Sur l'aire des surfaces courbes continues.

Par

Stefan Kempisty (Wilno).

1. M. Radó a établi[1]) quelques propriétés d'une surface S définie par les fonctions:

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v) \qquad z = z(u, v),$$

continues dans le carré $Q = [0 \leqslant x \leqslant 1;\ 0 \leqslant y \leqslant 1]$ et y admettant presque partout les dérivées partielles. En admettant que l'aire $L(Q)$ de cette surface (au sens de Lebesgue) est finie, il a prouvé que la dérivée de l'aire est presque partout au moins égale à

$$(X^2 + Y^2 + Z^2)^{1/2}$$

où

$$X = \partial(y, z)/\partial(u, v), \qquad Y = \partial(z, x)/\partial(u, v), \qquad Z = \partial(x, y)/\partial(u, v).$$

Il en a déduit l'égalité

$$L(Q) = \iint_Q (X^2 + Y^2 + Z^2)^{1/2}\, du\, dv$$

en supposant que la surface S est la limite au sens de Fréchet d'une suite de surfaces dont les aires tendent vers l'intégrale de $(X^2+Y^2+Z^2)^{1/2}$.

Or, M. Rademacher a montré qu'on obtient une telle suite pour toute surface définie par les fonctions satisfaisant à la condition de Lipschitz, en inscrivant dans la surface S les polyèdres aux faces triangulaires, images des triangles de Q, telles que le rapport du côté le plus long à la plus petite hauteur est borné[2]).

[1]) T. Radó, *On the derivative of Lebesgue area of continuous surfaces,* Fundam. Math. **30** (1938), p. 34-39.

[2]) H. Rademacher, *Über partielle und totale Differenzierbarkeit,* Math. Annalen **81** (1920), p. 60.

En me servant d'une méthode que j'ai développée ailleurs[3]), je me propose d'étudier ici les propriétés des surfaces appartenant à trois familles plus étendues que celle considérée par M. Rademacher.

Inscrivons dans la surface S un polyèdre P aux faces triangulaires, images de triangles rectangles formés en divisant par une diagonale chacun des rectangles d'une subdivision de Q. Les rapports entre les côtés de ces rectangles étant supposés uniformément bornés pour toutes les subdivisions considérées de Q, la première famille est formée de surfaces telles que:

I. les fonctions $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ admettent presque partout des dérivées partielles,

II. la limite supérieure des aires des polyèdres inscrits P est finie.

Nous allons montrer que l'aire d'une surface de cette famille admet presque partout dans Q la dérivée égale à $(X^2+Y^2+Z^2)^{1/2}$. La seconde famille est définie en remplaçant la condition II par la suivante:

II'. la somme des aires des deux faces triangulaires correspondantes aux triangles d'un même rectangle est une fonction absolument continue de ce rectangle.

Nous allons voir que la limite inférieure des aires des polyèdres P inscrits dans une surface de cette famille est égale à l'aire $L(Q)$ et à l'intégrale double de $(X^2+Y^2+Z^2)^{1/2}$.

On obtient la troisième famille en admettant de plus que les fonctions $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ sont presque partout totalement différentiables au sens de Stolz. Dans ce cas, il existe une seule limite des aires des polyèdres P et elle est égale à $L(Q)$ et à l'intégrale double de $(X^2+Y^2+Z^2)^{1/2}$.

2. Considérons deux triangles rectangles:

$$T_1 = [(a,b),(a+h,b),(a+h,b+k)], \qquad T_2 = [(a,b),(a+h,b+k),(a,b+k)].$$

Ils forment ensemble le rectangle $R = [a, a+h; b, b+k]$. Nous dirons que ce rectangle est *semi-régulier* lorsque

$$1/2 < h/k < 2.$$

[3]) S. Kempisty, *Sur la méthode triangulaire du calcul de l'aire d'une surface courbe.* Bull. Soc. Math. de France **66** (1936), p. 119–132.

Les fonctions x, y et z transforment les sommets de T_1 et T_2 en ceux des triangles $\overline{T}_1$ et $\overline{T}_2$ inscrits dans S. Définissons les fonctions:

$$F_{11}(R)=\begin{vmatrix} y(a,b) & z(a,b) & 1 \\ y(a+h,b) & z(a+h,b) & 1 \\ y(a+h,b+k) & z(a+h,b+k) & 1 \end{vmatrix},$$

$$F_{21}(R)=\begin{vmatrix} y(a,b) & z(a,b) & 1 \\ y(a+h,b+k) & z(a+h,b+k) & 1 \\ y(a,b+k) & z(a,b+k) & 1 \end{vmatrix},$$

ensuite les fonctions F_{12} et F_{22} en remplaçant respectivement y et z par z et x, enfin les fonctions F_{13} et F_{23} en remplaçant respectivement y et z par x et y.

Les aires des projections du triangle $\overline{T}_1$ sur les plans yz, zx et xy sont égales respectivement à $|F_{11}|/2$, $|F_{12}|/2$ et $|F_{13}|/2$; celles des projections du triangle T sont égales respectivement à $|F_{21}|/2$, $|F_{22}|/2$ et $|F_{23}|/2$. Par suite, les doubles des aires des ces triangles sont:

$$2|\overline{T}_1|=(F_{11}^2+F_{12}^2+F_{13}^2)^{1/2}, \qquad 2|\overline{T}_2|=(F_{21}^2+F_{22}^2+F_{23}^2)^{1/2}.$$

Posons

$$F(R)=|\overline{T}_1|+|\overline{T}_2|.$$

Soient $R_1, R_2, \dots, R_n$ les rectangles semi-réguliers d'une subdivision D du carrée Q. La somme

$$F(D)=F(R_1)+F(R_2)+\dots+F(R_n)$$

est l'aire du polyèdre P inscrit dans la surface S. Faisons décroître uniformément vers 0 les côtés des rectangles R_i. La limite inférieure (supérieure) de $F(D)$ est *l'intégrale inférieure (supérieure) semi-régulière*[4]) de la fonction F sur le carré Q. Nous désignerons ces intégrales respectivement par $\underline{\int_Q} F$ et $\overline{\int_Q} F$.

Quand elles sont égales, la fonction F est dite *intégrable semi-régulièrement* dans Q. En particulier, cela arrive quand la fonction F est intégrable au sens de Burkill.

Nous dirons que la surface S est *quarrable semi-régulièrement* lorsque $\overline{\int_Q} F<\infty$.

[4]) je l'ai appellée aussi *régulière*; voir Fundam. Math. **27** (1936), pp. 10-37.

Il est évident que l'aire d'une surface quarrable semi-régulièrement est finie et qu'on a

$$L(Q)\leqslant \underline{\int_Q} F. \tag{1}$$

En effet, la surface S étant continue, le polyèdre P tend uniformément vers S.

Faisons tendre vers 0 les deux côtés h et k d'un rectangle R contenant un point (u,v), de manière qu'on ait $1/2 \leqslant h/k \leqslant 2$. La limite inférieure (supérieure) du rapport $F(R)/hk$ est *la dérivée inférieure (supérieure) semi-régulière* de la fonction F au point (u,v). Désignons par $\underline{D}_{uv}F$ et $\overline{D}_{uv}F$ ces dérivées extrèmes.

Quand $\underline{D}_{uv}F=\overline{D}_{uv}F$, la fonction F est dite *dérivable semi-régulièrement*. Une telle fonction est à plus forte raison dérivable au sens de Banach, puisque la dérivée de Banach s'obtient en posant $h=k$.

Il résulte d'un théorème de M-lle R. C. Young[5]) que

$$\int\int_Q \overline{D}_{uv}F\, du\, dv \leqslant \overline{\int_Q} F.$$

D'après un théorème de M. S. Saks, étendu par M. A. J. Ward et par moi aux fonctions de rectangle[6]), on a:

$$\underline{D}_{uv}F=D_{uv}\underline{\int_R} F, \qquad \overline{D}_{uv}F=D_{uv}\overline{\int_R} F$$

presque partout dans Q, dès que S est quarrable semi-régulièrement.

Comme $L(R)$ est une fonction non croissante par division, elle est presque partout dérivable semi-régulièrement en vertu d'une généralisation immédiate d'un théorème de M. Banach[7]), et intégrable semi-régulièrement en vertu d'une généralisation d'un théorème de M. Saks[8]). On a donc d'après le théorème de M-lle Young

$$L(Q)\geqslant \int_Q L \geqslant \int\int_Q D_{uv}L\, du\, dv \quad ^{9}). \tag{2}$$

[5]) R. C. Young, *Functions of Σ*, Math. Annalen **29** (1926), p. 187, th. I.
[6]) S. Kempisty, *Sur les fonctions absolument semi-continues*, Fundam. Math. **30** (1938), p. 109, th. 10.
[7]) S. Banach, *Sur une classe de fonctions d'ensemble*, Fundam. Math. **6** (1926), p. 177, th. 7.
[8]) S. Kempisty, loc. cit., p. 114.
[9]) cf. T. Radó, loc. cit., p. 35, § 4.

Si les fonctions x, y et z admettent presque partout les dérivées partielles, on a en outre en vertu du théorème de M. Radó [10])

$$D_{uv} L \geqslant (X^2+Y^2+Z^2)^{1/2}. \tag{3}$$

En tenant compte de (2) et (3), on obtient le

Corollaire 1. *Si l'aire de la surface S est finie et les fonctions x, y et z admettent presque partout des dérivées partielles, on a*

$$L(Q) \geqslant \iint_Q (X^2+Y^2+Z^2)^{1/2}\, du\, dv.$$

3. Posons:

$$r = [(u-u_0)^2+(v-v_0)^2]^{1/2},$$

$$\Delta(f;u,v) = f(u,v) - f(u_0,v_0) - (u-u_0) f'_{u_0} - (v-v_0) f'_{v_0}.$$

Soit $\mu(f,R)$ la borne supérieure du rapport Δ/r pour tous les points (u,v) du périmetre du rectangle R.

Appelons avec M. Radó *admissible pour la fonction $f(u,v)$ au point* (u_0,v_0) toute suite de rectangles R telle que:

1° R contient à l'intérieur le point (u_0,v_0) et tend vers ce point,
2° $\mu(f,R)$ tend vers 0 avec R.

En appliquant un raisonnement de M. W. Stepanoff, M. Radó a montré qu'il existe presque partout dans Q une suite admissible simultanément pour les trois fonctions x, y et z, quand ces fonctions admettent presque partout les dérivées partielles. Remarquons que tous les rectangles de la suite considérée peuvent être choisis semi-réguliers.

Soit (u_0,v_0) un point où existent les dérivées partielles des fonctions y et z. D'après la définition de la différence $\Delta(y;u,v)$, nous avons les égalités:

$$y(a,b) - y(u_0,v_0) = (a-u_0)\frac{\partial y}{\partial u_0} + (b-v_0)\frac{\partial y}{\partial v_0} + \Delta(y;a,b),$$

$$y(a+h,b) - y(u_0,v_0) = (a+h-u_0)\frac{\partial y}{\partial u_0} + (b-v_0)\frac{\partial y}{\partial v_0} + \Delta(y;a+h,b),$$

$$y(a+h,b+k) - y(u_0,v_0) = (a+h-u_0)\frac{\partial y}{\partial u_0} + (b+k-v_0)\frac{\partial y}{\partial v_0} + \Delta(y;a+h,b+k),$$

et les égalités analogues pour la fonction z. Un simple calcul nous conduit à la relation

$$\left|\frac{1}{hk}F_{11} - \frac{\partial(y,z)}{\partial(u_0,v_0)}\right| < 2\mu\frac{\sqrt{h^2+k^2}}{k}\left[\left|\frac{\partial y}{\partial u_0}\right| + \left|\frac{\partial z}{\partial u_0}\right| + \frac{k}{h}\left(\left|\frac{\partial y}{\partial v_0}\right| + \left|\frac{\partial z}{\partial v_0}\right|\right)\right] + 8\mu^2\frac{h^2+k^2}{hk},$$

[10]) T. Radó, loc. cit., p. 36, § 8.

où μ désigne le plus grand des nombres $\mu(y,R)$ et $\mu(z,R)$. Le rapport h/k étant borné par les nombres 1/2 et 2, on a:

$$\frac{\sqrt{h^2+k^2}}{k} \leqslant \sqrt{5}, \qquad \frac{h^2+k^2}{hk} \leqslant \frac{5}{2}.$$

Le jacobien $\partial(y,z)/\partial(u_0,v_0)$ est donc une valeur limite de F_{11}/hk, pour $1/2 \leqslant h/k \leqslant 2$. Par conséquent, nous avons presque partout

$$\underline{D}_{uv} F_{11} \leqslant X \leqslant \overline{D}_{uv} F_{11}$$

et on obtient la même relation pour la fonction F_{21}, ainsi que des relations analogues pour les fonctions F_{12}, F_{22} et F_{13}, F_{23}.

Comme la suite des rectangles R est admissible pour toutes les trois fonctions x, y et z en même temps, nous avons aussi presque partout dans Q

$$\underline{D}_{uv} F \leqslant (X^2+Y^2+Z^2)^{1/2} \leqslant \overline{D}_{uv} F. \tag{4}$$

Mais, d'autre part, on a d'après **2** presque partout

$$\underline{D}_{uv} F = D_{uv} \int_R F \geqslant D_{uv} L \geqslant (X^2+Y^2+Z^2)^{1/2}. \tag{5}$$

Les relations (4) et (5) donnent l'égalité, de sorte que le théorème suivant se trouve démontré:

Théorème 1. *Si la surface S est quarrable semi-régulièrement et les fonctions x, y et z admettent presque partout des dérivées partielles, on a presque partout dans Q*

$$\underline{D}_{uv} F = D_{uv} L = (X^2+Y^2+Z^2)^{1/2}. \tag{6}$$

4. Soit Σ un système, dit *élémentaire*, de rectangles semi-réguliers $R_1, R_2, \ldots, R_n$ sans point intérieurs communs. Posons

$$F(\Sigma) = F(R_1) + F(R_2) + \ldots + F(R_n).$$

La fonction $F(R)$ est absolument et semi-régulièrement continue lorsque $F(\Sigma)$, en même temps que la somme des aires

$$|R_1| + |R_2| + \ldots + |R_n|,$$

tend vers 0.

La fonction F étant supposée absolument et semi-régulièrement continue, nous avons d'après un théorème de M. Burkill, étendu aux fonctions de rectangles, les égalités:

(7) $$\underline{\int_Q} F = \int\int_Q \underline{D}_{uv} F \, du\, dv, \qquad \overline{\int_Q} F = \int\int_Q \overline{D}_{uv} F \, du\, dv.$$

Comme la surface S est quarrable semi-régulièrement dès que $F(R)$ est absolument et semi-régulièrement continue, nous pouvons nous servir des égalités (6) pour obtenir, en partant de la formule (1), du corollaire 1 et de la première des égalités (7), le théorème suivant:

Théorème 2. *Si la fonction $F(R)$ est absolument et semi-régulièrement continue dans Q et les fonctions x, y et z admettent presque partout des dérivées partielles, on a*

$$\underline{\int_Q} F = L(Q) = \int\int_Q (X^2+Y^2+Z^2)^{1/2}\, du\, dv.$$

5. Considérons le cas particulier où

$$x=u, \qquad y=v; \qquad z=z(u,v)=z(x,y).$$

J'ai établi [3]) que la fonction $z(x,y)$ est presque partout totalement différentiable lorsque la surface S est quarrable semi-régulièrement et, si en outre la fonction F est absolument et semi-régulièrement continue, F est intégrable semi-régulièrement et son intégrale est égale à $(1+z_x^2+z_y^2)^{1/2}$.

Dans le cas général, nous ne savons pas si les fonctions x, y et z sont totalement différentiables, même lorsqu'elles admettent presque partout des dérivées partielles et lorsque S est quarrable semi-régulièrement. Mais il résulte du raisonnement de **3** que, les fonctions x, y, z étant totalement differentiables presque partout, la fonctions de rectangle $F(R)$ est dérivable semi-régulièrement et on a presque partout dans Q

$$D_{uv} F = (X^2+Y^2+Z^2)^{1/2}.$$

En vertu des égalités (7), F est donc intégrable semi-régulièrement. Par conséquent nous avons le

Théorème 3. *Si la fonction F est absolument et semi-régulièrement continue et les fonctions x, y et z sont presque partout totalement differentiables dans Q, on a*

(8) $$\int_Q F = L(Q) = \int\int_Q (X^2+Y^2+Z^2)^{1/2}\, du\, dv.$$

En particulier, il en est ainsi lorsque les fonctions x, y et z satisfont à la condition de Lipschitz. En effet les inégalités:

$$|y(a+h,b+k)-y(a,b)| \leqslant M(h+k), \qquad |z(a+h,b+k)-z(a,b)| \leqslant M(h+k)$$

entraînent

$$|F_{11}(R)| \leqslant 2M^2(h+k)h \leqslant 6M^2|R|,$$

h étant au plus égal à $2k$. On prouve le même pour les autres fonctions F_{ik}; donc F est évidemment absolument continue.

D'autre part, il résulte du théorème de M. Rademacher et M. Stepanoff que les fonctions x, y et z sont presque partout totalement différentiables [11]). Ainsi les hypothèses du théorème 3 sont vérifiées et nous avons ce

Corollaire 2. *Si les fonctions x, y et z satisfont à la condition de Lipschitz, on a les égalités* (8).

[11]) H. Rademacher, Math. Annalen **80** (1919), p. 347; W. Stepanoff, Rec. Math. Soc. Math. Moscou **32** (1925), p. 512.

Le 9 décembre 1938.