L'hypothèse généralisée du continu et l'axiome du choix.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Désignons par H l'hypothèse de Cantor sur les alephs (dite aussi hypothèse généralisée du continu), c. à. d. l'hypothèse suivante:

$\mathfrak{m}$ *étant un nombre cardinal quelconque* $\geqslant \aleph_0$, *il n'y a aucun nombre cardinal* $\mathfrak{n}$ *tel que* $\mathfrak{m} < \mathfrak{n} < 2^{\mathfrak{m}}$.

En 1926 MM. A. Lindenbaum et A. Tarski ont énoncé sans démonstration la proposition suivante [1]):

L'hypothèse H entraîne l'axiome du choix.

La démonstration de MM. Lindenbaum et Tarski ne fut pas publiée et elle m'est inconnue. Dans cette note je donne une démonstration de leur proposition que j'ai trouvé en juin 1943.

Je démontrerai d'abord (naturellement sans utiliser l'axiome du choix) deux lemmes.

M étant un ensemble quelconque, désignons par $U(M)$ l'ensemble de tous les sous-ensembles de M. Si $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{m}$, on a, comme on sait: $\overline{\overline{U(M)}} = 2^{\mathfrak{m}}$.

Lemme 1. *M étant un ensemble quelconque, nous savons nommer un ensemble bien ordonné N d'éléments (distincts) de $UUU(M)$ dont la puissance n'est pas inférieure ni égale à celle de l'ensemble M.*

Démonstration. M étant un ensemble donné de puissance $\mathfrak{m}$, soit Z l'ensemble de tous les nombres ordinaux α, tels que $\overline{\alpha} \leqslant \mathfrak{m}$ (où $\overline{\alpha}$ désigne la puissance du nombre α). Soit $\overline{\overline{Z}} = \mathfrak{n}$, et soit λ le plus petit nombre ordinal qui n'appartient pas à Z. On voit sans peine que Z coïncide avec l'ensemble de tous les nombres ordinaux qui sont $< \lambda$. On a donc $\overline{\overline{Z}} = \overline{\lambda}$.

---

[1]) A. Lindenbaum et A. Tarski, *Communication sur les recherches de la Théorie des Ensembles*, C. R. Soc. Sc. Varsovie Cl. III, **19** (1926), p. 314, th. 94.

En supposant que $\mathfrak{n}\leqslant\mathfrak{m}$, on aurait $\overline{\overline{\lambda}}=\overline{\overline{Z}}\leqslant\mathfrak{m}$, donc, vu la définition de l'ensemble Z, $\lambda\in Z$, contrairement à la définition du nombre λ. L'inégalité $\mathfrak{n}\leqslant\mathfrak{m}$ est donc en défaut.

Or, soit α un élément de l'ensemble Z, donc un nombre ordinal tel que $\overline{\alpha}\leqslant\mathfrak{m}$. Soit A l'ensemble de tous les nombres ordinaux $<\alpha$; on a, comme on sait, $\overline{\overline{A}}=\alpha$ et, comme $\overline{\alpha}\leqslant\mathfrak{m}$, on a $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{M}}$; il existe donc un sous-ensemble Q de M de même puissance que A et une correspondance biunivoque φ entre les éléments de A et ceux de Q. Q est donc l'ensemble de tous les éléments (distincts) $\varphi(\xi)$, où $\xi<\alpha$, c. à d. $Q=\{\varphi(\xi)\}_{\xi<\alpha}$. Posons $Q_\eta=\{\varphi(\xi)\}_{\xi<\eta}$, pour $\eta<\alpha$ et soit $R_\alpha=\{Q_\eta\}_{\eta<\alpha}$. R_α est donc une famille de sous-ensembles (distincts) de M qui, ordonnée d'après la relation $\subset$, est du type d'ordre α.

Nous avons ainsi démontré (sans faire appel à l'axiome du choix) qu'il existe pour tout nombre α de l'ensemble Z au moins une famille de sous-ensembles distincts de M qui, ordonnée d'après la relation $\subset$, est du type α. Or, nous ne savons définir aucune correspondance qui ferait correspondre à tout nombre α de Z *une* telle famille. Cependant le nombre α détermine d'une façon univoque la famille de toutes ces familles. Désignons, pour $\alpha\in Z$, par $F(\alpha)$ la famille de toutes les familles de sous-ensembles distincts de M dont chacune, ordonnée d'après la relation $\subset$, est du type α. D'après ce que nous avons démontré plus haut, les familles $F(\alpha)$, où $\alpha\in Z$, sont non vides et, pour $\alpha\in Z$, $\beta\in Z$, $\alpha\neq\beta$, les familles $F(\alpha)$ et $F(\beta)$ sont évidemment disjointes. Or, on a évidemment $F(\alpha)\in UUU(M)$ pour $\alpha\in Z$. Posons $N=\{F(\alpha)\}_{\alpha\in Z}$; nous aurons donc $N\subset UUU(M)$ et $\overline{\overline{N}}=\overline{\overline{Z}}=\mathfrak{n}$, donc, vu qu'on n'a pas $\mathfrak{n}\leqslant\mathfrak{m}$, on n'aura pas $\overline{\overline{N}}\leqslant\overline{\overline{M}}$. L'ensemble N satisfait donc à notre lemme qui est ainsi démontré.

Vu qu'on a $\overline{\overline{U(M)}}=2^{\mathfrak{m}}$ pour $\overline{\overline{M}}=\mathfrak{m}$, l'ensemble $UUU(M)$ est de puissance $2^{2^{2^{\mathfrak{m}}}}$. Du lemme 1 résulte donc tout de suite ce

Corollaire. *À tout nombre cardinal non fini* $\mathfrak{m}$ *correspond un aleph* $\aleph(\mathfrak{m})$ *tel qu'on a*

$$\aleph(\mathfrak{m})\leqslant 2^{2^{2^{\mathfrak{m}}}} \tag{1}$$

et qu'on n'a pas $\aleph(\mathfrak{m})\leqslant\mathfrak{m}$.

Lemme 2. $\mathfrak{p}$ *et* $\mathfrak{q}$ *étant deux nombres cardinaux tels que* $\mathfrak{p}+\mathfrak{q}=2^{2^{\mathfrak{p}}}$, *on a* $\mathfrak{q}\geqslant 2^{\mathfrak{p}}$.

Démonstration. Soient P et P_1 deux ensembles disjoints de puissance $\mathfrak{p}$ et soit Q un ensemble de puissance $\mathfrak{q}$ disjoint de P. Soit S l'ensemble de tous les sous-ensembles de l'ensemble $P+P_1$; vu que $\mathfrak{p}+\mathfrak{q}=2^{2\mathfrak{p}}$, on a $\overline{\overline{P+Q}}=\overline{\overline{S}}$ et il existe une transformation biunivoque f de $P+Q$ en S; $f(p)$ est donc le sous-ensemble de $P+P_1$ correspondant dans cette correspondance à l'élément p de P. E étant un sous-ensemble quelconque de P_1, désignons par R_E le sous-ensemble de $P+P_1$ formé de tous les éléments de E et de tous les éléments p de P, tels que p non $\in f(p)$. On voit sans peine que $R_E\neq f(p)$ pour $p\in P$. On a donc, pour $E\subset P_1$, $R_E=f(q)$; où $q\in Q$. Or, comme P_1 a $2^{\mathfrak{p}}$ sous-ensembles distincts, il y a au moins $2^{\mathfrak{p}}$ éléments q de Q distincts. Donc $\mathfrak{q}=\overline{\overline{Q}}\geqslant 2^{\mathfrak{p}}$, c. q. f. d.

Admettons maintenant l'hypothèse H et soit $\mathfrak{n}$ un nombre cardinal non fini quelconque. Pour démontrer l'axiome du choix il suffira évidemment de démontrer que $\mathfrak{n}$ est un aleph. Posons $\mathfrak{m}=2^{\aleph_0+\mathfrak{n}}$; comme $\mathfrak{n}<\mathfrak{m}$, il suffira de démontrer que $\mathfrak{m}$ est un aleph.

Comme $\mathfrak{m}=2^{\aleph_0+\mathfrak{p}}$ et vu que $1+\aleph_0=\aleph_0$, on a $2\mathfrak{m}=2^{1+\aleph_0+\mathfrak{n}}=2^{\aleph_0+\mathfrak{n}}=\mathfrak{m}$, donc $2^{2\mathfrak{m}}=2^{\mathfrak{m}}$. Or, comme $2^{2^{\mathfrak{m}}}>2^{\mathfrak{m}}>\mathfrak{m}>\aleph_0$, on a $\mathfrak{m}+1=\mathfrak{m}$, $2^{\mathfrak{m}}+1=2^{\mathfrak{m}}$, $2^{2^{\mathfrak{m}}}+1=2^{2^{\mathfrak{m}}}$, $2^{2\cdot 2^{\mathfrak{m}}}=2^{2^{\mathfrak{m}+1}}=2^{2^{\mathfrak{m}}}$, $2^{2\cdot 2^{2^{\mathfrak{m}}}}=2^{2^{2^{\mathfrak{m}}+1}}=2^{2^{2^{\mathfrak{m}}}}$ et $2^{2^{2^{\mathfrak{m}}}}+2^{2^{\mathfrak{m}}}=2^{2^{2^{\mathfrak{m}}}}$.

D'après le corollaire on a la formule (1) et on n'a pas $\aleph(\mathfrak{m})\leqslant\mathfrak{m}$. D'après (1) on trouve

$$\aleph(\mathfrak{m})+2^{2^{\mathfrak{m}}}\leqslant 2^{2^{2^{\mathfrak{m}}}}+2^{2^{\mathfrak{m}}}=2^{2^{2^{\mathfrak{m}}}}.$$

Si l'on avait

$$\aleph(\mathfrak{m})+2^{2^{\mathfrak{m}}}=2^{2^{2^{\mathfrak{m}}}},$$

on aurait, vue que $2^{2^{2^{\mathfrak{m}}}}=2^{2\cdot 2^{2^{\mathfrak{m}}}}$ et d'après le lemme 2 (pour $\mathfrak{q}=\aleph(\mathfrak{m})$, $\mathfrak{p}=2^{2^{\mathfrak{m}}}$):

$$\aleph(\mathfrak{m})\geqslant 2^{2^{2^{\mathfrak{m}}}}>\mathfrak{m}$$

et $\mathfrak{m}$ serait un aleph.

Admettons donc qu'on a

$$\aleph(\mathfrak{m})+2^{2^{\mathfrak{m}}}<2^{2^{2^{\mathfrak{m}}}}. \tag{2}$$

Vu qu'on a évidemment $2^{2^{\mathfrak{m}}}\leqslant\aleph(\mathfrak{m})+2^{2^{\mathfrak{m}}}$ et d'après l'hypothèse H (pour $2^{2^{\mathfrak{m}}}$), (2) donne:

$$\aleph(\mathfrak{m})+2^{2^{\mathfrak{m}}}=2^{2^{\mathfrak{m}}},$$

d'où

$$\aleph(\mathfrak{m}) \leqslant 2^{2^{\mathfrak{m}}}$$

et

$$\aleph(\mathfrak{m}) + 2^{\mathfrak{m}} \leqslant 2^{2^{\mathfrak{m}}} + 2^{\mathfrak{m}} = 2^{2^{\mathfrak{m}}} = 2^{2\cdot 2^{\mathfrak{m}}}. \tag{3}$$

En supposant que

$$\aleph(\mathfrak{m}) + 2^{\mathfrak{m}} = 2^{2\cdot 2^{\mathfrak{m}}},$$

on aurait, d'après le lemme 2 (pour $\mathfrak{q}=\aleph(\mathfrak{m})$, $\mathfrak{p}=2^{\mathfrak{m}}$)

$$\aleph(\mathfrak{m}) \geqslant 2^{2^{\mathfrak{m}}}$$

et $2^{2^{\mathfrak{m}}}$, donc aussi $\mathfrak{m}$, seraient des alephs. Admettons donc qu'on a dans (3) le signe $<$, c. à d. qu'on a

$$\aleph(\mathfrak{m}) + 2^{\mathfrak{m}} < 2^{2^{\mathfrak{m}}}. \tag{4}$$

Evidemment $\aleph(\mathfrak{m})+2^{\mathfrak{m}} \geqslant 2^{\mathfrak{m}}$. Par conséquent l'hypothèse H (pour $2^{\mathfrak{m}}$) et l'inégalité (4) donnent

$$\aleph(\mathfrak{m}) + 2^{\mathfrak{m}} = 2^{\mathfrak{m}},$$

d'où

$$\aleph(\mathfrak{m}) \leqslant 2^{\mathfrak{m}}$$

et

$$\aleph(\mathfrak{m}) + \mathfrak{m} \leqslant 2^{\mathfrak{m}} + \mathfrak{m} = 2^{\mathfrak{m}} = 2^{2\mathfrak{m}}. \tag{5}$$

En supposant que

$$\aleph(\mathfrak{m}) + \mathfrak{m} = 2^{2\mathfrak{m}},$$

on aurait, d'après le lemme 2 (pour $\mathfrak{q}=\aleph(\mathfrak{m})$, $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}$),

$$\aleph(\mathfrak{m}) \geqslant 2^{\mathfrak{m}}$$

et $2^{\mathfrak{m}}$, donc aussi $\mathfrak{m}$, seraient des alephs. Admettons donc qu'on a dans (5) le signe $<$, c. à d. qu'on a

$$\aleph(\mathfrak{m}) + \mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}}. \tag{6}$$

Or, vu qu'on n'a pas $\aleph(\mathfrak{m}) \leqslant \mathfrak{m}$, on trouve $\aleph(\mathfrak{m}) + \mathfrak{m} > \mathfrak{m}$; d'après (6) on aurait donc

$$\mathfrak{m} < \aleph(\mathfrak{m}) + \mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}},$$

contrairement à l'hypothèse H (pour $\mathfrak{m}$). Nous avons ainsi établi, que $\mathfrak{m}$ est toujours un aleph, c. q. f. d.

Désignons par $H_{\mathfrak{m}}$ l'hypothèse H pour un nombre cardinal $\mathfrak{m}$ *donné*. Il est à remarquer qu'en modifiant notre démonstration, on peut démontrer la proposition suivante de MM. Lindenbaum et Tarski [1]):

Si $\mathfrak{m}$ est un nombre cardinal $\geqslant \aleph_0$ donné et si les hypothèses $H_{\mathfrak{m}}$, $H_{2^{\mathfrak{m}}}$ et $H_{2^{2^{\mathfrak{m}}}}$ sont vraies, $\mathfrak{m}$ est un aleph [2]).

En effet, soit $\mathfrak{m}$ un nombre cardinal $\geqslant \aleph_0$ tel que les hypothèses $H_{\mathfrak{m}}$, $H_{2^{\mathfrak{m}}}$ et $H_{2^{2^{\mathfrak{m}}}}$ sont vraies.

D'après l'inégalité $\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}}$ on a évidemment $\mathfrak{m} \leqslant 2\mathfrak{m} \leqslant 2.2^{\mathfrak{m}}$.

Comme j'ai démontré sans faire appel à l'axiome du choix, l'égalité $2\mathfrak{m}=2\mathfrak{n}$ entraîne, pour les nombres cardinaux, $\mathfrak{m}=\mathfrak{n}$ [3]). Si l'on avait $2\mathfrak{m}=2.2^{\mathfrak{m}}$, on en tirerait $\mathfrak{m}=2^{\mathfrak{m}}$, ce qui est impossible. Donc $2\mathfrak{m}<2.2^{\mathfrak{m}}$. En tenant compte de $\mathfrak{m} \leqslant 2\mathfrak{m} \leqslant 2.2^{\mathfrak{m}} = 2^{\mathfrak{m}}$ et de $H_{\mathfrak{m}}$, on trouve $\mathfrak{m}=2\mathfrak{m}$.

Il ne reste ensuite qu'à répéter notre raisonnement précédent qui faisait usage seulement des hypothèses $H_{\mathfrak{m}}$, $H_{2^{\mathfrak{m}}}$ et $H_{2^{2^{\mathfrak{m}}}}$.

---

[1]) l. c., p. 314, th. 89.

[2]) On pourrait se débarasser ici de l'hypothèse que $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, en démontrant sans faire appel à l'axiome du choix (ce qui n'offre pas de difficulté) qu'on a, quel que soit le nombre cardinal $\mathfrak{m}>1$, $\mathfrak{m}+1<2^{\mathfrak{m}}$.

[3]) Fund. Math. 3, p.1.