Un théorème sur les familles d'ensembles et ses applications.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

1. Soit $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ un nombre cardinal quelconque que nous supposerons fixé dans ce qui suit.

Nous dirons qu'une famille Φ d'ensembles quelconques *jouit de la propriété* $\boldsymbol{P}$, et nous écrirons $\Phi \in \boldsymbol{P}$, si tout produit d'un nombre fini d'ensembles de la famille Φ est de puissance $\geqslant \mathfrak{m}$.

On voit sans peine que si $\Theta = \Sigma\Phi$ est une somme de familles croissantes $\Phi \in \boldsymbol{P}$, on a aussi $\Theta \in \boldsymbol{P}$. D'autre part, il est évident que si $\Phi \in \boldsymbol{P}$ et $F \subset \Phi$, on a $F \in \boldsymbol{P}$.

Nous désignerons par $\Phi + (E)$ la famille qu'on obtient en ajoutant à la famille Φ l'ensemble E comme élément.

Lemme. *Si l'ensemble E est une somme de deux ensembles, $E = E^0 + E^1$, et si F est une famille d'ensembles telle que $F + (E) \in \boldsymbol{P}$, l'une au moins des formules $F + (E^0) \in \boldsymbol{P}$ et $F + (E^1) \in \boldsymbol{P}$ est vraie.*

Démonstration. Supposons le contraire. Il existe donc un système fini $M_1, M_2, \ldots, M_k$ d'ensembles de la famille F, tel que l'ensemble $M_1 M_2 \ldots M_k E^0$ est de puissance $< \mathfrak{m}$, et un système fini $N_1, N_2, \ldots, N_l$ d'ensembles de la famille F, tel que l'ensemble $N_1 N_2 \ldots N_l E^1$ est de puissance $< \mathfrak{m}$. Vu que $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, l'ensemble

$$M_1 M_2 \ldots M_k N_1 N_2 \ldots N_l E \subset M_1 M_2 \ldots M_k E^0 + N_1 N_2 \ldots N_l E^1$$

serait de puissance $< \mathfrak{m}$, ce qui est incompatible avec l'hypothèse que $F + (E) \in \boldsymbol{P}$.

Théorème 1. *Soit $F \epsilon \boldsymbol{P}$ la famille d'ensembles (pas nécessairement distincts) formant une suite transfinie quelconque de type $\varphi \geqslant \omega$:*

$$E_1, E_2, \ldots, E_\omega, E_{\omega+1}, \ldots, E_\xi, \ldots \qquad (\xi<\varphi) \tag{1}$$

et soit

$$E_\xi = E_\xi^0 + E_\xi^1 \qquad \textit{pour tout} \quad \xi<\varphi.$$

Il existe alors une suite transfinie $\{\tau_\xi\}$ de type φ, formée de nombres 0 et 1 et telle que Φ désignant la famille de tous les ensembles $E_\xi^{\tau_\xi}$ où $\xi<\varphi$, on a $\Phi \epsilon \boldsymbol{P}$.

Démonstration. On a d'après (2) $E_1 = E_1^0 + E_1^1$. Or, vu que $E_1 \epsilon F$ et que $F \epsilon \boldsymbol{P}$, on conclut du lemme que l'une au moins des formules $F + (E_1^0) \epsilon \boldsymbol{P}$ et $F + (E_1^1) \epsilon \boldsymbol{P}$ est vraie. Si c'est la première, posons $\tau_1 = 0$, sinon, posons $\tau_1 = 1$. Nous aurons donc toujours $F + (E_1^{\tau_1}) \epsilon \boldsymbol{P}$.

Soit maintenant $1 < \alpha < \varphi$ et supposons que nous ayons défini les nombres τ_ξ pour $\xi < \alpha$ de manière que Φ_ξ désignant la famille de tous les ensembles $E_\eta^{\tau_\eta}$ où $\eta \leqslant \xi$, on ait

$$\Phi_\xi + F \epsilon \boldsymbol{P} \qquad \text{pour} \quad \xi < \alpha. \tag{3}$$

Soit $\Phi'_\alpha = \sum_{\xi<\alpha} \Phi_\xi$, d'où $\Phi'_\alpha + F = \sum_{\xi<\alpha} (\Phi_\xi + F)$. Selon la définition des familles Φ_ξ, on a $\Phi_\xi + F \subset \Phi_\eta + F$ pour $\xi < \eta$; d'après (3), on a donc $\Phi'_\alpha + F \epsilon \boldsymbol{P}$. Or $E_\alpha \epsilon F$ et d'après (2) $E_\alpha = E_\alpha^0 + E_\alpha^1$. On conclut donc du lemme que l'une au moins des formules $\Phi'_\alpha + F + (E_\alpha^0) \epsilon \boldsymbol{P}$ et $\Phi'_\alpha + F + (E_\alpha^1) \epsilon \boldsymbol{P}$ est vraie. Si c'est la première, posons $\tau_\alpha = 0$, sinon, posons $\tau_\alpha = 1$. Nous aurons $\Phi'_\alpha + F + (E_\alpha^{\tau_\alpha}) \epsilon \boldsymbol{P}$, donc, vu que $\Phi'_\alpha + (E_\alpha^{\tau_\alpha}) = \Phi_\alpha$,

$$\Phi_\alpha + F \epsilon \boldsymbol{P}. \tag{4}$$

La suite transfinie $\{\tau_\alpha\}_{\alpha<\varphi}$ est ainsi définie par l'induction transfinie et on a la formule (4) pour $\alpha < \varphi$. En posant $\Phi = \sum_{\alpha<\varphi} \Phi_\alpha$, on aura donc $\Phi + F \epsilon \boldsymbol{P}$, d'où, à plus forte raison, $\Phi \epsilon \boldsymbol{P}$. Or, comme Φ est évidemment la famille de tous les ensembles $E_\alpha^{\tau_\alpha}$ où $\alpha < \varphi$, le théorème se trouve démontré.

2. Soit H un ensemble quelconque de puissance $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ et supposons tous les sous-ensembles de H rangés en une suite transfinie de type φ:

$$H_1, H_2, \ldots, H_\omega, H_{\omega+1}, \ldots, H_\xi, \ldots \qquad (\xi<\varphi). \tag{5}$$

Posons:

$$E_\xi = H, \qquad E_\xi^0 = H_\xi, \qquad E_\xi^1 = H - H_\xi \qquad \text{pour} \quad \xi < \varphi. \tag{6}$$

Soit F la famille de tous les ensembles E_ξ où $\xi < \varphi$. On a évidemment $F \epsilon \boldsymbol{P}$ et, d'après (6), on a les formules (2). D'après le th. 1, il existe donc une suite transfinie $\{\tau_\xi\}_{\xi<\varphi}$ formée de nombres 0 et 1 et telle que Φ désignant la famille de tous les ensembles $E_\xi^{\tau_\xi}$ où $\xi < \varphi$, on a $\Phi \epsilon \boldsymbol{P}$.

Soit $E \subset H$. Il existe donc un nombre ordinal $\xi < \varphi$ pour lequel $E = H_\xi$. Or, d'après (6) (et vu que $\tau_\xi = 0$ ou 1), on a soit $H_\xi = E_\xi^{\tau_\xi}$, soit $H - H_\xi = E_\xi^{\tau_\xi}$. Comme $E_\xi^{\tau_\xi} \epsilon \Phi$, on en conclut que l'on a soit $E \epsilon \Phi$, soit $H - E \epsilon \Phi$. Donc:

$$\text{si} \quad E \subset H \quad \text{et} \quad E \text{ non } \epsilon\, \Phi, \quad \text{on a} \quad H - E \epsilon \Phi. \tag{7}$$

Définissons maintenant la fonction $f(E)$ des sous-ensembles E de H comme il suit:

$$f(E) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad E \epsilon \Phi \\ 0 & \text{si} \quad E \text{ non } \epsilon\, \Phi. \end{cases} \tag{8}$$

Il résulte de la formule $\Phi \epsilon \boldsymbol{P}$ (les éléments de la famille Φ étant des sous-ensembles de l'ensemble H, qui est de puissance $\mathfrak{m}$) que tout ensemble appartenent à la famille Φ est de puissance $\mathfrak{m}$. On a donc

$$f(E) = 0 \quad \text{pour} \quad E \subset H \quad \text{et} \quad \overline{\overline{E}} < \mathfrak{m}. \tag{9}$$

Soient maintenant M et N deux sous-ensembles disjoints de H. Je dis que

$$f(M+N) = f(M) + f(N). \tag{10}$$

Trois cas sont à distinguer:

1° $M \epsilon \Phi$ et $N \epsilon \Phi$. Comme $\Phi \epsilon \boldsymbol{P}$, on a $\overline{\overline{MN}} = \mathfrak{m}$ et les ensembles M et N ne seraient pas disjoints, contrairement à l'hypothèse. Ce cas est donc impossible.

2° $M \text{ non } \epsilon\, \Phi$ et $N \text{ non } \epsilon\, \Phi$. D'après (7), on a donc $H - M \epsilon \Phi$ et $H - N \epsilon \Phi$. Si l'on avait $M + N \epsilon \Phi$, on aurait en raison de $\Phi \epsilon \boldsymbol{P}$

$$\overline{\overline{(M+N)(H-M)(H-N)}} \geqslant \mathfrak{m},$$

ce qui est impossible. On a donc $M + N \text{ non } \epsilon\, \Phi$, et, comme dans notre cas $M \text{ non } \epsilon\, \Phi$ et $N \text{ non } \epsilon\, \Phi$, on trouve d'après (8):

$$f(M) = 0, \qquad f(N) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(M+N) = 0,$$

de sorte que la formule (10) est vraie.

3° L'un seulement des ensembles M et N appartient à Φ, p. ex. $M \epsilon \Phi$ et N non $\epsilon \Phi$. On a alors $f(M)=1$ et $f(N)=0$. Si l'on avait $M+N$ non $\epsilon \Phi$, on aurait d'après (7) $H-(M+N) \epsilon \Phi$ et, comme $M \epsilon \Phi$ et $\Phi \epsilon \boldsymbol{P}$, on obtiendrait

$$\overline{\overline{M[H-(M+N)]}} \geqslant \mathfrak{m},$$

ce qui est impossible. On a donc $M+N \epsilon \Phi$, d'où selon (8), $f(M+N)=1$, de sorte que la formule (10) est encore vraie.

La formule (10) est ainsi établie pour tout système de deux sous-ensembles disjoints de H, ce qui prouve que la fonction $f(E)$ est *additive* au sens restreint. Nous avons ainsi démontré ce

Théorème 2[1]. *H étant un ensemble infini quelconque, il existe une fonction $f(E)$ définie pour les sous-ensembles de H, ne s'annulant pas identiquement, ne prenant que les valeurs 0 et 1, s'annulant pour tous les sous-ensembles de H de puissance inférieure à celle de H et additive au sens restreint, c. à d. telle que*

$$f(M+N)=f(M)+f(N) \quad \textit{pour} \quad M \subset H, \quad N \subset H \quad \textit{et} \quad MN=0.$$

Notre démonstration de ce théorème, en tant que basée sur le théorème de Zermelo sur le bon ordre, utilise l'axiome du choix. Or, l'intervention de cet axiome y est essentielle, puisque, comme j'ai démontré ailleurs[2], si l'on pouvait nommer une fonction $f(E)$ satisfaisant au th. 2 dans le cas le plus simple, à savoir où H est l'ensemble de tous les nombres naturels, on pourrait aussi nommer une fonction de variable réelle, non mesurable au sens de Lebesgue.

3. F_0 étant une famille de fonctions réelles définies dans un ensemble E formé d'éléments quelconques, nous dirons avec M. A. Tychonoff qu'une fonction $f_0(x)$ définie dans E (et appartenant à F_0 ou non) est une *fonction d'accumulation* d'ordre $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ de la famille F_0 s'il existe dans la famille F_0, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout système fini $x_1, x_2, \ldots, x_m$ d'éléments de E, $\mathfrak{m}$ fonctions distinctes $f(x)$ telles que

$$(11) \qquad |f(x_i)-f_0(x_i)| < \varepsilon \qquad \text{pour} \quad i=1,2,\ldots,m.$$

Théorème 3[3]. *Toute famille F_0 de puissance $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ de fonctions réelles f définies dans un ensemble E et telles que $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ pour $x \epsilon E$ admet au moins une fonction d'accumulation d'ordre $\mathfrak{m}$.*

[1]) Cf. A. Tarski, Fund. Math. **15** (1930), p. 42-50.

[2]) W. Sierpiński, Fund. Math. **30** (1938), p. 96.

[3]) Cf. A. Tychonoff, Math. Ann. **111** (1935), p. 764 („Häufungstellenprinzip").

Démonstration. Soit

$$(12) \qquad x_1, x_2, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\xi, \ldots \qquad (\xi < \varphi)$$

une suite transfinie de type φ formée de tous les éléments différents de E.

Nous définirons par induction (finie) pour chaque élément x de E et chaque n naturel un ensemble $F_n(x)$ de fonctions, un nombre naturel $t_n(x)$ et une famille Φ_n d'ensembles comme il suit.

Posons:

$$(13) \qquad F_1(x)=F_0 \quad \text{et} \quad t_1(x)=1 \qquad \text{pour} \quad x \epsilon E.$$

Soit n un indice donné et supposons que nous ayons déjà défini les ensembles $F_n(x)$ et les nombres $t_n(x)$ pour $x \epsilon E$ de façon que

$$(14) \qquad F_n(x)=\underset{f}{E}\left[f \epsilon F_0,\ \frac{t_n(x)-1}{2^{n-1}} \leqslant f(x) \leqslant \frac{t_n(x)}{2^{n-1}}\right] \qquad \text{pour} \quad x \epsilon E$$

et que, pour la famille Φ_n de tous les ensembles $F_n(x)$ où $x \epsilon E$, on ait $\Phi_n \epsilon \boldsymbol{P}$. Ces conditions sont, d'après (13), évidemment remplies pour $n=1$.

Posons pour $\xi < \varphi$:

$$(15) \qquad \left\{ \begin{array}{l} E_\xi = F_n(x_\xi), \\ E_\xi^0 = \underset{f}{E}\left[f \epsilon F_0,\ \dfrac{t_n(x_\xi)-1}{2^{n-1}} \leqslant f(x_\xi) \leqslant \dfrac{2t_n(x_\xi)-1}{2^n}\right], \\ E_\xi^1 = \underset{f}{E}\left[f \epsilon F_0,\ \dfrac{2t_n(x_\xi)-1}{2^n} \leqslant f(x_\xi) \leqslant \dfrac{t_n(x_\xi)}{2^{n-1}}\right]. \end{array} \right.$$

Nous aurons évidemment les formules (2) et, d'après le th. 1, il existe une suite transfinie $\{\tau_\xi\}$ de type φ formée de nombres 0 et 1, telle que Ψ désignant la famille de tous les ensembles $E_\xi^{\tau_\xi}$ où $\xi < \varphi$, on a $\Psi \epsilon \boldsymbol{P}$.

Nous poserons alors:

$$(16) \qquad F_{n+1}(x_\xi)=E_\xi^{\tau_\xi} \quad \text{et} \quad t_{n+1}(x_\xi)=2t_n(x_\xi)-1+\tau_\xi \qquad \text{pour} \quad \xi < \varphi.$$

D'après (15) et (16), nous aurons

$$F_{n+1}(x)=\underset{f}{E}\left[f \epsilon F_0,\ \frac{t_{n+1}(x)-1}{2^n} \leqslant f(x) \leqslant \frac{t_{n+1}(x)}{2^n}\right] \qquad \text{pour} \quad x \epsilon E$$

et d'après (16), Φ_{n+1} désignant la famille de tous les ensembles $F_{n+1}(x)$ pour $x \epsilon E$, on a $\Phi_{n+1}=\Psi$, donc $\Phi_{n+1} \epsilon \boldsymbol{P}$.

Les ensembles $F_n(x)$ et les nombres $t_n(x)$ sont ainsi définis par induction pour tout $x \epsilon E$ et $n=1,2,\ldots$, de façon à remplir la formule (14) et la formule $\Phi_n \epsilon \boldsymbol{P}$ pour $n=1,2,\ldots$

Posons maintenant

$$(17)\qquad \delta_n(x) = \underset{y}{E}\left[\frac{t_n(x)-1}{2^{n-1}} \leqslant y \leqslant \frac{t_n(x)}{2^{n-1}}\right] \qquad \text{pour } x \epsilon E \text{ et } n=1,2,\ldots$$

C'est un intervalle fermé de longueur $1/2^{n-1}$, et on a d'après (16)

$$\delta_{n+1}(x) \subset \delta_n(x) \qquad \text{pour } x \epsilon E \text{ et } n=1,2,\ldots$$

Le produit de la suite infinie descendante des intervalles

$$\delta_1(x)\,\delta_2(x)\,\delta_3(x)\ldots$$

se réduit donc à un seul point: désignons-le par $f_0(x)$. Il vient

$$(18)\qquad f_0(x) \,\epsilon\, \delta_n(x) \qquad \text{pour } n=1,2,\ldots$$

Soient maintenant: $x_1, x_2, \ldots, x_m$ un système fini quelconque d'éléments de E, ε un nombre positif et n un indice tel que $1/2^{n-1} < \varepsilon$. Posons

$$H = F_n(x_1)F_n(x_2)\ldots F_n(x_m).$$

Comme $\Phi_n \epsilon \boldsymbol{P}$ et $F_n(x_i) \epsilon \Phi_n$ pour $i=1,2,\ldots,m$, on a $\overline{\overline{H}} \geqslant \mathfrak{m}$.

Or, soit $f \epsilon H$. D'après (14) et (17), nous avons

$$f(x_i) \,\epsilon\, \delta_n(x_i) \qquad \text{pour } i=1,2,\ldots,m.$$

Donc, $\delta_n(x)$ étant un intervalle de longueur $1/2^{n-1} < \varepsilon$, on trouve d'après (18) les formules (11). La fonction $f_0(x)$ est par conséquent une fonction d'accumulation d'ordre $\mathfrak{m}$ de la famille F_0, c. q. f. d.

Remarques sur la note de M. Sierpiński »Un théorème sur les familles d'ensembles et ses applications«[1]).

Par

Andrzej Mostowski (Varsovie).

Des deux remarques qui suivent la première concerne les théorèmes 1 et 2 de M. Sierpiński et la seconde son théorème 3.

1. Soit E un ensemble quelconque. Toute famille héréditaire et additive (au sens restreint) I de sous ensembles de E s'appelle un *idéal* dans E[2]). Convenons de dire qu'une famille Φ de sous-ensembles de E jouit de la propriété $\boldsymbol{P}_I$ si aucun produit d'un nombre fini d'ensembles de Φ n'appartient à I.

Or, le théorème 1 de M. Sierpiński reste vrai si l'on y remplace la propriété $\boldsymbol{P}$ par $\boldsymbol{P}_I$, I étant un idéal quelconque dans E. En raisonnant comme M. Sierpiński au § 2 de sa note, on conclut que, pour tout idéal I, il existe une fonction $f(X)$ définie pour $X \subset E$, n'admettant que les valeurs 0 et 1, ne se réduisant pas à une constante, additive au sens restreint et telle que $f(X)=0$ pour $X \epsilon I$[3]). La famille des $X \subset E$ pour lesquels on a $f(X)=0$ forme un idéal *premier* J[4]) contenant I.

Le raisonnement de M. Sierpiński peut donc être considéré comme une nouvelle démonstration du théorème fondamental de l'arithmétique des idéaux[5]).

[1]) Ce volume, p. 1-6.

[2]) M. H. Stone, Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), pp. 37 et suivantes; A. Tarski, Fund. Math. **32** (1939), p. 50.

[3]) M. H. Stone et J. v. Neumann, Fund. Math. **25** (1935), pp. 353 et suivantes, théorème 14.

[4]) C. à d., si X non ϵJ, alors $E - X \epsilon J$.

[5]) On connait plusieurs démonstrations de ce théorème. Comp. les travaux cités ci-dessus et aussi A. Tarski, Monatshefte f. Math. u. Phys. **37** (1931), pp. 30 et suivantes, théorème 56 (démontré par A. Lindenbaum), K. Gödel, Ergebn. math. Koll., Wien **3** (1931), p. 20.