on adopte la définition II d'ensembles analytiques.

Il est à remarquer qu'on démontre pareillement que *l'espace M n'admet pas le théorème d'unicité de* N. Lusin (d'après lequel, pour qu'un ensemble contenu dans un espace complet séparable soit borelien, il faut et il suffit qu'il soit noyau d'un système d'unicité formé d'ensembles fermés, c. à d. d'un système déterminant $\{E_{n_1,n_2,\dots,n_k}\}$ tel que, $m_1, m_2, \dots$ et $n_1, n_2, \dots$ étant deux suites infinies distinctes de nombres naturels, on a toujours $\prod_{k=1}^{\infty} E_{m_1,m_2,\dots,m_k} E_{n_1,n_2,\dots,n_k}=0$). En effet, tout ensemble borelien linéaire admettant un système d'unicité formé d'ensembles fermés, on démontre, comme plus haut, que l'ensemble E admet un tel système.

Donc, *le théorème d'unicité de N. Lusin ne peut pas être étendu aux espaces complets localement séparables.*

[5]) Il en résulte que les définitions I et II d'ensembles analytiques ne sont pas équivalentes dans M, puisqu'il existe dans M des ensembles non analytiques d'après la définition I, p. e. l'ensemble de tous les points $(x,0)$ de M où $x \epsilon N$, N désignant un ensemble non analytique contenu dans I.

Sur un problème concernant le crible de M. Lusin.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Appelons *crible* toute fonction E_r faisant correspondre à tout nombre rationnel r un ensemble E_r[1]). Appelons noyau du crible déterminé par la fonction E_r, l'ensemble

$$K_r(E_r)=\sum^{*} E_{r_1}E_{r_2}E_{r_3},\dots,$$

la sommation $\overset{*}{\Sigma}$ s'étendant à toutes les suites infinies de nombres rationnels décroissants $r_1>r_2>\dots$

Soit E_v^u une fonction faisant correspondre à tout système (u,v) de deux nombres rationnels un ensemble E_v^u, et soit, pour u rationnels: $E^u=K_v(E_v^u)$, $E=K_u(E^u)$. M. Kuratowski a posé récemment le problème s'il existe toujours deux fonctions $\varphi(r)$ et $\psi(r)$ faisant correspondre aux nombres rationnels r des nombres rationnels $\varphi(r)$ et $\psi(r)$, telles qu'en posant, pour r rationnels

$$E_r=E_{\psi(r)}^{\varphi(r)}, \tag{1}$$

on ait

$$E=K_r(E_r).$$

Le but de cette Note est de démontrer que *la réponse à ce problème est négative.*

u et v étant deux nombres rationnels donnés, soit E_v^u l'ensemble de toutes les fonctions $f(x,y)$ définies pour x et y rationnels, ne prenant que les valeurs 0 et 1, et telles que $f(u,v)=1$.

Je dis qu'il n'existe pas deux fonctions $\varphi(r)$ et $\psi(r)$ faisant correspondre aux nombres rationnels des nombres rationnels et telles qu'en posant $E_r=E_{\psi(r)}^{\varphi(r)}$ pour r rationnels, on ait

$$K_u K_v(E_v^u)=K_r(E_r). \tag{2}$$

[1]) Cf. N. Lusin, Fund. Math. **10**, p. 9-10; N. Lusin et W. Sierpiński, Journ. de Math. 7-e sér. t. II (1923), p. 54-55.