2. Soient: E un ensemble quelconque, T un espace topologique et E^T la famille des fonctions $f(x)$ définies dans E et dont les valeurs appartiennent à T. L'ensemble E^T devient un espace topologique si l'on convient d'appeler *entourage* d'une fonction $f \epsilon E^T$ tout ensemble de la forme

$$\prod_{i=1}^{m} \underset{g}{E}\,[g(x_i) \epsilon G_i]$$

où $x_i \epsilon E$ et où G_i est un sous-ensemble ouvert de T contenant $f(x_i)$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

M. Čech a démontré, que si T est bicompact, E^T l'est aussi[6]. Cela veut dire que F_0 étant un sous-ensemble de E^T de puissance $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, il existe un $f_0 \epsilon E^T$ tel que tout entourage de f_0 contient au moins $\mathfrak{m}$ éléments de F_0.

Or, en posant $T = \langle 0, 1 \rangle$, on obtient le théorème 3 de M. Sierpiński.

[6]) E. Čech, Ann. of Math., II s., **38** (1937), p. 830.

Sur une suite transfinie d'ensembles de nombres naturels.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

N_1 et N_2 étant deux ensembles infinis de nombres naturels, nous dirons que N_2 est *presque contenu* dans N_1 et nous écrirons

$$N_2 \overset{*}{\subset} N_1,$$

si l'ensemble $N_2 - N_1$ est fini (ou vide).

Nous dirons que les ensembles N_1 et N_2 sont *essentiellement différents* si l'ensemble $(N_1 - N_2) + (N_2 - N_1)$ est infini.

Le but de cette Note est de démontrer ce

Théorème[1]). *Il existe une suite transfinie $\{N_\xi\}_{\xi<\Omega}$ de type Ω d'ensembles infinis de nombres naturels telle que, pour $\alpha < \beta < \Omega$, l'ensemble N_β est à la fois presque contenu dans N_α et essentiellement différent de N_α.*

Lemme. *$E_1, E_2, \ldots$ étant une suite infinie d'ensembles infinis de nombres naturels telle que de deux ensembles E_k et E_l de cette suite l'un (au moins) est presque contenu dans l'autre, il existe un ensemble E qui est presque contenu dans chacun et essentiellement différent de chacun des ensembles $E_1, E_2, \ldots$*

[1]) Selon une remarque de M. A. Mostowski, ce théorème peut être exprimé en termes algébriques comme il suit: *Si R est un anneau de Boole formé de tous les ensembles de nombres naturels et I est un idéal des ensembles finis, alors R/I contient une suite $\{x_\xi\}$ de type Ω telle que, pour $\xi < \eta < \Omega$, x_η est un diviseur de x_ξ.*

Démonstration. La relation $*\subset$ est évidemment transitive. Or, on démontre aisément par induction que $a_1, a_2, \ldots a_n$ étant une suite finie d'éléments et ϱ étant une relation transitive (et réflexive) telle que l'une au moins des formules $a_k \varrho a_l$ et $a_l \varrho a_k$ est vraie pour chaque couple a_k, a_l de termes de cette suite, il existe un indice $s \leqslant n$ tel qu'on a $a_s \varrho a_i$ pour $i=1,2,\ldots,n$.

Soit n un nombre naturel. Il existe donc un indice $s_n \leqslant n$ tel que $E_{s_n} {*\subset} E_i$ pour $i=1,2,\ldots,n$. Pour tout indice $i \leqslant n$, il existe par conséquent un sous-ensemble fini H_i de E_{s_n} tel que $E_{s_n} - H_i \subset E_i$. L'ensemble E_{s_n} étant infini et les ensembles H_i $(i=1,2,\ldots,n)$ étant finis, l'ensemble

$$R_n = E_{s_n} - \sum_{i=1}^{n} H_i \tag{1}$$

est infini. Il existe donc un nombre naturel $p_n \geqslant n$ qui est un élément de R_n. La suite infinie de nombres naturels

$$p_1, p_2, \ldots, \tag{2}$$

en tant que croissante indéfiniment (puisque $p_n \geqslant n$), contient une infinité de nombres naturels.

k étant un nombre naturel, on a d'après (1)

$$p_n \in R_n \subset E_{s_n} - H_k \subset E_k \qquad \text{pour} \quad n \geqslant k,$$

c. à d. que la suite (2) est presque contenue dans chacun des ensembles de la suite $E_1, E_2, \ldots$

Soit $q_1, q_2, \ldots$ la suite infinie formée de tous les termes différents de la suite (2). Soit E l'ensemble de tous les nombres naturels de la suite $q_1, q_3, q_5, \ldots$ Evidemment $E {*\subset} E_k$ et $(q_2, q_4, q_6, \ldots) {*\subset} E_k$ pour $k=1,2,\ldots$, donc $\overline{\overline{E_k - E}} = \aleph_0$, ce qui prouve que l'ensemble E est essentiellement différent de l'ensemble E_k pour $k=1,2,\ldots$ Le lemme est ainsi démontré.

Nous définirons maintenant par l'induction transfinie la suite transfinie $\{N_\xi\}_{\xi<\Omega}$ comme il suit.

Soit N_1 l'ensemble de tous les nombres naturels. Soit $1 < \alpha < \Omega$ et supposons que nous ayons déjà défini les ensembles N_ξ pour $\xi < \alpha$ de manière que $N_\eta {*\subset} N_\xi$ pour $\xi < \eta < \alpha$. L'ensemble de tous les nombres ordinaux $\xi < \alpha$ étant fini ou dénombrable (puisque $\alpha < \Omega$), nous pouvons les ranger en une suite infinie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ en répétant au besoin le même terme une infinité de fois.

D'après le lemme, il existe un ensemble — désignons-le par N_α — essentiellement différent de chacun des ensembles N_{α_i} et tel que $N_\alpha {*\subset} N_{\alpha_i}$ pour $i=1,2,\ldots$ Donc, N_α est essentiellement différent de chacun des ensembles N_ξ pour $\xi < \alpha$ et l'on a $N_\alpha {*\subset} N_\xi$ pour $\xi < \alpha$.

La suite transfinie d'ensembles $\{N_\xi\}_{\xi<\Omega}$ ainsi définie satisfait donc aux conditions du théorème, qui se trouve ainsi démontré.

Il résulte tout de suite de ce théorème que *si l'hypothèse du continu est vraie, c. à d. si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe und suite transfinie $\{N_\xi\}_{\xi<\varphi}$ de puissance $2^{\aleph_0}$ d'ensembles infinis de nombres naturels telle que, pour $\alpha < \beta < \varphi$, l'ensemble N_β est à la fois presque contenu dans N_α et essentiellement différent de N_α.*

Or, le problème reste ouvert si l'on peut démontrer sans faire appel à l'hypothèse du continu que toute suite transfinie $\{N_\xi\}_{\xi<\vartheta}$ d'ensembles infinis de nombres naturels telle que, pour $\alpha < \beta < \vartheta$, l'ensemble N_β est à la fois presque contenu dans N_α et essentiellement différent de N_α, est nécessairement de puissance $\leqslant \aleph_1$.