Les ensembles $F_n(x)$ et les nombres $t_n(x)$ sont ainsi définis par induction pour tout $x \in E$ et $n=1,2,\dots$, de façon à remplir la formule (14) et la formule $\Phi_n \in \boldsymbol{P}$ pour $n=1,2,\dots$

Posons maintenant

$$(17) \qquad \delta_n(x) = \underset{y}{E}\left[\frac{t_n(x)-1}{2^{n-1}} \leqslant y \leqslant \frac{t_n(x)}{2^{n-1}}\right] \qquad \text{pour } x \in E \quad \text{et} \quad n=1,2,\dots$$

C'est un intervalle fermé de longueur $1/2^{n-1}$, et on a d'après (16)

$$\delta_{n+1}(x) \subset \delta_n(x) \qquad \text{pour} \quad x \in E \quad \text{et} \quad n=1,2,\dots$$

Le produit de la suite infinie descendante des intervalles

$$\delta_1(x)\,\delta_2(x)\,\delta_3(x)\dots$$

se réduit donc à un seul point: désignons-le par $f_0(x)$. Il vient

$$(18) \qquad f_0(x) \in \delta_n(x) \qquad \text{pour} \quad n=1,2,\dots$$

Soient maintenant: $x_1, x_2, \dots, x_m$ un système fini quelconque d'éléments de E, ε un nombre positif et n un indice tel que $1/2^{n-1} < \varepsilon$. Posons

$$H = F_n(x_1) F_n(x_2) \dots F_n(x_m).$$

Comme $\Phi_n \in \boldsymbol{P}$ et $F_n(x_i) \in \Phi_n$ pour $i=1,2,\dots,m$, on a $\overline{\overline{H}} \geqslant \mathfrak{m}$.

Or, soit $f \in H$. D'après (14) et (17), nous avons

$$f(x_i) \in \delta_n(x_i) \qquad \text{pour} \quad i=1,2,\dots,m.$$

Donc, $\delta_n(x)$ étant un intervalle de longueur $1/2^{n-1} < \varepsilon$, on trouve d'après (18) les formules (11). La fonction $f_0(x)$ est par conséquent une fonction d'accumulation d'ordre $\mathfrak{m}$ de la famille F_0, c. q. f. d.

Remarques sur la note de M. Sierpiński »Un théorème sur les familles d'ensembles et ses applications«[1]).

Par

Andrzej Mostowski (Varsovie).

Des deux remarques qui suivent la première concerne les théorèmes 1 et 2 de M. Sierpiński et la seconde son théorème 3.

1. Soit E un ensemble quelconque. Toute famille héréditaire et additive (au sens restreint) I de sous ensembles de E s'appelle un *idéal* dans E[2]). Convenons de dire qu'une famille Φ de sous-ensembles de E jouit de la propriété $\boldsymbol{P}_I$ si aucun produit d'un nombre fini d'ensembles de Φ n'appartient à I.

Or, le théorème 1 de M. Sierpiński reste vrai si l'on y remplace la propriété $\boldsymbol{P}$ par $\boldsymbol{P}_I$, I étant un idéal quelconque dans E. En raisonnant comme M. Sierpiński au § 2 de sa note, on conclut que, pour tout idéal I, il existe une fonction $f(X)$ définie pour $X \subset E$, n'admettant que les valeurs 0 et 1, ne se réduisant pas à une constante, additive au sens restreint et telle que $f(X)=0$ pour $X \in I$[3]). La famille des $X \subset E$ pour lesquels on a $f(X)=0$ forme un idéal *premier* J[4]) contenant I.

Le raisonnement de M. Sierpiński peut donc être considéré comme une nouvelle démonstration du théorème fondamental de l'arithmétique des idéaux[5]).

---

[1]) Ce volume, p. 1-6.

[2]) M. H. Stone, Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), pp. 37 et suivantes; A. Tarski, Fund. Math. **32** (1939), p. 50.

[3]) M. H. Stone et J. v. Neumann, Fund. Math. **25** (1935), pp. 353 et suivantes, théorème 14.

[4]) C. à d., si X non $\in J$, alors $E - X \in J$.

[5]) On connait plusieurs démonstrations de ce théorème. Comp. les travaux cités ci-dessus et aussi A. Tarski, Monatshefte f. Math. u. Phys. **37** (1931), pp. 30 et suivantes, théorème 56 (démontré par A. Lindenbaum), K. Gödel, Ergebn. math. Koll., Wien **3** (1931), p. 20.

2. Soient: E un ensemble quelconque, T un espace topologique et E^T la famille des fonctions $f(x)$ définies dans E et dont les valeurs appartiennent à T. L'ensemble E^T devient un espace topologique si l'on convient d'appeler *entourage* d'une fonction $f \in E^T$ tout ensemble de la forme

$$\prod_{i=1}^{m} \underset{g}{E}[g(x_i) \in G_i]$$

où $x_i \in E$ et où G_i est un sous-ensemble ouvert de T contenant $f(x_i)$ pour $i=1,2,...,n$.

M. Čech a démontré, que si T est bicompact, E^T l'est aussi[6]). Cela veut dire que F_0 étant un sous-ensemble de E^T de puissance $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, il existe un $f_0 \in E^T$ tel que tout entourage de f_0 contient au moins $\mathfrak{m}$ éléments de F_0.

Or, en posant $T=\langle 0,1\rangle$, on obtient le théorème 3 de M. Sierpiński.

[6]) E. Čech, Ann. of Math., IIs., **38** (1937), p. 830.

Sur une suite transfinie d'ensembles de nombres naturels.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

N_1 et N_2 étant deux ensembles infinis de nombres naturels, nous dirons que N_2 est *presque contenu* dans N_1 et nous écrirons

$$N_2 \overset{*}{\subset} N_1,$$

si l'ensemble $N_2 - N_1$ est fini (ou vide).

Nous dirons que les ensembles N_1 et N_2 sont *essentiellement différents* si l'ensemble $(N_1 - N_2)+(N_2 - N_1)$ est infini.

Le but de cette Note est de démontrer ce

Théorème[1]). *Il existe une suite transfinie $\{N_\xi\}_{\xi<\Omega}$ de type Ω d'ensembles infinis de nombres naturels telle que, pour $\alpha<\beta<\Omega$, l'ensemble N_β est à la fois presque contenu dans N_α et essentiellement différent de N_α.*

Lemme. *$E_1, E_2, ...$ étant une suite infinie d'ensembles infinis de nombres naturels telle que de deux ensembles E_k et E_l de cette suite l'un (au moins) est presque contenu dans l'autre, il existe un ensemble E qui est presque contenu dans chacun et essentiellement différent de chacun des ensembles $E_1, E_2, ...$*

[1]) Selon une remarque de M. A. Mostowski, ce théorème peut être exprimé en termes algébriques comme il suit: *Si R est un anneau de Boole formé de tous les ensembles de nombres naturels et I est un idéal des ensembles finis, alors R/I contient une suite $\{x_\xi\}$ de type Ω telle que, pour $\xi<\eta<\Omega$, x_η est un diviseur de x_ξ.*