Théorèmes sur l'homotopie des fonctions continues de variable complexe et leurs rapports à la Théorie des fonctions analytiques.

Par

Casimir Kuratowski (Warszawa).

Soit $y=f(x)$ une fonction continue, définie sur un espace arbitraire $\mathcal{X}$ (p. ex. sur un sous-ensemble ouvert du plan) et dont les valeurs sont des nombres complexes finis $\neq 0$. Nous écrirons $f\sim 1$ pour exprimer que *cette fonction admet une branche univoque (continue) de logarithme*, c. à d. qu'il existe une fonction continue $u(x)$ telle que $f(x)=e^{u(x)}$.

Bien que cette définition soit analytique, la propriété de posséder une branche univoque de logarithme est de nature *topologique*. Elle équivaut, en effet (cf. §1, N II), à la propriété d'être *déformable en une fonction constante* (donc en fonction identiquement égale à 1) de manière qu'au cours de cette déformation aucune fonction intermédiaire n'admette la valeur 0. En d'autres termes: elle équivaut à l'existence d'une fonction continue de deux variables $h(x,t)$, où $x \in \mathcal{X}$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$, satisfaisant aux conditions:

$$h(x,0)=f(x), \quad h(x,1)=1, \quad h(x,t)\neq 0 \text{ quels que soient } x \text{ et } t;$$

ce qui s'exprime d'une façon plus brève en disant que f *est homotope à* 1 dans l'espace $\mathcal{P}^{\mathcal{X}}$ (où $\mathcal{P}$ désigne le plan $\mathcal{E}^2$ des nombres complexes finis privé du point 0 et où $\mathcal{P}^{\mathcal{X}}$ désigne l'espace des transformations continues de $\mathcal{X}$ en sous-ensembles de $\mathcal{P}$).

La notation $f\sim 1$ est empruntée à la Théorie des groupes. L'ensemble $\mathcal{P}$ étant un groupe par rapport à la multiplication, l'espace $\mathcal{P}^{\mathcal{X}}$ devient aussi un groupe en posant:

$$f_3=f_1\cdot f_2 \quad \text{veut dire} \quad f_3(x)=f_1(x)\cdot f_2(x) \text{ quel que soit } x.$$

Les fonctions qui admettent une branche univoque de logarithme formant un sous-groupe $\Gamma(\mathcal{X})$ de $\mathcal{P}^{\mathcal{X}}$, la relation $f\sim 1$ signifie que f équivaut à 1 modulo $\Gamma(\mathcal{X})$. D'une façon plus générale: $f_1\sim f_2$ veut dire que $(f_1/f_2)\sim 1$, c. à d. qu'on a $f_1(x)=f_2(x)\cdot e^{u(x)}$, ou encore — en vertu du théorème précité — que les fonctions f_1 et f_2 sont homotopes. En identifiant les fonctions homotopes, on obtient le groupe-facteur $\mathfrak{B}(\mathcal{X})=\mathcal{P}^{\mathcal{X}}/\Gamma(\mathcal{X})$. Ce groupe étant un invariant topologique de l'espace $\mathcal{X}$, son étude fournit des résultats topologiques importants. Si p. ex. $\mathcal{X}$ est un sous-ensemble fermé du plan $\mathcal{S}_2$ des nombres complexes (le point à l'infini y compris), le rang du groupe $\mathfrak{B}(\mathcal{X})$ augmenté de 1 est égal au nombre des composantes de l'ensemble $\mathcal{S}_2-\mathcal{X}$.

Mais aussi au point de vue analytique ce groupe mérite d'être étudié. Ainsi p. ex., si $\mathcal{X}$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathcal{S}_2$ et le nombre des composantes de $\mathcal{S}_2-\mathcal{X}$ est fini, chaque ensemble-élément du groupe $\mathfrak{B}(\mathcal{X})$ contient une fonction rationnelle; par conséquent, *chaque fonction continue f définie sur $\mathcal{X}$ et qui ne s'annule en aucun point* (c. à d. que $f \in \mathcal{P}^{\mathcal{X}}$) *est de la forme*

$$f(x) = r(x)\cdot e^{u(x)}, \tag{1}$$

$r(x)$ étant une fonction rationnelle et $u(x)$ une fonction continue, convenablement choisies.

Ce dernier théorème conduit à l'étude du cas plus général, où $\mathcal{X}$ est un sous-ensemble ouvert arbitraire de $\mathcal{S}_2$. On a dans ce cas le théorème suivant, qui présente une analogie remarquable avec le *théorème de Runge* sur les fonctions holomorphes: à savoir, $f(x)$ est alors de la forme

$$f(x) = \lim_{n=\infty} r_n(x)\cdot e^{u_n(x)}, \tag{2}$$

les fonctions r_n étant rationnelles, les fonctions u_n continues et la convergence étant uniforme sur chaque sous-ensemble fermé de $\mathcal{X}$.

Au *théorème de Weierstrass* sur la décomposition d'une fonction entière en facteurs primaires vient correspondre l'énoncé suivant: admettons que chaque composante bornée du complémentaire

$\mathcal{S}_2-\mathfrak{X}$ de l'ensemble ouvert $\mathfrak{X}$ est isolée (c'est bien le cas d'une fonction entière, car alors les composantes bornées de $\mathcal{S}_2-\mathfrak{X}$ se réduisent aux zéros de cette fonction); chaque fonction $f \in \mathfrak{P}^{\mathfrak{X}}$ est alors de la forme

$$f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (x-p_n)^{k_n} e^{u_n(x)}, \tag{3}$$

k_n étant des entiers (positifs, négatifs ou 0), u_n des fonctions continues, p_n des points de $\mathcal{S}_2-\mathfrak{X}$ et la convergence étant uniforme sur chaque sous-ensemble fermé de $\mathfrak{X}$.

De là on déduit que, si le point à l'infini est le seul point d'accumulation des composantes de $\mathcal{S}_2-\mathfrak{X}$, la fonction f est de la forme

$$f(x) = m(x)\, e^{u(x)}, \tag{4}$$

où $m(x)$ est une fonction méromorphe sur le plan $\mathcal{E}^2$ tout entier.

Dans le § 4, nous envisageons la notion de multiplicité d'un ensemble par rapport à une fonction; en symboles: $\mu_X f$. Soit d'abord f une fonction rationnelle

$$f(x) = c\cdot(x-p_1)^{k_1}\cdot \ldots \cdot (x-p_m)^{k_m} \quad \text{où} \quad p_j \neq p_l \quad \text{pour} \quad j \neq l.$$

X désignant l'un des zéros ou des pôles $p_1,\ldots,p_m$, $\mu_X f$ désigne sa multiplicité dans le sens habituel: $\mu_{p_j} f = k_j$ [1]). Il en est de même lorsque X désigne le point à l'infini $p_0=\infty$; on pose alors $\mu_{p_0} f = k_0 = -(k_1+\ldots+k_m)$ [2]). Si X est un ensemble arbitraire, $\mu_X f$ désigne le nombre des zéros et pôles qui appartiennent à X, chacun compté avec sa multiplicité, c. à d.:

$$\mu_X f = k_{j_1} + \ldots + k_{j_n} \quad \text{où} \quad p_{j_1},\ldots,p_{j_n} \in X \quad \text{et} \quad j_l \geqslant 0.$$

Passons au cas plus général, où $f \in \mathfrak{P}^G$, G étant un ensemble ouvert dont le complémentaire $\mathcal{S}_2-G$ est constitué par un nombre fini de composantes $C_0,\ldots,C_n$ (ces composantes jouent à présent le rôle des zéros et pôles d'une fonction rationnelle). On a alors la formule (1), donc $f \sim r$. Soit F une somme finie de composantes: $F = C_{j_1}+\ldots+C_{j_n}$. Nous posons $\mu_F f = \mu_F r$.

Cette définition est justifiée par le fait que $r^*(x)$ étant une autre fonction rationnelle homotope à $f(x)$ (sur G), il vient $\mu_F r^* = \mu_F r$.

[1]) Notons que la multiplicité d'un pôle est *négative* par définition.

[2]) De sorte que $\mu_\infty f(x) = \mu_0 f(1/x)$.

On déduit facilement de (1) une relation de la forme

$$f(x) \sim (x-p_0)^{k_0}\cdot \ldots \cdot (x-p_m)^{k_m}, \quad k_0+\ldots+k_m=0, \quad p_j \in C_j,$$

(en convenant que la différence $x-p_j$ doit être remplacée par 1 si $p_j=\infty$). Il vient:

$$\mu_{C_j} f = k_j, \quad \mu_F f = k_{j_1}+\ldots+k_{j_m}.$$

Si l'on ne fait aucune hypothèse sur le nombre des composantes de $\mathcal{S}_2-G$ et si F désigne un ensemble fermé-ouvert dans $\mathcal{S}_2-G$ (c. à d. que les ensembles F et $\mathcal{S}_2-G-F$ sont fermés), on a la relation (2) et l'on pose $\mu_F f = \lim_{n=\infty} \mu_F r_n$. Comme on prouve, cette limite existe toujours et ne dépend pas du choix des fonctions r_n. *La multiplicité de F par rapport à f est donc le nombre des zéros et pôles appartenant à F d'une fonction rationnelle r (chacun compté avec sa multiplicité), où r approche la fonction f „suffisamment bien" au sens de l'égalité* (2).

La multiplicité $\mu_F f$, considérée comme fonction de F variable (pour f fixe), *caractérise* la fonction f au point de vue de l'homotopie, c. à d. que la relation $f_1 \sim f_2$ équivaut à l'hypothèse, que l'on a pour chaque F (fermé-ouvert dans $\mathcal{S}_2-G$) l'égalité $\mu_F f_1 = \mu_F f_2$. On démontre aussi que chaque fonction $\nu(F)$ à valeurs entières, additive (c. à d. telle que $\nu(F_1+F_2)=\nu(F_1)+\nu(F_2)$ si $F_1F_2=0$) et normée (c. à d. telle que $\nu(\mathcal{S}_2-G)=0$) est la multiplicité par rapport à une fonction f convenablement choisie; de sorte que $\mu_F f = \nu(F)$ quel que soit F. Autrement dit, *il est toujours possible de définir sur un ensemble ouvert G donné une fonction $f \in \mathfrak{P}^G$ par rapport à laquelle les ensembles F aient la multiplicité donnée en avance (avec les hypothèses d'additivité et de norme)* [3]).

On déduit de là une caractérisation du groupe $\mathfrak{B}(G)$. A savoir, désignons par $\mathfrak{N}(\mathfrak{X})$ le groupe de toutes les fonctions $\nu(F)$ additives et normées où F parcourt la famille des sous-ensembles fermés-ouverts de $\mathfrak{X}$ et où la composition de deux éléments ν_1 et ν_2 de $\mathfrak{N}(\mathfrak{X})$ est définie par la condition:

$$\nu_3 = \nu_1 + \nu_2 \quad \text{veut dire} \quad \nu_3(F) = \nu_1(F) + \nu_2(F) \quad \text{quel que soit } F.$$

[3]) Le même problème dans le domaine des fonctions *holomorphes* reste ouvert.

On démontre que *les groupes* $\mathfrak{B}(G)$ *et* $\mathfrak{N}(\mathcal{S}_2-G)$ *sont isomorphes*. Dans les cas particuliers où $\mathcal{S}_2-G$ est constitué respectivement par $n+1$ composantes ou bien par une suite infinie de composantes dont toutes, sauf une seule, sont isolées, le groupe $\mathfrak{B}(G)$ est isomorphe respectivement à $\mathcal{G}^n$ (groupe des systèmes de n entiers) ou bien à $\mathcal{G}^{\aleph_0}$ (groupe des suites infinies d'entiers). Enfin, le groupe $\mathcal{G}^{\omega}$ (groupe des suites infinies ne contenant qu'un nombre fini de termes $\neq 0$) est isomorphe à $\mathfrak{B}(F)$ où F est un ensemble fermé dont le complémentaire admet une infinité de composantes.

La notion de multiplicité $\mu_F f$ permet d'étendre de nombreux théorèmes de la Théorie des fonctions analytiques aux fonctions continues arbitraires. Remarquons d'abord que, $g(x)$ étant une fonction holomorphe ou, plus généralement, méromorphe sur un ensemble H ouvert, et p étant un zéro ou un pôle de cette fonction, sa multiplicité au sens classique du môt coïncide avec $\mu_p g$ (en réduisant la variabilité de l'argument de g aux points de H différents des zéros et pôles; cf. aussi le renvoi[1]), p. 318). Parmi les théorèmes de la théorie des fonctions holomorphes qui se laissent généraliser à l'aide du coefficient $\mu_F f$, citons le *théorème de Rouché*, d'après lequel g et g_1 étant deux fonctions continues sur un ensemble fermé M, holomorphes à l'intérieur de M et satisfaisant à l'inégalité $|g_1(x)|<|g(x)|$ sur la frontière de M, les fonctions $g(x)$ et $g(x)+g_1(x)$ ont le même nombre des zéros à l'intérieur de M, chaque zéro étant compté avec sa multiplicité. Nous le généralisons au § 4, N XII.

Le coefficient $\mu_F f$ se laisse définir aussi d'une façon plus géométrique à l'aide de la notion, connue de l'Analyse, d'indice d'un point par rapport au parcours d'une courbe. Rappelons qu'étant donnés: une représentation paramétrique continue $x=\zeta(t)$, où $0\leqslant t\leqslant 1$, d'un continu (localement connexe) $C\subset\mathcal{E}^2$ telle que $\zeta(0)=\zeta(1)$ et un point p situé en dehors de C, on a $\zeta(t)-p=e^{u(t)}$, d'où $u(1)-u(0)=2k\pi i$. Le nombre k, qui est indépendant de la façon dont on a choisi la fonction u, est nommé l'*indice du point p relatif au parcours ζ*; en symboles $k=\mathrm{ind}_\zeta p$ [4]).

[4]) On a donc dans des hypothèses de régularités faites sur ζ:

$$\mathrm{ind}_\zeta p=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{dx}{x-p}.$$

Dans le cas particulier où pour chaque couple $t\neq t'$ autre que $0,1$ on a $\zeta(t)\neq\zeta(t')$, le continu C est une courbe simple fermée. Soit D la composante bornée de $\mathcal{S}_2-C$. On démontre que, le point p parcourant la région D, on a soit constamment $\mathrm{ind}_\zeta p=1$, soit constamment $\mathrm{ind}_\zeta p=-1$. Dans le premier cas, nous dirons que le parcours ζ est positif et dans le second qu'il est négatif.

Or, donnons-nous un ensemble ouvert $G\subset\mathcal{S}_2$ tel qu'une composante de $\mathcal{S}_2-G$ se réduise à un seul point *isolé* p (par exemple, G est l'ensemble des points où une fonction holomorphe donnée ne s'annule pas et p est un zéro de cette fonction). Soit D un cercle de centre p tel que $\bar{D}\subset G+p$; soit C le contour de D. Etant donnée une fonction $f\in\mathcal{P}^G$, on a alors

$$\mu_p f=\mathrm{ind}_{f\zeta}0,$$

ζ désignant un parcours positif ou négatif de C suivant que $p\neq\infty$ ou $p=\infty$ (et $f\zeta$ désignant la fonction superposée $f[\zeta(x)]$).

La multiplicité se laisse évaluer par un procédé analogue à l'aide de l'indice aussi dans le cas où G est une région *dont le complémentaire est formé d'un nombre fini de composantes*. F étant une composante de $\mathcal{S}_2-G$, on peut la séparer de toutes les autres composantes à l'aide d'une courbe simple fermée C. On a alors

$$\mu_F f=\mathrm{ind}_{f\zeta}0,$$

le parcours ζ de C étant positif ou négatif suivant que F est contenu dans la composante bornée ou non-bornée de $\mathcal{S}_2-C$.

Dans le cas où G est un ensemble ouvert arbitraire, on évalue la multiplicité à l'aide de la notion de *caractéristique (de Kronecker)* [5]) d'une fonction relativement à un continu élémentaire. Appelons, en effet, *disque* une région D (bornée ou non) dont la frontière est une courbe simple fermée. Appelons *continu élémentaire* tout continu A dont le complémentaire se compose d'un nombre fini de disques $D_0,\dots,D_n$ tels que $\bar{D}_j\cdot\bar{D}_l=0$ pour $j\neq l$. Evidemment, C_j désignant la frontière de D_j et B celle de A, on a $B=C_0+\dots+C_n$. Le parcours ζ_j de C_j, où $j=0,\dots,n$, étant négatif ou positif suivant que D_j est borné ou non-borné, l'orientation de B est donc positive (relativement à l'intérieur de A). Etant donnée une fonction $f\in\mathcal{P}^B$, posons:

$$\mathrm{car}_A f=\mathrm{ind}_{f\zeta_0}0+\dots+\mathrm{ind}_{f\zeta_n}0. \tag{5}$$

[5]) Cf. P. Alexandroff und H. Hopf, *Topologie I*, Berlin 1935, p. 470.

Appelons encore — d'une façon plus générale — *ensemble élémentaire* tout ensemble-somme d'un nombre fini de continus élémentaires disjoints $A=A_1+\ldots+A_m$ et posons

$$\mathrm{car}_A f = \mathrm{car}_{A_1} f + \ldots + \mathrm{car}_{A_m} f.$$

Or, en tenant compte du fait que chaque ensemble fermé $F \subset \mathcal{S}_2$ est le produit d'une suite infinie d'ensembles élémentaires, on démontre qu'*étant donnés: une fonction $f \in \mathcal{P}^G$ et un ensemble F fermé-ouvert dans $\mathcal{S}_2 - G$, on a*

$$\mu_F f = \mathrm{car}_A f, \tag{3}$$

A étant un ensemble élémentaire tel que $F \subset \mathrm{Int}(A)$ et $A \subset G+F$.

Dans le § 6, j'étudie les transformations biunivoques des ensembles ouverts. Je démontre, en particulier, que f *étant une transformation homéomorphe d'une région R en un sous-ensemble de $\mathcal{P}$, f est homotope à une homographie.* En rapprochant cet énoncé du théorème général d'après lequel chaque fonction $f \in \mathcal{P}^R$ est homotope à une fonction rationnelle, on parvient à la conclusion remarquable que, dans le cas général (où l'on ne fait pas l'hypothèse de biunivocité), le nombre des facteurs primaires de cette fonction dépend en général du nombre des composantes de $\mathcal{S}_2 - R$, tandis que, dans le cas où f est biunivoque, ce nombre se laisse réduire toujours à 2 (bien que $\mathcal{S}_2 - R$ contienne une infinité de composantes).

Notations.

$\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des nombres réels, $\mathcal{J}$ l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\mathcal{E}^2$ le plan des nombres complexes finis, $\mathcal{S}_2$ le plan $\mathcal{E}^2$ augmenté du point à l'infini, $\mathcal{P}$ le plan $\mathcal{E}^2$ privé du point 0.

$\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ désigne le produit cartésien des espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, c. à d. l'espace des couples ordonnés x, y où $x \in \mathcal{X}$ et $y \in \mathcal{Y}$, en entendant par *limite de la suite* x_n, y_n le point x, y tel que $x = \lim\limits_{n=\infty} x_n$ et $y = \lim\limits_{n=\infty} y_n$.

$\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ désigne l'espace des transformations continues de $\mathcal{X}$ en sous-ensembles de $\mathcal{Y}$.

$\mathrm{Int}(A)$ désigne l'ensemble des points intérieurs de A. Si $A = \mathrm{Int}(A)$, A est dit *ouvert*. A est dit *connexe* s'il ne se laisse pas décomposer en deux ensembles disjoints, fermés dans A et non vides. Ensemble ouvert et connexe est dit *région*. Tout sous-ensemble connexe d'un ensemble E qui n'est contenu dans aucun autre sous-ensemble connexe de E est dit *composante* de E.

Etant donnée une fonction $y = f(x)$, la fonction partielle qui s'en obtient en réduisant la variabilité de x à un ensemble A est désignée par le symbole $f|A$.

Au lieu de „$f|A \sim 1$", nous écrirons aussi „$f \sim 1$ sur A".

$\varrho(A, B)$ désigne la borne inférieure des distances $|x - y|$ où $x \in A$ et $y \in B$.

§ 1[6]). Existence du logarithme et son rapport à l'homotopie.

I. Généralités sur la relation $f \sim 1$. Citons d'abord trois propriétés élémentaires du logarithme:

1. *R étant un rayon issu du point 0, l'identité est ~ 1 sur $\mathcal{E}^2 - R$. En conséquence, pour chaque fonction $f \in (\mathcal{E}^2 - R)^{\mathcal{X}}$, on a $f \sim 1$.*

2. *Etant donnée une fonction $f \in \mathcal{P}^{\mathcal{X}}$, à chaque point $x \in \mathcal{X}$ correspond un entourage G tel que $x \in G$ et $f \sim 1$ sur G.*

3. *Etant donnés une fonction $f \sim 1$ et un point $x_0 \in \mathcal{X}$, on peut assujettir la fonction $u(x)$ telle que $f(x) = e^{u(x)}$ et $u \in (\mathcal{E}^2)^{\mathcal{X}}$ à la condition supplémentaire: $u(x_0) = c_0$ où c_0 est une valeur du $\log f(x_0)$ donnée en avance.*

De plus:

4. *Si $\mathcal{X}$ est connexe, cette condition détermine la fonction $u(x)$ d'une façon univoque.*

Plus précisément: *l'hypothèse $f(x) = e^{u(x)} = e^{v(x)}$ entraîne $v(x) - u(x) = 2k\pi i$.*

On a, en effet, $e^{v(x)-u(x)} = 1$, donc $v(x) - u(x) = 2k(x)\pi i$. La fonction $k(x)$ étant continue, définie sur un espace connexe et ayant les valeurs entières, elle est constante.

D'après un théorème bien connu (qui résulte facilement de 2, 3 et du th. de Borel):

5. *$\mathcal{J}$ désignant l'intervalle* $0 \leqslant x \leqslant 1$ (ou, plus généralement, un ensemble qui lui est homéomorphe), *on a $f \sim 1$ pour chaque $f \in \mathcal{P}^{\mathcal{J}}$.*

Par contre:

6. *C désignant une circonférence $|x| = r$* (où $x \in \mathcal{E}^2$), *on a* x non~ 1 *sur* C. D'une façon plus générale: x^n non~ 1 *sur C si $n \neq 0$.*

Soient, en effet, A la circonférence C sans point $(r, 0)$ et $\varphi(x)$, pour $x \in A$, la valeur de l'argument de x contenue entre 0 et 2π. Il vient $x = re^{i\varphi(x)}$ et $\varphi \in \mathcal{E}^A$. En supposant que $x^n \sim 1$ sur C, on aurait $x^n = r^n e^{i\psi(x)}$ où $\psi \in \mathcal{E}^C$. Donc, d'après 4, $\psi(x) = n\varphi(x) + 2k\pi$ pour $x \in A$.

[6]) Dans sa Thèse *Transformations continues en circonférences et la topologie du plan*, Fund. Math. **26** (1936), pp. 61-112, M. S. Eilenberg étudie le groupe $\mathcal{S}^{\mathcal{X}}$ où $\mathcal{S}$ désigne la circonférence $x^2 + y^2 = 1$. La majorité des théorèmes des §§ 1 et 2 se laissent déduire des théorèmes correspondants de M. Eilenberg. J'ai cru cependant préférable pour les buts de cet ouvrage de les démontrer ici directement, en suivant en général la marche du raisonnement de cet auteur. Cf. aussi ma note *Sur les espaces des transformations continues en certains groupes abeliens*, Fund. Math. **31** (1938), p. 231.

Or, la fonction φ ayant l'oscillation $\neq 0$ au point $(r,0)$, il en est de même de ψ; cette dernière fonction ne saurait donc être continue en ce point.

Remarque. La deuxième partie de la propriété 6 se déduit de la première en vertu du théorème général suivant (qui résulte facilement d'un th. de M. Eilenberg, op. cit., p. 89): *la relation* $f^n \sim 1$ *entraîne* $f \sim 1$ *pour* $n \neq 0$.

7. *Soient* $\mathfrak{X}$ *un espace compact et* $f_n \in \mathfrak{P}^{\mathfrak{X}}$, *où* $n=1,2,\ldots$, *une suite de fonctions uniformément convergente vers* $f \in \mathfrak{P}^{\mathfrak{X}}$. *On a alors* $f_n \sim f$ *pour* n *suffisamment grand.*

Posons, en effet, $f_n^* = f_n | f$. L'espace $\mathfrak{X}$ étant compact et la fonction f ne s'annulant en aucun point, on a $|f(x)| > \delta > 0$ pour n suffisamment grand. On en conclut que la suite f_n^* converge uniformément vers l'unité. Donc, en désignant par R le demi-axe réel négatif du plan $\mathcal{E}^2$, on a $f_n^* \in (\mathcal{E}^2 - R)^{\mathfrak{X}}$ pour n suffisamment grand, d'où, selon 1, $f_n^* \sim 1$, c. à d. $f_n \sim f$.

Les deux théorèmes suivants concernent le *prolongement* du logarithme:

8. *Etant donnés un sous-ensemble fermé* F *de l'espace* $\mathfrak{X}$ *et une fonction* $f \in \mathfrak{P}^F$ *telle que* $f \sim 1$, *il existe une extension* $f^* \in \mathfrak{P}^{\mathfrak{X}}$ *de* f *telle que* $f^* \sim 1$.

En effet, on a par hypothèse $f(x) = e^{u(x)}$ et $u \in (\mathcal{E}^2)^F$. D'après le th. de Tietze[7]), il existe une extension $u^* \in (\mathcal{E}^2)^{\mathfrak{X}}$ de u et il suffit de poser $f^*(x) = e^{u^*(x)}$ pour $x \in \mathfrak{X}$.

9. *Soit* $f \in \mathfrak{P}^{\mathfrak{X}}$. *Si la relation* $f \sim 1$ *a lieu sur un ensemble* A, *elle a lieu aussi sur un ensemble ouvert* G *contenant* A.

En effet, on a pour $x \in A$ par hypothèse $f(x) = |f(x)| e^{i\varphi(x)}$ où $\varphi \in \mathcal{E}^A$. D'après 2, à chaque point $a \in A$ correspond un ensemble ouvert G_a tel que $a \in G_a$, et une fonction $\psi_a \in \mathcal{E}^{G_a}$ telle que $f(x) = |f(x)| e^{i\psi_a(x)}$ pour $x \in G_a$. En réduisant, au besoin, cet ensemble, on peut admettre que

$$|\psi_a(x) - \psi_a(a)| < \pi/2 \quad \text{et, pour} \quad x \in AG_a, \quad |\varphi(x) - \varphi(a)| < \pi/2.$$

On peut admettre en outre (cf. 3) que $\psi_a(a) = \varphi(a)$.

[7]) H. Tietze, *Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind,* Journ. f. Math. **145** (1915), p. 9. Cf. ma *Topologie I*, Monografie Matematyczne (1933), p. 211.

Nous allons montrer que la condition $x \in G_a \cdot G_b$ où $a \in A$ et $b \in A$ implique que $\psi_a(x) = \psi_b(x)$. Or, les quatre inégalités:

$$|\psi_a(x) - \varphi(a)| < \pi/2, \quad |\psi_b(x) - \varphi(b)| < \pi/2,$$
$$|\varphi(x) - \varphi(a)| < \pi/2, \quad |\varphi(x) - \varphi(b)| < \pi/2$$

entraînent $|\psi_a(x) - \psi_b(x)| < 2\pi$, d'où l'identité demandée en vertu de la formule $|f(x)| e^{i\psi_a(x)} = f(x) = |f(x)| e^{i\psi_b(x)}$.

En désignant par G la somme des ensembles G_a pour a parcourant A, la fonction $\psi(x)$, identique à $\psi_a(x)$ pour $x \in G_a$, est donc bien définie et l'on a $f(x) = |f(x)| e^{i\psi(x)}$ où $\psi \in \mathcal{E}^G$, c. à d. $f \sim 1$ sur G.

Les théorèmes qui suivent sont des théorèmes d'*addition*[8]).

10. *Etant données une fonction* $f \in \mathfrak{P}^{\mathfrak{X}}$ *et une décomposition de l'espace* $\mathfrak{X}$ *en ensembles ouverts disjoints* G_ι, *si l'on a* $f \sim 1$ *sur chaque* G_ι, *on a* $f \sim 1$ *sur l'espace* $\mathfrak{X}$ *tout entier.*

On a, en effet, $f(x) = e^{u_\iota(x)}$, $u_\iota \in (\mathcal{E}^2)^{G_\iota}$, sur chaque G_ι. En posant $u(x) = u_\iota(x)$ pour toutes les valeurs de l'indice ι, la fonction u est continue: $u \in (\mathcal{E}^2)^{\mathfrak{X}}$, d'où $f \sim 1$.

11. *Soient* F_0 *et* F_1 *deux ensembles fermés dont le produit* $F_0 F_1$ *est connexe. Etant donnée une fonction* $f \in \mathfrak{P}^{F_0+F_1}$ *telle que* $f \sim 1$ *sur* F_0 *et sur* F_1, *on a* $f \sim 1$ *sur* $F_0 + F_1$.

Soit, en effet, x_0 un point fixe de $F_0 F_1$. Soient $f(x) = e^{u_j(x)}$, $u_j \in (\mathcal{E}^2)^{F_j}$, $j=0,1$. De plus, soit conformément à 3: $u_1(x_0) = u_0(x_0)$. Cette égalité entraîne en vertu de 4 l'identité $u_1(x) = u_0(x)$ pour chaque $x \in F_0 F_1$. Donc, en posant $u(x) = u_j(x)$ pour $x \in F_j$ où $j = 0,1$, u est une fonction continue définie sur $F_0 + F_1$; d'où $f \sim 1$.

12. *Soit* $\mathfrak{X} = C_1 + C_2 + \ldots$ *une série infinie d'ensembles connexes, chacun situé à l'intérieur du suivant. Soit* $f \in \mathfrak{P}^{\mathfrak{X}}$. *Si l'on a* $f \sim 1$ *sur chaque* C_n *pour* $n = 1,2,\ldots$, *on a* $f \sim 1$ *sur l'espace* $\mathfrak{X}$ *tout entier.*

Soit, en effet, $p \in C_1$. Posons $f(x) = e^{u_n(x)}$, $u_n \in (\mathcal{E}^2)^{C_n}$ et $u_n(p) = u_1(p)$. C_1 étant connexe, il en résulte que $u_n(x) = u_1(x)$ pour $x \in C_1$. On a de même $u_{n+1}(x) = u_n(x)$ pour $x \in C_n$. La fonction $u(x)$ identique à $u_n(x)$ pour $x \in C_n$ où $n = 1,2,\ldots$, se trouve définie ainsi pour chaque $x \in \mathfrak{X}$. Elle est continue, car x étant un point de $\mathfrak{X}$, donc un point d'un C_n, x est un point intérieur de C_{n+1}; la fonction u étant identique à u_{n+1} sur C_{n+1}, la continuité de u_{n+1} implique celle de u au point x.

[8]) Dans le même ordre d'idées, on consultera, outre la Thèse citée de M. Eilenberg, la note de M. Eilenberg et moi *Théorèmes d'addition concernant le groupe des transformations en circonférence*, Fund. Math. **32** (1939), p. 193.

13. *Soient: G un sous-ensemble ouvert de $\mathcal{S}_2$* [9]) *et $G=F_1+F_2+\ldots$ une série d'ensembles fermés, chacun situé à l'intérieur du suivant. Soit $f \in \mathfrak{P}^G$. Si l'on a $f\sim 1$ sur chaque F_n, on a $f\sim 1$ sur G.*

Considérons d'abord le cas où G est une région. On a a'ors

$$G=C_1+C_2+\ldots, \qquad C_n\subset \operatorname{Int}(C_{n+1}),$$

où C_n est un continu. En effet, $\mathcal{S}_2$ étant considéré comme la surface d'une sphère, soit $K_1, K_2, \ldots$ la suite des „cercles rationnels" (fermés) contenus dans G. On définit la suite $\{C_n\}$ par l'induction: soit $C_1=K_1$; C_n supposé défini, soit (en vertu du th. de Borel) l_n un indice $\geqslant n$ tel que $C_n\subset \operatorname{Int}(K_1+\ldots+K_{l_n})$; C_{n+1} est un continu qui s'obtient en unissant les cercles $K_1,\ldots,K_{l_n}$ par des arcs $\subset G$.

Ceci établi, faisons correspondre à C_n (en vertu du th. de Borel) un F_{r_n} tel que $C_n\subset F_{r_n}$. Par hypothèse, $f\sim 1$ sur F_{r_n}, donc sur C_n, donc, selon 12, sur G.

Dans le cas général où G est non connexe, on a $G=G_1+G_2+\ldots$, les G_k étant des régions disjointes. Posons $F_{k,n}=G_k\cdot F_n$. Il vient $G_k=F_{k,1}+F_{k,2}+\ldots$, $\overline{F}_{k,n}=F_{k,n}$ et

$$F_{k,n}\subset G_k\cdot \operatorname{Int}(F_{n+1})=\operatorname{Int}(G_k\cdot F_{n+1})=\operatorname{Int}(F_{k,n+1}).$$

Comme nous venons de montrer, la condition $f\sim 1$ sur $F_{k,n}$ où $n=1,2,\ldots$, entraîne $f\sim 1$ sur G_k. Cette dernière homotopie étant réalisée pour $k=1,2,\ldots$, il vient $f\sim 1$ en vertu de 10.

II. Equivalence entre »$f\sim 1$« et »homotopie de f à 1«.

1. *Soit $f \in \mathfrak{P}^{\mathfrak{X}}$. Pour que l'on ait $f\sim 1$, il faut et il suffit que la fonction f soit homotope à 1 dans $\mathfrak{P}^{\mathfrak{X}}$, c. à d. qu'il existe une fonction continue de deux variables $h \in \mathcal{S}^{\mathfrak{X}\times\mathfrak{J}}$ telle que*

$$(1) \qquad h(x,0)=f(x), \quad h(x,1)=1 \quad \textit{et} \quad h(x,t)\neq 0 \quad \textit{pour } x\in\mathfrak{X} \textit{ et } t\in\mathfrak{J}.$$

Afin d'établir la nécessité de cette condition, on n'a qu'à poser $f(x)=e^{u(x)}$ et $h(x,t)=e^{u(x)(1-t)}$.

Admettons, d'autre part, l'existence d'une fonction $h \in \mathfrak{P}^{\mathfrak{X}\times\mathfrak{J}}$ satisfaisant à (1). Il s'agit de prouver que $f\sim 1$.

D'après I, 5, à chaque x correspond une fonction $u_x \in (\mathcal{E}^2)^{\mathfrak{J}}$ telle que $h(x,t)=e^{u_x(t)}$ et $u_x(1)=0$ (cf. I, 3). Posons $v(x,t)=u_x(t)$. Comme $f(x)=h(x,0)=e^{v(x,0)}$, la formule $f\sim 1$ sera établie dès que la continuité de la fonction $v(x,0)$ sera démontrée.

[9]) ou, plus généralement, d'un continu localement connexe.

Soit $x_0\in\mathfrak{X}$. Comme $h\sim 1$ sur l'ensemble $A=x_0\times\mathfrak{J}$, il existe selon I, 9 un sous-ensemble ouvert G de $\mathfrak{X}\times\mathfrak{J}$ tel que $A\subset G$ et que $h\sim 1$ sur G. On a donc

$$h(x,t)=e^{w(x,t)} \quad \text{pour } (x,t)\in G, \quad w\in(\mathcal{E}^2)^G \quad \text{et} \quad w(x_0,1)=0.$$

L'ensemble G étant ouvert et l'intervalle $\mathfrak{J}$ compact, on constate aussitôt qu'il existe dans $\mathfrak{X}$ un entourage H du point x_0 tel que $H\times\mathfrak{J}\subset G$. On peut admettre en outre que H est suffisamment petit pour que l'on ait $|w(x,1)|<\pi$ pour $x\in H$ (vu que $w(x_0,1)=0$). Comme $e^{w(x,1)}=h(x,1)=1$, il vient $w(x,1)=0$, d'où $w(x,1)=u_x(1)$. Cette dernière égalité implique en vertu de la connexité de $\mathfrak{J}$ que (cf. I, 4) $w(x,t)=u_x(t)$ quel que soit t. On a ainsi $v(x,t)=w(x,t)$ pour chaque $x\in H$; en particulier $v(x,0)=w(x,0)$. La fonction $w(x,0)$ étant continue sur H et H étant un entourage de x_0, la fonction $v(x,0)$ est donc continue au point x_0.

Remarque. Si $\mathfrak{X}$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathcal{S}_2$ et $f\in\mathfrak{P}^{\mathfrak{X}}$ est une fonction holomorphe ~ 1, la fonction f se laisse réduire à l'unité (dans $\mathfrak{P}^{\mathfrak{X}}$) de façon que toutes les fonctions intermédiaires soient holomorphes.

Ceci résulte directement de la première partie de la démonstration du théorème précédent.

Le théorème inverse est une conséquence facile du th. de Weierstrass sur la limite d'une suite de fonctions holomorphes:

Si la fonction f se laisse réduire à l'unité par l'intermédiaire des fonctions holomorphes, c. à d. si $h\in\mathfrak{P}^{\mathfrak{X}\times\mathfrak{J}}$, $h(x,0)=f(x)$ et $h(x,1)=1$, la fonction $h(x,t)$ étant holomorphe pour $0<t\leqslant 1$, alors la fonction f est holomorphe.

Car la suite $h(x,1/n)$ est uniformément convergente vers $f(x)$ sur chaque sous-ensemble fermé de $\mathfrak{X}$.

Le th. 1 se généralise aussitôt comme suit:

2. *Les conditions: „$f\sim g$" et „f homotope à g (dans $\mathfrak{P}^{\mathfrak{X}}$)" sont équivalentes.*

Car elles sont équivalentes respectivement aux conditions: „$f/g\sim 1$" et „f/g homotope à la fonction identiquement égale à 1".

Le théorème suivant résulte du th. 1:

3. *Soit $f\in\mathfrak{P}^{\mathfrak{X}}$. Si l'espace $\mathfrak{X}$ est déformable en un sous-ensemble F tel qu'on ait $f\sim 1$ sur F, on a $f\sim 1$ sur $\mathfrak{X}$.*

En particulier, *si $\mathfrak{X}$ est déformable en un point, on a $f\sim 1$ pour chaque $f\in\mathfrak{P}^{\mathfrak{X}}$.*

L'hypothèse signifie, en effet, qu'il existe une fonction de deux variables $g\in\mathfrak{X}^{\mathfrak{X}\times\mathfrak{J}}$ telle que $g(x,0)=x$ et $g(x,1)\in F$ (autrement dit: l'identité est homotope dans $\mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}$ à une fonction dont les valeurs appartiennent à F). On a, d'autre part, pour chaque $y \in F$, $f(y)=e^{u(y)}$ où $u \in \mathcal{P}^F$. Donc $f[g(x,1)]=e^{u[g(x,1)]}$, d'où $fg(x,1)\sim 1$ sur $\mathcal{X}$. Reste à prouver que $f(x)\sim fg(x,1)$. Or, en posant $h(x,t)=f[g(x,t)]$, on a $h \in \mathcal{P}^{\mathcal{X}\times\mathcal{J}}$, $h(x,0)=f(x)$ et $h(x,1)=f[g(x,1)]$, d'où la conclusion demandée.

De là on conclut immédiatement:

4a. *Si $\mathcal{X}$ dénote le cercle $|x|\leqslant 1$ ou le plan $\mathcal{E}^2$ (ou bien un des ensembles qui leur sont homéomorphes), on a $f\sim 1$ pour chaque $f \in \mathcal{P}^{\mathcal{X}}$.*

4b. *Si $\mathcal{X}$ est un cercle sans centre et C en est la circonférence, les conditions $f_1 \in \mathcal{P}^{\mathcal{X}}$, $f_2 \in \mathcal{P}^{\mathcal{X}}$ et $f_1\sim f_2$ sur C entraînent $f_1\sim f_2$ sur $\mathcal{X}$.*

5. *Si $f \in \mathcal{P}^{\mathcal{S}_2}$, on a $f\sim 1$.*

Car, en décomposant $\mathcal{S}_2$ en deux hémisphères (fermées) A et B, on a d'après 4a: $f\sim 1$ sur A ainsi que sur B. Le produit AB étant connexe, on conclut de I, 11 que $f\sim 1$ sur $A+B$, c.à.d. sur $\mathcal{S}_2$.

Démonstration du théorème fondamental de l'Algèbre [10]).

Supposons, par impossible, que le polynôme $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ ne s'annule pas. Posons $g(x)=a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$. Désignons par r un nombre réel suffisamment grand pour que l'on ait $|x^n|>|g(x)|$ pour $|x|\geqslant r$.

D'après le th. 4a, on a $f\sim 1$ sur le cercle $|x|\leqslant r$, donc sur sa circonférence C. Comme, d'autre part, x^n non ~ 1 sur C (selon I, 6), il vient f non $\sim x^n$ sur C.

Cependant, en posant $h(x,t)=x^n+t\cdot g(x)$ où $0\leqslant t\leqslant 1$, il vient $f\sim x^n$ sur C. Car $h(x,0)=x^n$, $h(x,1)=f(x)$ et, pour $x \in C$, on a $h(x,t)\neq 0$; en effet, en supposant que $h(x,t)=0$, on aurait $x^n=-t\cdot g(x)$, d'où $|x^n|=t\cdot|g(x)|$, donc $|x^n|\leqslant|g(x)|$, contrairement à la définition de r.

§ 2. Fonctions homotopes aux fonctions rationnelles.

III. Cas où $\mathcal{X}$ est une circonférence. Soit $x=\zeta(t)$ une représentation paramétrique d'un continu (localement connexe) C sur l'intervalle $0\leqslant t\leqslant 1$; c. à d. que $\zeta \in C^{\mathcal{J}}$ et $C=\zeta(\mathcal{J})$. Admettons en outre que $\zeta(0)=\zeta(1)$.

Soit $f \in \mathcal{P}^C$. Comme définie sur l'intervalle, la fonction superposée $f\zeta(t)$ est ~ 1 (selon I, 5). On a donc $f\zeta(t)=e^{u(t)}$. Comme $\zeta(0)=\zeta(1)$, il vient $u(1)-u(0)=2n\pi i$. L'entier $\frac{1}{2\pi i}[u(1)-u(0)]$ est nommé *l'accroissement $\Delta_\zeta f$ du logarithme de la fonction f par rapport au parcours ζ*. On constate aussitôt que le nombre $\Delta_\zeta f$ ne dépend pas du choix de la fonction u.

[10]) On rapprochera cette démonstration de celle qui se trouve dans le Traité précité de P. Alexandroff et H. Hopf, *Topologie I*, p. 469.

1. *Soit C la circonférence du cercle de centre 0 et de rayon r. Pour chaque fonction $f \in \mathcal{P}^C$, on a $f(x)\sim x^n$ où n est un entier.*

A savoir, *en posant $\zeta(t)=re^{2\pi it}$ pour $0\leqslant t\leqslant 1$, on a $n=\Delta_\zeta f$.*

Il vient, en effet:

$$f(re^{2\pi it})=e^{u(t)}, \quad u(1)=u(0)+2n\pi i. \tag{1}$$

Faisons correspondre à chaque $x \in C$ le point

$$y=u(t)-2n\pi it-n\log r,$$

$2\pi t$ étant l'argument du point x. Bien qu'au point $x=(r,0)$ correspondent deux valeurs de t, à savoir 0 et 1, celle de y est définie en vertu de la deuxième égalité (1) d'une façon univoque. En posant $y=v(x)$, on constate aussitôt que la fonction v est continue: $v \in (\mathcal{E}^2)^C$. De plus, pour $x=re^{2\pi it}$, on a

$$f(x)=e^{u(t)} \quad \text{et} \quad x^n=e^{n\log r+2n\pi it}, \quad \text{d'où} \quad f(x)/x^n=e^{v(x)},$$

ce qui veut dire que $f(x)\sim x^n$.

D'une façon plus générale, (par substitution $x=z+p$) on obtient l'énoncé suivant:

2. *C désignant la circonférence $|x-p|=r$ où $p\neq\infty$, à chaque $f \in \mathcal{P}^C$ correspond un n tel que $f(x)\sim(x-p)^n$.*

Ajoutons que

3. *Si $|q-p|>r$, on a $(x-q)\sim 1$ sur C.*

Car le rayon R parallèle au vecteur $q-p$ ne contient aucune valeur de la fonction $x-q$ où $x \in C$ (cf. I, 1).

IV. Cas où $\mathcal{X}$ est le plan $\mathcal{S}_2$ privé d'un nombre fini de points. Afin de simplifier les énoncés qui vont suivre, nous convenons que, dans les produits de la forme $(x-p_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(x-p_n)^{k_n}$, si l'un des points, p_m par exemple, est le point à l'infini, la différence $x-p_m$ doit être remplacée par 1.

A étant un ensemble fini de points $p_0,\ldots,p_n$ de $\mathcal{S}_2$, chaque fonction $f \in \mathcal{P}^{\mathcal{S}_2-A}$ est de la forme

$$f(x)=e^{u(x)}(x-p_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(x-p_n)^{k_n}, \qquad k_0+\ldots+k_n=0,$$

où $k_0,\ldots,k_n$ sont des entiers.

$f(x)$ est donc homotope à une fonction rationelle:

$$f(x)\sim(x-p_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(x-p_n)^{k_n}.$$

Dans le cas particulier où $A=(\infty,p)$, c. à d. où la fonction f est définie sur le plan $\mathcal{E}^2$ privé du point p, on a $f(x)\sim(x-p)^k$.

Procédons par induction.

1° Soit $n=0$. L'ensemble $\mathcal{S}_2-p_0$ étant homéomorphe à $\mathcal{E}^2$, on a $f\sim 1$ selon II, 4a. Donc $k_0=0$.

2° Soit $n>0$ et admettons le théorème pour $n-1$. Il est légitime d'admettre que $p_n\neq\infty$. Décrivons du point p_n comme centre un cercle K qui ne contient aucun des points $p_0,\dots,p_{n-1}$. Soit C la circonférence de K. D'après III, 2, on a sur C

$$f(x)\sim(x-p_n)^{k_n},\quad \text{donc}\quad f(x)\cdot(x-p_n)^{-k_n}\sim 1.$$

Le point p_0 étant en dehors du cercle K, on a selon III, 3 $x-p_0\sim 1$ sur C. Par conséquent $f(x)(x-p_n)^{-k_n}(x-p_0)^{k_n}\sim 1$ sur C. Soit $f^*(x)$ une extension de cette dernière fonction sur K telle que $f^*\sim 1$ (cf. I, 8).

Or, désignons par $g(x)$ la fonction identique à f^* sur K et à $f(x)(x-p_n)^{-k_n}(x-p_0)^{k_n}$ sur l'ensemble $F=\mathcal{S}_2-\operatorname{Int}(K)-(p_0,\dots,p_{n-1})$. La fonction $g(x)$ se trouve ainsi définie sur $\mathcal{S}_2-(p_0,\dots,p_{n-1})$ et elle est continue (il est à remarquer que le quotient $(x-p_0)/(x-p_n)$ est défini pour chaque $x\in\mathcal{S}_2-p_0-p_n$ et n'admet que des valeurs finies $\neq 0$). On a donc par hypothèse:

$$g(x)\sim(x-p_0)^{l_0}\cdot\ldots\cdot(x-p_{n-1})^{l_{n-1}} \text{ sur } \mathcal{S}_2-(p_0,\dots,p_{n-1}) \text{ et } l_0+\dots+l_{n-1}=0.$$

D'autre part, on a $g(x)\sim f(x)(x-p_n)^{-k_n}(x-p_0)^{k_n}$ sur F, ainsi que sur $F_1=K-p_n$. En effet, cette relation a lieu sur F, car il y a identité entre les deux fonctions envisagées; cette relation étant réalisée sur C, elle l'est aussi sur $K-p_n=F_1$ en vertu de II, 4b. Les ensembles F et F_1 étant fermés dans leur somme $F+F_1=\mathcal{S}_2-A$ et leur produit $FF_1=C$ étant connexe, la relation considérée a lieu encore sur $\mathcal{S}_2-A$ (selon I, 11). On a donc

$$f(x)\sim(x-p_0)^{l_0-k_n}(x-p_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(x-p_{n-1})^{l_{n-1}}(x-p_n)^{k_n}.$$

En posant $k_0=l_0-k_n$, $k_1=l_1,\dots,k_{n-1}=l_{n-1}$, on a $k_0+\dots+k_n=0$.

V. Cas où $\mathfrak{X}$ est un ensemble fermé $F\subset\mathcal{S}_2$.

1. *Soit $F=\overline{F}\subset\mathcal{S}_2$. Si les points p et q appartiennent à la même composante R de $\mathcal{S}_2-F$, on a $(x-p)/(x-q)\sim 1$ sur F.*

On a donc, si F est borné, $x-p\sim x-q$ et, si R est non borné, $x-p\sim 1$ (en posant $q=\infty$).

Il existe, en effet, un ensemble Z homéomorphe à $\mathcal{E}^2$ et tel que $F\subset Z\subset\mathcal{S}_2-p-q$. Pour s'en convaincre, identifions $\mathcal{S}_2$ avec la surface d'une sphère située dans l'espace à 3 dimensions, unissons les points p et q par une ligne (brisée) $L\subset\mathcal{S}_2-F$ et posons $Z=\mathcal{S}_2-L$.

Z étant homéomorphe à $\mathcal{E}^2$, on a selon II, 4a $(x-p)/(x-q)\sim 1$ sur Z, donc sur F.

Le théorème inverse est vrai aussi. Plus encore:

2. *Soit $F=\overline{F}\subset\mathcal{S}_2$. Soit $p_0,\dots,p_n$ un système de points qui appartiennent deux à deux à des différentes composantes de $\mathcal{S}_2-F$. Les homographies $\dfrac{x-p_1}{x-p_0},\dots,\dfrac{x-p_n}{x-p_0}$ sont alors linéairement indépendantes (modulo $\underset{f}{E}\, f\sim 1$), c. à d. que les conditions*

$$(x-p_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(x-p_n)^{k_n}\sim 1,\quad k_0+\dots+k_n=0,$$

entraînent $k_0=0,\dots,k_n=0$. En particulier, $\dfrac{x-p_j}{x-p_l}$ non ~ 1 pour $j\neq l$.

Si F est borné et si les points $p_1,\dots,p_n$ appartiennent à des composantes bornées de $\mathcal{S}_2-F$, les translations $x-p_1,\dots,x-p_n$ sont donc linéairement indépendantes (substitution de ∞ à p_0) et on a, en particulier, $x-p_j$ non ~ 1.

Procédons par induction. Le cas $n=0$ étant évident, admettons le théorème pour $n-1\geqslant 0$. En supposant que l'on a sur F

$$(x-p_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(x-p_n)^{k_n}\sim 1,\quad k_0+\dots+k_n=0,$$

il est donc légitime d'admettre que $k_n\neq 0$ et que $p_n\neq\infty$.

Posons $f(x)=(x-p_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(x-p_n)^{k_n}$. La fonction partie le $f|F$ étant ~ 1 par hypothèse, il existe (selon I, 8) une extension de cette fonction $f^*\in\mathcal{P}^{\mathcal{S}_2}$. Désignons: par R la composante du point p_n dans $\mathcal{S}_2-F$, par K un cercle tel que $p_n\in K\subset R$, par C sa circonférence et par $g(x)$ la fonction identique à f^* sur $\mathcal{S}_2-R$ et à f sur $\overline{R}-p_n$. On a donc $g\in\mathcal{P}^{\mathcal{S}_2-p_n}$, d'où (selon II, 4a) $g\sim 1$ sur $\mathcal{S}_2-p_n$, donc sur C. Comme $C\subset R$, il vient, en vertu de la définition de g, $(x-p_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(x-p_n)^{k_n}\sim 1$ sur C. Or, les points $p_0,\dots,p_{n-1}$ étant situés en dehors du cercle K, on a (cf. III, 3):

$$x-p_0\sim 1,\ \dots,\ x-p_{n-1}\sim 1 \text{ sur } C,$$

donc, en vertu de l'homotopie précédente, $(x-p_n)^{k_n}\sim 1$ sur C, ce qui présente la contradiction prévue (avec le th. I, 6, par substitution $x=z+p_n$).

3. *Lemme*[11]. *Etant donnés un ensemble fermé $F \subset \mathcal{S}_2$ et une fonction $f \in \mathcal{P}^F$, il existe un ensemble fini $Z \subset \mathcal{S}_2 - F$ et une extension $f^* \in \mathcal{P}^{\mathcal{S}_2 - Z}$ de f.*

Remarquons d'abord que, T désignant un triangle, C son contour et p son centre, chaque fonction $f \in \mathcal{P}^C$ admet une extension $f^* \in \mathcal{P}^{T-p}$. Pour s'en convaincre, remplaçons T par le cercle $|x| \leqslant 1$ et posons $f^*(x) = f\left(\frac{x}{|x|}\right)$.

Ceci établi, passons à la démonstration du lemme. D'après le th. de Tietze, la fonction f admet une extension $f_1 \in (\mathcal{E}^2)^{\mathcal{S}_2}$. Soit G l'ensemble des x tels que $f_1(x) \neq 0$. G est donc un ensemble ouvert et on a $F \subset G$.

Envisageons une triangulation de $\mathcal{S}_2$ (conçu comme surface d'un tétraèdre) en triangles aux côtés de longueur $< \varrho(F, \mathcal{S}_2 - G)$. Soit W le polygone-somme des triangles (intérieurs et contours compris) contenus dans G. Donc $F \subset W$. Désignons par g la fonction partielle $f_1 | W$; donc $g \in \mathcal{P}^W$. Soient: A l'ensemble des sommets (des triangles) contenus dans W et B celui des sommets contenus dans $\mathcal{S}_2 - W$. Soit enfin q un point du plan $\mathcal{E}^2$ choisi de façon que le point 0 soit situé en dehors de tous les segments rectilignes unistant q à $g(a)$ où $a \in A$.

Définissons la fonction f^* comme suit: 1° pour $x \in W$, soit $f^*(x) = g(x)$, 2° pour $x \in B$, soit $f^*(x) = q$, 3° sur chaque côté (d'un triangle) non contenu dans W, f^* est linéaire, 4° p désignant le centre d'un triangle T non contenu dans W, la définition de la fonction f^* sur $T - p$ est l'extension, conforme à la remarque faite au début, de sa définition donnée sur le contour de T (définition qui se déduit de 2° et 3°). En désignant par Z l'ensemble des centres des triangles non contenus dans W, il vient $f^* \in \mathcal{P}^{\mathcal{S}_2 - Z}$.

4. *Soit $F = \overline{F} \subset \mathcal{S}_2$. Chaque fonction $f \in \mathcal{P}^F$ est homotope à une fonction rationnelle (dont les zéros et les pôles sont situés en dehors de F).*

Plus précisément: *soit $R_0, R_1, \ldots$ la suite (finie ou infinie) des composantes de $\mathcal{S}_2 - F$; soit $p_j \in R_j$. Il existe un n tel que*

$$(1) \quad f(x) = e^{u(x)} (x - p_0)^{k_0} \cdot \ldots \cdot (x - p_n)^{k_n}, \quad k_0 + \ldots + k_n = 0, \quad u \in (\mathcal{E}^2)^{\mathcal{S}_2}.$$

Considérons, conformément au lemme, un ensemble fini $Z = (q_0, \ldots, q_m)$ et une extension $f^* \in \mathcal{P}^{\mathcal{S}_2 - Z}$ de f. On a d'après IV:

$$(2) \qquad f^*(x) \sim (x - q_0)^{l_0} \cdot \ldots \cdot (x - q_m)^{l_m}, \qquad l_0 + \ldots + l_m = 0.$$

[11]) Cf. S. Eilenberg, *Un théorème de dualité*, Fund. Math. **26** (1936), p. 280.

Soit n un indice tel que $Z \subset R_0 + \ldots + R_n$. Partageons l'ensemble Z en groupes (vides ou non), en rangeant q_s dans le j-ème groupe lorsque $q_s \in R_j$. Pour j fixe, soit $q_{t_1}, \ldots, q_{t_r}$ le j-ème groupe. Il vient selon 1 sur F:

$$\frac{x - q_{t_1}}{x - p_j} \sim 1, \ldots, \frac{x - q_{t_r}}{x - p_j} \sim 1, \quad \text{d'où} \quad (x - q_{t_1})^{l_{t_1}} \cdot \ldots \cdot (x - q_{t_r})^{l_{t_r}} (x - p_j)^{-k_j} \sim 1,$$

où $k_j = l_{t_1} + \ldots + l_{t_r}$ (et $k_j = 0$ si aucun q_s n'appartient à R_j). En rapprochant de (2) cette dernière homotopie (pour $j = 0, \ldots, n$), il vient sur F:

$$(3) \quad f^*(x) \sim (x - p_0)^{k_0} \cdot \ldots \cdot (x - p_n)^{k_n}, \quad k_0 + \ldots + k_n = l_0 + \ldots + l_m = 0.$$

Comme $f^*(x) = f(x)$ pour $x \in F$, la formule (3) entraîne (1) (u peut être supposé défini sur $\mathcal{S}_2$ selon I, 8).

5. *Dans le th. 4, les exposants $k_0, k_1, \ldots$ sont déterminés d'une façon univoque.*

A savoir: *$g(x)$ étant une fonction rationelle arbitraire telle que $f \sim g$ sur F, l'exposant k_j est le nombre des zéros est des pôles de cette fonction qui appartiennent à R_j, chacun compté avec sa multiplicité.*

Il en résulte que *k_j ne dépend pas du choix du point p_j.*

Soit, en effet, $g(x) = c \cdot (x - q_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (x - q_m)^{l_m}$. Posons $q_0 = \infty$ et $l_0 = -(l_1 + \ldots + l_m)$. On a donc la relation (2) (en omettant l'astérisque). En outre, q_j (pour $j = 0, \ldots, m$) est un zéro ou pôle à multiplicité l_j. En partageant l'ensemble $q_0, \ldots, q_m$ en groupes comme dans la démonstration précédente et en posant $k'_j = l_{t_1} + \ldots + l_{t_r}$ (avec $k'_j = 0$ si le j-ème groupe est vide), il vient

$$(4) \qquad f(x) \sim (x - p_0)^{k'_0} \cdot \ldots \cdot (x - p_\nu)^{k'_\nu}, \qquad k'_0 + \ldots + k'_\nu = l_0 + \ldots + l_m = 0,$$

ν étant un entier $\geqslant n$ et tel que $(q_0, \ldots, q_m) \subset R_0 + \ldots + R_\nu$.

Posons $k_j = 0$ pour $j > n$. Les formules (1) et (4) donnent

$$(x - p_0)^{k'_0 - k_0} \cdot \ldots \cdot (x - p_\nu)^{k'_\nu - k_\nu} \sim 1, \quad (k'_0 - k_0) + \ldots + (k'_\nu - k_\nu) = 0,$$

d'où $k_0 = k'_0, \ldots, k_\nu = k'_\nu$ selon 2.

La deuxième partie du théorème résulte directement de la définition du nombre k'_j.

VI. Cas où $\mathfrak{X}$ est un ensemble ouvert $G\subset\mathcal{S}_2$ dont le complémentaire n'admet qu'un nombre fini de composantes.

1. *Lemme. Chaque ensemble ouvert $G\subset\mathcal{S}_2$ est de la forme*

$$(1)\qquad G=F_1+F_2+\ldots,\quad F_n=\overline{F}_n\subset\operatorname{Int}(F_{n+1}),$$

où chaque composante de $\mathcal{S}_2-F_n$ admet des points communs avec $\mathcal{S}_2-G$ et, par conséquent, contient une composante de $\mathcal{S}_2-G$.

De plus, *le nombre des composantes de $\mathcal{S}_2-F_n$ est fini; il est égal à celui des composantes de $\mathcal{S}_2-G$ si ce dernier est fini.*

En effet, $\mathcal{S}_2$ étant considéré comme surface d'un tétraèdre, envisageons une triangulation de $\mathcal{S}_2$ en triangles (ouverts) aux côtés de longueur $<1/n$. Soit H_n la somme des triangles (leurs contours compris) contenus dans G. Soit R une composante de $\mathcal{S}_2-H_n$. Elle contient évidemment un point p d'un triangle (ouvert) T. Par définition, il existe un $q\in\overline{T}-G$. L'ensemble $T+q$ étant connexe et disjoint de H_n, il vient $T+q\subset R$, donc $R-G\neq0$.

Posons $F_1=H_1$ et $F_{n+1}=H_{k_{n+1}}$ où $1/k_{n+1}<1/n$ et $<\varrho(F_n,\mathcal{S}_2-G)$. On a donc la formule (1).

Admettons à présent que $\mathcal{S}_2-G=C_0+\ldots+C_m$, c. à d. admet $m+1$ composantes. Les ensembles C_j et $C_0+\ldots+C_{j-1}+C_{j+1}+\ldots+C_m$ étant fermés et disjoints, il existe un ensemble fermé A_j qui les sépare [12]). Soit $A=A_0+\ldots+A_m$. D'après (1) (et en vertu du th. de Borel), on a $A\subset F_n$ pour n suffisamment grand. Donc F_n sépare chaque couple C_j, C_l (où $j\neq l$) et, par conséquent, chacun des C_j où $j=0,\ldots,m$ est situé dans une autre composante de $\mathcal{S}_2-F_n$. En omettant les $n-1$ premiers termes de la suite $\{F_k\}$, la deuxième partie du lemme se trouve réalisée.

2. *Soit G un ensemble ouvert dont le complémentaire $\mathcal{S}_2-G$ est formé d'un nombre fini de composantes $C_0,\ldots,C_m$. Alors, chaque fonction $f\in\mathcal{P}^G$ est homotope à une fonction rationnelle (dont les zéros et les pôles sont situés en dehors de G).*

Plus précisément: *soit $p_j\in C_j$ pour $j=0,\ldots,m$; on a alors*

$$f(x)=e^{u(x)}(x-p_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(x-p_m)^{k_m},\quad k_0+\ldots+k_m=0,\quad u\in(\mathcal{E}^2)^G.$$

[12]) c. à d. que le complémentaire de A_j se compose de deux ensembles ouverts et disjoints qui contiennent respectivement les deux ensembles fermés en question.

Soit, conformément au lemme 1, $F_1,F_2,\ldots$ une suite d'ensembles fermés satisfaisant à (1) et tels que $\mathcal{S}_2-F_n=R_{n,0}+\ldots+R_{n,m}$, où $C_j\subset R_{n,j}$ et où $R_{n,0},\ldots,R_{n,m}$ sont les composantes de $\mathcal{S}_2-F_n$. D'après V, 4, on a sur F_n

$$f(x)\sim(x-p_0)^{k_{n,0}}\cdot\ldots\cdot(x-p_m)^{k_{n,m}},\qquad k_{n,0}+\ldots+k_{n,m}=0.$$

Comme $F_1\subset F_n$, cette homotopie a lieu sur F_1. On a donc d'après V, 5 $k_{n,j}=k_{1,j}$ pour $j=0,\ldots,m$. Posons $k_{1j}=k_j$. Par conséquent, $f(x)\sim(x-p_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(x-p_m)^{k_m}$ sur F_n et la même relation a eu sur G en vertu de (1) et de I, 13, d'où la conclusion demandée.

Tout comme dans le cas d'ensemble fermé (cf. V, 5), *les exposants $k_0,..,k_m$ sont déterminés d'une façon univoque.* Nous allons voir, en effet, dans le §4 que $k_j=\mu_{c_j}f$.

§3. Rapports aux théorèmes de Runge et de Weierstrass.

VII. Rapports au théorème de Runge. *Soit G un sous-ensemble ouvert de $\mathcal{S}_2$. Chaque fonction $f\in\mathcal{P}^G$ est de la forme*

$$f(x)=\lim_{n=\infty}r_n(x)e^{u_n(x)}\quad\text{où}\quad u_n\in(\mathcal{E}^2)^{\mathcal{S}_2}$$

et où $r_n(x)$ est une fonction rationnelle. La convergence est uniforme sur chaque sous-ensemble fermé de G; plus encore: à chaque ensemble fermé $F\subset G$ correspond un n_0 tel que l'on a pour $n\geqslant n_0$ et $x\in F$

$$f(x)=r_n(x)e^{u_n(x)}.$$

Enfin, $C_0,C_1,\ldots$ étant une suite de composantes de $\mathcal{S}_2-G$ telle qu'on a $C\cdot\overline{C_0+C_1+\ldots}\neq0$ pour chaque composante C de $\mathcal{S}_2-G$, et $p_0,p_1,\ldots$ étant une suite de points tels que $p_j\in C_j$, les zéros et les pôles des fonctions $r_1,r_2,\ldots$ appartiennent à la suite $\{p_j\}$.

Soit, en effet, $F_1,F_2,\ldots$ une suite d'ensembles fermés satisfaisant au lemme VI, 1. Soit $R_{n,0},R_{n,1},\ldots$ la suite des composantes de l'ensemble $\mathcal{S}_2-F_n$. D'après ce lemme, $R_{n,j}$ contient une composante de $\mathcal{S}_2-G$; il existe donc ($R_{n,j}$ étant ouvert) un indice $t=t(n,j)$ tel que $C_t\cdot R_{n,j}\neq0$, d'où $C_t\subset R_{n,j}$, donc $p_t\in R_{n,j}$. On a par conséquent (d'après V, 4) sur F_n:

$$(1)\qquad f(x)=e^{u_n(x)}(x-p_{t(n,0)})^{k_{n,0}}\cdot\ldots\cdot(x-p_{t(n,l_n)})^{k_{n,l_n}},\quad u_n\in(\mathcal{E}^2)^{\mathcal{S}_2}.$$

D'autre part, F désignant l'ensemble fermé donné, on a en vertu de (1), p. 334 (et du th. de Borel) $F\subset F_{n_0}$ pour n_0 suffisamment grand. La relation (1) est donc vraie pour chaque $n\geqslant n_0$ et $x\in F$.

VIII. *Rapports au théorème de Weierstrass.*

1. *Lemme. Soient $\mathfrak{X}$ un espace connexe et $C_0,\dots,C_n$ un système d'ensembles connexes, fermés et disjoints. Il existe un C_k avec $k>0$ qui ne sépare l'espace entre aucun couple C_j, C_l; c. à d. que pour chaque couple d'ensembles fermés F et H tels que $\mathfrak{X}=F+H$ et $FH=C_k$, on a soit, pour tout m, $C_m\subset F$, soit, pour tout m, $C_m\subset H$.*

Procédons par induction. Le lemme étant évident pour $n=1$, admettons qu'il soit vrai pour $n-1$ $(\geqslant 1)$.

Supposons que l'indice $k=1$ ne satisfasse pas à la thèse du lemme. Il est donc légitime d'admettre que F et H soient deux ensembles fermés tels que:

$$\mathfrak{X}=F+H,\quad FH=C_1,\quad C_0\subset F,\quad C_2\subset H. \tag{1}$$

La somme et le produit des ensembles F et H étant connexes, ces ensembles sont eux-mêmes connexes[13]). En appliquant le lemme (admis pour $n-1$) à l'ensemble H, considéré comme l'espace, et au système Γ des C_j contenus dans H, on en conclut qu'il existe un $C_k\in\Gamma$ avec $k>1$ qui ne sépare H entre aucun couple d'éléments de Γ.

Or, considérons une décomposition:

$$\mathfrak{X}=M+N,\quad \overline{M}=M,\quad \overline{N}=N,\quad MN=C_k,\quad C_1\subset M. \tag{2}$$

Il s'agit de prouver que $C_m\subset M$ pour chaque m.

On a d'après (2) $H=HM+HN$, $HMN=C_k$ et $C_1\subset HM$. On en tire (selon la définition de k) $C_m\subset HM$ pour chaque $C_m\in\Gamma$, c. à d. pour chaque $C_m\subset H$. Soit, d'autre part, $C_m\subset F$. Or, les formules $C_k\subset H$ et $FH=C_1$ impliquent que $FC_k=0$, c. à d. $FMN=0$. On a donc soit $FM=0$, soit $FN=0$ (en vertu de la connexité de F); comme $C_1\subset FM$, il vient $FN=0$, d'où $F\subset M$, donc $C_m\subset M$.

2. *Lemme. Soient R une région $\subset\mathcal{S}_2$ et $C_0,\dots,C_n$ un système de continus disjoints $\subset R$. En numérotant les continus $C_1,\dots,C_n$ d'une façon convenable, il existe n régions $R_1,\dots,R_n$ telles que, pour $k=1,\dots,n$, on a*

$$\overline{R}_k\subset R_{k-1}-C_k,\quad C_0+C_{k+1}+C_{k+2}+\dots+C_n\subset R_k\qquad (\text{où } R_0=R). \tag{3}$$

[13]) Cf. le corollaire VII de l'ouvrage de M. Knaster et moi, *Sur les ensembles connexes*, Fund. Math. **2** (1921), p. 211.

En effet, en substituant R à $\mathfrak{X}$ dans le lemme précédent, on en déduit l'existence d'un indice $l_1>0$ tel que tous les C_j avec $j\neq l_1$ sont situés dans une seule composante Q de $R-C_{l_1}$. On en conclut aussitôt qu'il existe une région R_1 telle que $\overline{R}_1\subset Q$ et $C_j\subset R_1$ quel que soit $j\neq l_1$.

On définit d'une façon analogue l_2 et R_2 (en remplaçant dans le raisonnement qui précède R par R_1 et en supprimant le terme C_{l_1} du système $C_0,\dots,C_n$), et ainsi de suite.

3. *Lemme. Soit G un ensemble ouvert $\subset\mathcal{S}_2$ dont le complémentaire $\mathcal{S}_2-G$ est formé d'une suite infinie de composantes dont chacune, sauf une seule C_0, est isolée. Il existe alors une suite infinie d'ensembles fermés $F_1, F_2,\dots$ tels que*

$$G=F_1+F_2+\dots,\qquad F_n\subset \operatorname{Int}(F_{n+1}) \tag{4}$$

et que $\mathcal{S}_2-F_n$ est formé de $n+1$ composantes contenant respectivement les ensembles $(C_0+C_{n+1}+C_{n+2}+\dots)$, $C_1, C_2,\dots,C_n$ (les composantes de $\mathcal{S}_2-G$ distinctes de C_0 étant numérotées d'une façon convenable).

Il existe d'abord une suite de régions $P_0, P_1,\dots$ telles que

$$C_0=P_0\cdot P_1\cdot\dots,\qquad \overline{P}_{m+1}\subset P_m, \tag{5}$$

et que, pour chaque m et chaque composante C de $\mathcal{S}_2-G$, on a soit $C\overline{P}_m=0$, soit $C\subset P_m$.

Considérons, en effet, $\mathcal{S}_2$ comme surface d'une sphère et procédons par induction. Soit $P_0=\mathcal{S}_2$. Admettons que $C_0\subset P_{m-1}$. Soient: A_m l'ensemble des x tels que $\varrho(x,C_0)\geqslant 1/m$ et H_m l'ensemble A_m augmenté des composantes C de $\mathcal{S}_2-G$ telles que $CA_m\neq 0$. H_m est donc fermé et $C_0\subset P_{m-1}-H_m$. Soit Q_m la composante de C_0 dans $P_{m-1}-H_m$. Comme entourage de C_0, Q_m admet des points communs avec toutes les composantes de $\mathcal{S}_2-G$, sauf un nombre fini; chaque composante de $\mathcal{S}_2-G$ étant supposée soit disjointe, soit contenue dans P_{m-1}, les composantes qui ont des points communs avec Q_m sont donc contenues dans Q_m. L'ensemble Q_m-G étant compact, il existe une région P_m telle que $Q_m-G\subset P_m$ et $\overline{P}_m\subset Q_m$. Soit C une composante de $\mathcal{S}_2-G$ telle que $C\overline{P}_m\neq 0$. Donc, $CQ_m\neq 0$, d'où $C\subset Q_m-G\subset P_m$.

La suite $P_0, P_1,\dots$ étant ainsi la suite demandée, désignons par l_m le nombre (fini!) des composantes de $\mathcal{S}_2-G$ disjointes de $\overline{P}_m$. On peut admettre que $0=l_0<l_1<l_2<\dots$ (en remplaçant au besoin la suite $P_1, P_2,\dots$ par une suite extraite $P_{m_1}, P_{m_2},\dots$). Soit Γ_m la famille des composantes C de $\mathcal{S}_2-G$ telles que $C\subset P_{m-1}-\overline{P}_m$; leur nombre est donc $l_m - l_{m-1}$ et la série $\Gamma_1+\Gamma_2+\dots$ représente une décomposition de la famille de toutes les composantes de $\mathcal{S}_2-G$ différentes de C_0 en classes disjointes et non vides. Nous allons numéroter ces composantes, en effectuant la numération dans chaque Γ_m séparément, et définir une suite de régions $R_0, R_1, \dots$ de façon que $R_{l_m}=P_m$ pour $m=0,1,\dots$ et que, pour chaque n, l'on ait:

$$\text{(6)}\qquad \bar{R}_n \subset R_{n-1}-C_n, \qquad C_{n+1}+C_{n+2}+\dots \subset R_n.$$

A ce but, remplaçons dans le lemme 2 (pour m fixe): R par P_{m-1}, C_0 par $\bar{P}_m$ et le système $C_1,\dots,C_n$ par Γ_m. On peut donc, en numérotant d'une façon convenable le système $\Gamma_m = C_{l_{m-1}+1},\dots,C_{l_m}$, définir un système de régions $R_{l_{m-1}+1},\dots,R_{l_m-1}$ tel que, pour $n=l_{m-1}+1,\dots,l_m-1$, l'on ait:

$$\text{(7)}\qquad \bar{R}_n \subset R_{n-1}-C_n, \qquad \bar{P}_m+C_{n+1}+\dots+C_{l_m} \subset R_n.$$

La deuxième inclusion pour $n=l_m-1$ implique la première pour $n=l_m$ (puisque $R_{l_m}=P_m$).

On parvient ainsi à une suite infinie de régions $R_0, R_1, \dots$ satisfaisant à la première des inclusions (6). La deuxième en est satisfaite aussi puisque, pour $j>l_m$, on a $C_j \subset P_m \subset R_n$ (où $l_{m-1}<n\leqslant l_m$). En outre, en vertu de (5):

$$\text{(7')}\qquad C_0 = R_0 \cdot R_1 \cdot \dots$$

Pour passer à présent aux ensembles $F_1, F_2, \dots$, nous définirons un système de régions $R_{n,0}=R_n$, $R_{n,1},\dots,R_{n,n}$ où $n=0,1,\dots$, comme suit. En supposant, pour n fixe, que $C_j \subset R_{n-1,j}$ où $1\leqslant j\leqslant n-1$, soit $R_{n,j}$ une région telle que $C_j\subset R_{n,j}$, $\bar{R}_{n,j}\subset R_{n-1,j}$ et que, pour chaque $x\in R_{n,j}$, on ait $\varrho(x,C_j)<1/n$. En outre, conformément à (7), soit $C_n \subset R_{n,n}$ et $\bar{R}_{n,n}\subset R_{n-1}-\bar{R}_n$. Posons:

$$G_n = R_{n,0}+\dots+R_{n,n}, \qquad F_n = \mathcal{S}_2 - G_n.$$

On a $R_{n,j}\cdot R_{n,i}=0$ pour $i<j\leqslant n$. Car $R_{n,j}\subset R_{j,j}\subset R_{j-1}-R_j$ et

$$R_{n,i}\subset R_{i,i}\subset R_{i-1}-R_i \subset R_{i-1}-R_{j-1} \quad \text{si} \quad i>0;$$
$$R_{n,0}\cdot R_{n,j} \subset R_n R_{j-1} - R_j = 0.$$

Les régions $R_{n,0},\dots,R_{n,n}$ sont donc les composantes de G_n.

Puis, $F_n \subset \operatorname{Int}(F_{n+1})$, c. à d. que $\bar{G}_n \subset G_{n-1}$. Car $\bar{R}_{n,j}\subset R_{n-1,j}$ pour $1\leqslant j\leqslant n-1$ et

$$\bar{R}_{n,0}=\bar{R}_n \subset R_{n-1,0}\subset G_{n-1}, \qquad \bar{R}_{n,n}\subset R_{n-1,0}\subset G_{n-1}.$$

En tenant compte de (7'), on déduit facilement des inclusions précédentes que $G_1\cdot G_2\cdot\ldots = C_0+C_1+\dots$, c. à d. que $G=F_1+F_2+\dots$

Enfin:

$$\text{(7'')}\qquad C_j \subset R_{n,j} \text{ pour } j=1,\dots,n \quad \text{et} \quad C_0+C_{n+1}+C_{n+2}+\dots \subset R_{n,0}$$

selon (6) [14].

4. *Théorème. G étant un ensemble ouvert satisfaisant aux hypothèses du lemme 3, chaque fonction $f\in\mathfrak{P}^G$ est de la forme*

$$\text{(8)}\qquad f(x) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-p_n}{x-p_0}\right)^{k_n} e^{u_n(x)} \qquad \textit{où } u_n\in(\mathcal{E}^2)^{\mathcal{S}_2} \textit{ et } p_0\in C_0.$$

La convergence est uniforme sur chaque sous-ensemble fermé de G; plus encore, à chaque ensemble fermé $F\subset G$ correspond un n_0 tel que, pour $n\geqslant n_0$ et $x\in F$, on a

$$\text{(9)}\qquad f(x) = \left(\frac{x-p_1}{x-p_0}\right)^{k_1}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{x-p_n}{x-p_0}\right)^{k_n} e^{v_n(x)}, \qquad v_n(x)=u_1(x)+\dots+u_n(x).$$

Dans le cas où $\infty\in C_0$, on peut omettre dans l'énoncé précédent le terme $x-p_0$ (en posant $p_0=\infty$).

Etablissons, conformément au lemme 3, une numération $C_1, C_2, \dots$ des composantes de $\mathcal{S}_2-G$ différentes de C_0 et considérons la suite des ensembles fermés $F_1, F_2, \dots$ satisfaisant à (4). Soit $R_{n,0},\dots,R_{n,n}$ le système des composantes de $\mathcal{S}_2-F_n$; on a les inclusions (7''). Soit $p_n\in C_n$. Donc $p_0\in R_{n,0},\dots,p_n\in R_{n,n}$.

D'après 4, p. 332, on a sur F_n:

$$f(x) = \left(\frac{x-p_1}{x-p_0}\right)^{k_{n,1}}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{x-p_n}{x-p_0}\right)^{k_{n,n}} e^{v_n(x)} \qquad \text{où } v_n\in(\mathcal{E}^2)^{\mathcal{S}_2}$$

et, comme $F_n\subset F_{n+1}$, il vient sur F_n:

$$f(x) \sim \left(\frac{x-p_1}{x-p_0}\right)^{k_{n+1,1}}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{x-p_{n+1}}{x-p_0}\right)^{k_{n+1,n+1}}.$$

Le dernier facteur est ~ 1 (selon V, 1, p. 330), puisque d'après (7'') les points p_0 et p_{n+1} appartiennent à la même composante de $\mathcal{S}_0-F_n$, à savoir à $R_{n,0}$. En vertu du théorème d'univocité (5, p. 333), on a donc:

$$k_{n,1}=k_{n+1,1}, \quad \dots, \quad k_{n,n}=k_{n+1,n}$$

et, en posant $k_{n,n}=k_n$ pour $n=1,2,\dots$, on a la première des égalités (9) pour chaque $x\in F_n$.

[14]) Dans le cas particulier où G est une région, la démonstration du lemme 3 devient bien plus simple.

Soit, d'autre part, $F=\overline{F}\subset G$. D'après (4), il existe un n_0 tel que $F\subset F_n$ pour $n\geqslant n_0$. La première des égalités (9) est donc réalisée pour chaque $x\in F$. Il en résulte la conclusion demandée en posant $u_1(x)=v_1(x)$ et $u_n(x)=v_n(x)-v_{n-1}(x)$.

5. *La convergence du produit infini* (8) *est absolue. Elle ne dépend donc pas de l'ordre des facteurs. En conséquence, on peut admettre que la suite $p_0,p_1,\ldots$ est une suite donnée en avance de points extraits un à un de toutes les composantes de l'ensemble $\mathcal{S}_2-G$ (avec $p_0\in C_0$).*

Car, pour chaque x, il n'y a qu'un nombre fini de facteurs $[(x-p_n)/(x-p_0)]^{k_n}e^{u_n(n)}$ différents de 1.

Une hypothèse plus restrictive que celle du lemme 5 permet de déduire du théorème 4 le suivant:

6. *Soit G un ensemble ouvert $\subset\mathcal{S}_2$ tel que le point à l'infini est la seule limite des suites convergentes de points extraits des différentes composantes de $\mathcal{S}_2-G$. Chaque fonction $f\in\mathcal{P}^G$ est alors de la forme*

$$f(x)=m(x)e^{u(x)},\quad u\in(\mathcal{E}^2)^G,$$

où $m(x)$ est une fonction méromorphe sur le plan $\mathcal{E}^2$ tout entier.

En posant dans (8) $p_0=\infty$, il vient

$$f(x)=\prod_{n=1}^{\infty}(x-p_n)^{k_n}e^{u_n(x)}, \tag{10}$$

$p_1,p_2,\ldots$ étant une suite de points extraits un à un des différentes composantes de $\mathcal{S}_0-G$. Soient: $l_1,l_2,\ldots$ la suite des indices pour lesquels $k_{l_n}\geqslant 0$ et $r_1,r_2,\ldots$ celle où $k_{r_n}<0$. Admettons que les deux suites soient infinies (le cas où l'une des suites est finie est analogue).

Comme $\lim\limits_{n=\infty}p_n=\infty$, il existe deux fonctions entières:

$$g(x)=\prod_{n=1}^{\infty}(x-p_{l_n})^{k_{l_n}}e^{w_{l_n}(x)},\qquad h(x)=\prod_{n=1}^{\infty}(x-p_{r_n})^{-k_{r_n}}e^{w_{r_n}(x)}. \tag{11}$$

La fonction méromorphe $m(x)=g(x)/h(x)$ est alors la fonction demandée.

Désignons, en effet, par $g_n(x)$ et $h_n(x)$ les n-ièmes produits partiels des produits infinis (11). Il vient:

$$m(x)=\lim_{n=\infty}g_n(x)/\lim_{n=\infty}h_n(x)=\lim_{n=\infty}[g_n(x)/h_n(x)],$$

Soit $F=\overline{F}\subset G$. On a donc sur F, pour n suffisamment grand (cf. 7, p. 324):

$$m(x)\sim g_n(x)/h_n(x)\sim(x-p_{l_1})^{k_{l_1}}\cdot\ldots\cdot(x-p_{l_n})^{k_{l_n}}(x-p_{r_1})^{k_{r_1}}\cdot\ldots\cdot(x-p_{r_n})^{k_{r_n}}.$$

En désignant ce dernier produit par $\varphi_n(x)$, on a (en tenant compte de la convergence absolue du produit (10)):

$$f(x)=\lim_{n=\infty}\varphi_n(x)e^{u_{l_1}(x)+\ldots+u_{l_n}(x)+u_{r_1}(x)+\ldots+u_{r_n}(x)}.$$

On a donc sur F pour n suffisamment grand (cf. 7, p. 324) $f(x)\sim\varphi_n(x)\sim m(x)$, d'où $f(x)\sim m(x)$.

Considérons la suite $F_1,F_2,\ldots$ d'ensembles fermés satisfaisant à (4). L'homotopie $f(x)\sim m(x)$ étant réalisée sur chaque terme de cette suite, elle l'est sur l'ensemble G selon 13, p. 326.

§ 4. Multiplicité d'un ensemble par rapport à une fonction.

IX. Fonction $f\in\mathcal{P}^F$ où F est fermé. Etant donné une fonction rationnelle $r(x)$ et un ensemble X, nous avons défini dans l'Introduction la multiplicité de X par rapport à r comme *le nombre $\mu_X r$ des zéros et pôles de la fonction r appartenant à X, chacun compté avec sa multiplicité.* Dans le cas général où $f\in\mathcal{P}^F$, $F=\overline{F}\subset\mathcal{S}_2$ et où G est un ensemble-somme de composantes de $\mathcal{S}_2-F$ (c. à d. un ensemble fermé-ouvert dans $\mathcal{S}_2-F$), nous définissons le symbole $\mu_G f$ en posant

$$\mu_G f=\mu_G r,$$

$r(x)$ étant une fonction rationnelle arbitraire homotope à $f(x)$ sur F.

D'après le th. 5, p. 333, *$\mu_G f$ ne dépend pas du choix de la fonction r*; en outre, *si $R_0,R_1,\ldots$ désigne la suite des composantes de $\mathcal{S}_2-F$ et si l'on pose*:

$$f(x)\sim(x-p_0)^{k_0}\cdot(x-p_1)^{k_1}\cdot\ldots,\qquad k_0+k_1+\ldots=0,\qquad p_j\in R_j,$$

on a $\mu_{R_j}f=k_j$ et $\mu_G f=k_{l_1}+k_{l_2}+\ldots$ pour $G=R_{l_1}+R_{l_2}+\ldots$

On établit facilement les six propriétés suivantes de $\mu_G f$:

1. *(norme)* $\quad\mu_0 f=0=\mu_{\mathcal{S}_2-F}f$;
2. *(additivité)* $\quad\mu_{G_1+G_2}f=\mu_{G_1}f+\mu_{G_2}f$ *si* $G_1G_2=0$;
3. *(homomorphie)* $\quad\mu_G f_1\cdot f_2=\mu_G f_1+\mu_G f_2$;
4. *(invariance)* $\quad$ *si* $f_1\sim f_2$, *on a* $\mu_G f_1=\mu_G f_2$,

donc,

$$f\sim 1 \text{ entraîne } \mu_G f=0 \text{ quel que soit } G;$$

5. *(caractérisation de l'homotopie) Si* $\mu_R f_1 = \mu_R f_2$ *pour chaque composante* R, *on a* $f_1 \sim f_2$; par conséquent (cf. 4), *l'homotopie* $f_1 \sim f_2$ *équivaut à la condition*

$$\mu_G f_1 = \mu_G f_2 \quad \textit{quel que soit } G.$$

En particulier: $f \sim 1$ *équivaut à la condition que* $\mu_G f = 0$ *quel que soit* G.

6. *(continuité) Si* $\lim_{n=\infty} f_n = f$, *la convergence étant uniforme, on a* $\mu_G f_n = \mu_G f$ *pour* n *suffisamment grand.*

C'est une conséquence de 7, p. 324, et de 4.

7. *Soit* R *une composante de* $\mathcal{S}_2 - F$. *Pour que la fonction* $f \in \mathcal{P}^F$ *admette une extension* $f^* \in \mathcal{P}^{F+R}$, *il faut et il suffit que* $\mu_R f = 0$.

Posons $R = R_m$. D'après 4, p. 332, la fonction $f^* \in \mathcal{P}^{F+R}$ satisfait à l'homotopie

$$f^*(x) \sim (x-p_0)^{k_0} \cdot (x-p_1)^{k_1} \cdot \ldots \quad \text{où} \quad k_0 + k_1 + \ldots = 0 \quad \text{et} \quad k_m = 0.$$

La fonction f^* étant supposée une extension de f, la même homotopie a lieu pour la fonction f (sur F). Donc $\mu_{R_m} f = 0$.

Inversement, admettons que $\mu_{R_m} f = 0$ et que pour $x \in F$:

$$f(x) = e^{u(x)} (x-p_0)^{k_0} \cdot (x-p_1)^{k_1} \cdot \ldots \quad \text{où} \quad u \in (\mathcal{E}^2)^{\mathcal{S}_2}.$$

Désignons le membre droit de cette égalité par $f^*(x)$. Comme $k_m = 0$, la fonction $f^*(x)$ ne s'annule en aucun point de R_m. La fonction $f(x)$ admet donc l'extension demandée sur $F + R_m$.

X. Fonctions $f \in \mathcal{P}^G$ ***où*** G ***est ouvert.*** Soit F un ensemble fermé-ouvert dans $\mathcal{S}_2 - G$, c. à d. que $F = \overline{F}$ et $\mathcal{S}_2 - G - F = \overline{\mathcal{S}_2 - G - F}$.

D'après VII, p. 335, il existe une suite de fonctions rationnelles $r_1(x), r_2(x), \ldots$ dont les zéros et pôles appartiennent à $\mathcal{S}_2 - G$ et que

$$(1) \qquad f(x) = \lim_{n=\infty} r_n(x)\, e^{u_n(x)}, \quad u_n \in (\mathcal{E}^2)^G,$$

où la convergence est uniforme sur chaque $F^* = \overline{F^*} \subset G$.

Nous admettons par définition que

$$(2) \qquad \mu_F f = \lim_{n=\infty} \mu_F r_n.$$

Il s'agit de démontrer que cette limite existe et qu'elle ne dépend pas du choix des fonctions r_n.

Soit F^* un ensemble fermé qui sépare les ensembles F et $\mathcal{S}_2 - G - F$. Il existe donc un G^* fermé-ouvert dans $\mathcal{S}_2 - F^*$ qui contient F et est disjoint de $\mathcal{S}_2 - G - F$; d'où $F \subset G^* \subset G + F$, donc $F = G^* - G$. Soit f^* la fonction partielle $f|F^*$. D'après 7, p. 324, on a $f^* \sim r_n$ pour $n \geqslant n_0$. Donc, selon 4, p. 341: $\mu_{G^*} f^* = \mu_{G^*} r_n$. Mais $\mu_{G^*} r_n = \mu_F r_n$, puisque $F = G^* - G$ et aucun zéro ni pôle de r_n n'appartient à G. On parvient ainsi à la conclusion que, pour $n \geqslant n_0$, $\mu_F r_n$ a une valeur constante égale à $\mu_{G^*} f^*$, donc indépendante du choix des fonctions r_n, c. q. f. d.

Nous avons démontré en même temps que

F^* étant un sous-ensemble fermé de G, et G^* un ensemble fermé-ouvert dans $\mathcal{S}_2 - F^*$ tel que $F = G^* - G$, on a

$$(3) \qquad \mu_F f = \mu_{G^*} f^* \quad \textit{où} \quad f^* = f|F^*.$$

Cet énoncé permet de réduire la définition de la multiplicité par rapport à une fonction définie sur un ensemble ouvert à celle où la fonction est définie sur un ensemble fermé.

Posons dans la formule (1):

$$(4) \qquad r_n(x) = c_n (x - p_{n,0})^{k_{n,0}} \cdot \ldots \cdot (x - p_{n,l_n})^{k_{n,l_n}}$$

où $p_{n,0} = \infty$ si $\infty \in \mathcal{S}_2 - G$ et où $k_{n,0} + \ldots + k_{n,l_n} = 0$.

On a donc selon (2)

$$(5) \qquad \mu_F f = \lim_{n=\infty} (k_{n,j_1} + k_{n,j_2} + \ldots)$$

où $p_{n,j_1}, p_{n,j_2}, \ldots$ appartiennent à F.

Dans le cas particulier où $\mathcal{S}_2 - G = C_0 + \ldots + C_m$ (nombre *fini* de composantes), on a selon 2, p. 334:

$$f(x) = (x-p_0)^{k_0} \cdot \ldots \cdot (x-p_m)^{k_m} e^{u(x)},$$
$$k_0 + \ldots + k_m = 0, \quad u \in (\mathcal{E}^2)^G, \quad p_j \in C_j.$$

Posons dans la formule (1): $r_n(x) = (x-p_0)^{k_0} \cdot \ldots \cdot (x-p_m)^{k_m}$; il vient

$$(6) \qquad \mu_F f = k_{j_1} + \ldots + k_{j_s}, \quad \text{où} \quad p_{j_1}, \ldots, p_{j_s} \in F, \quad \text{donc} \quad \mu_{C_j} f = k_j.$$

Remplaçons G par F et F par G dans les th. IX, 1-4. Les th. X 1-4 ainsi obtenus montrent donc que *les propriétés de norme, d'additivité, d'homomorphie et d'invariance subsistent aussi dans le cas où* $f \in \mathcal{P}^G$, *G étant ouvert.* Leurs démonstrations s'en déduisent facilement.

Le théorème sur la *caractérisation de l'homotopie* est également vrai:

5. *Si* $\mu_F f_1 = \mu_F f_2$ *pour chaque* F, *on a* $f_1 \sim f_2$. *Ces deux conditions sont donc équivalentes* (en vertu de 4).

En particulier, *la condition* $f \sim 1$ *équivaut à la suivante*: $\mu_F f = 0$ *quel que soit* F.

Posons, en effet, $f = f_1 : f_2$. Supposons que f non ~ 1. On en déduit en vertu du th. 13, p. 326, qu'il existe un ensemble fermé $F^* \subset G$ tel qu'en posant $f^* = f | F^*$, on a f^* non ~ 1. Il existe donc selon 5, p. 342, un G^* fermé-ouvert dans $\mathcal{S}_2 - F^*$ tel que $\mu_{G^*} f^* \neq 0$. Posons $F = G^* - G$. Cet ensemble est évidemment ouvert dans $\mathcal{S}_2 - G$, mais il y est aussi fermé, car

$$G^* = \overline{G^*} - F^*, \quad \text{d'où} \quad F = \overline{G^*} - F^* - G = \overline{G^*} - G.$$

Il vient d'après (3), $\mu_F f \neq 0$, d'où $\mu_F f_1 \neq \mu_F f_2$.

Soit $\nu(F)$ une fonction qui fait correspondre à chaque sous-ensemble fermé-ouvert F de $\mathcal{S}_2 - G$ un nombre entier. Admettons que cette fonction soit assujettie aux deux conditions suivantes:

α *(norme)* $\quad \nu(0) = 0 = \nu(\mathcal{S}_2 - G)$,

β *(additivité)* $\quad \nu(F_1 + F_2) = \nu(F_1) + \nu(F_2)$ *si* $F_1 F_2 = 0$.

D'après 1 et 2, le coefficient $\mu_F f$, conçu comme fonction de F, satisfait aux conditions α et β. Comme on verra aussitôt, le théorème inverse a aussi lieu; ces deux énoncés *caractérisent donc la notion de multiplicité* (conçue comme fonction d'ensemble).

6. *A chaque fonction* $\nu(F)$ *normée et additive correspond une fonction* $f \in \mathfrak{P}^G$ *telle que* $\mu_F f = \nu(F)$ *quel que soit* F.

Soit, conformément à 1, p. 334:

$$G = F_1^* + F_2^* + \ldots, \quad F_n^* = \overline{F_n^*} \subset \mathrm{Int}\,(F_{n+1}^*), \tag{7}$$

où $\mathcal{S}_2 - F_n^*$ n'admet qu'un nombre fini de composantes et où $R - G \neq 0$ pour chaque composante R de $\mathcal{S}_2 - F_n^*$.

Chaque composante R étant contenue dans une composante de $\mathcal{S}_2 - F_{n-1}^*$, on peut les numéroter à l'aide d'un nombre fini de systèmes $i_1 \ldots i_n$ composés de n entiers $\geqslant 0$ de sorte que l'on ait:

$$\mathcal{S}_2 - F_n^* = \sum R_{i_1 \ldots i_n}, \qquad R_{i_1 \ldots i_{n+1}} \subset R_{i_1 \ldots i_n}, \tag{8}$$

la sommation étant étendue aux systèmes $i_1 \ldots i_n$ (n fixe) pour lesquels $R_{i_1 \ldots i_n}$ est défini.

Posons:

$$F_{i_1 \ldots i_n} = R_{i_1 \ldots i_n} - G. \tag{9}$$

Comme

$$R_{i_1 \ldots i_n} = \sum R_{i_1 \ldots i_n j} \quad \text{(sommation finie)}, \tag{10}$$

il vient pour chaque n:

$$F_{i_1 \ldots i_n} = \sum_j F_{i_1 \ldots i_n j}, \tag{11}$$

$$F_{i_1 \ldots i_n} \cdot F_{l_1 \ldots l_n} = 0 \quad \text{si} \quad (i_1 \ldots i_n) \neq (l_1 \ldots l_n), \tag{12}$$

$$\mathcal{S}_2 - G = \sum F_{i_1 \ldots i_n}, \tag{13}$$

car d'après (7) et (8): $\mathcal{S}_2 - G = \mathcal{S}_2 - F_n^* - G = \Sigma R_{i_1 \ldots i_n} - G$.

Selon la définition de F_n^*, on a $R_{i_1 \ldots i_n} - G \neq 0$, c. à d. $F_{i_1 \ldots i_n} \neq 0$. Soit donc

$$p_{i_1 \ldots i_n} \in F_{i_1 \ldots i_n}. \tag{14}$$

$F_{i_1 \ldots i_n}$ étant, d'après (9), (12) et (13), fermé-ouvert dans $\mathcal{S}_2 - G$, posons:

$$k_{i_1 \ldots i_n} = \nu(F_{i_1 \ldots i_n}). \tag{15}$$

Il vient d'après β, (11) et (12):

$$k_{i_1 \ldots i_n} = \sum_j k_{i_1 \ldots i_n j} \tag{16}$$

et, d'après α et (13), on a pour chaque n

$$\sum k_{i_1 \ldots i_n} = 0. \tag{17}$$

Considérons la fonction rationnelle

$$r_n(x) = \prod (x - p_{i_1 \ldots i_n})^{k_{i_1 \ldots i_n}}. \tag{18}$$

On a

$$r_n(x) \sim r_{n+1}(x) \quad \text{sur} \quad F_n^*. \tag{19}$$

En effet, d'après (14), (11) et (9), on a $p_{i_1 \ldots i_n j} \in R_{i_1 \ldots i_n}$. Or, $R_{i_1 \ldots i_n}$ étant une composante de $\mathcal{S}_2 - F_n^*$ contenant les points $p_{i_1 \ldots i_n}$ et $p_{i_1 \ldots i_n j}$, il vient (cf. 1, p. 330) $(x - p_{i_1 \ldots i_n}) / (x - p_{i_1 \ldots i_n j}) \sim 1$ sur F_n^*, d'où $(x - p_{i_1 \ldots i_n})^{k_{i_1 \ldots i_n j}} / (x - p_{i_1 \ldots i_n j})^{k_{i_1 \ldots i_n j}} \sim 1$. Donc, en vertu de (16):

$$(x - p_{i_1 \ldots i_n})^{k_{i_1 \ldots i_n}} / \prod_j (x - p_{i_1 \ldots i_n j})^{k_{i_1 \ldots i_n j}} \sim 1,$$

d'où la formule (19). Conformément à cette formule, soit $u_{n+1} \epsilon (\mathcal{E}^2)^{\mathcal{S}_2}$ tel que

(20) $$r_n(x) = r_{n+1}(x)\, e^{u_{n+1}(x)} \quad \text{pour} \quad x \epsilon F_n^*, \quad u_1(x) = 0.$$

Posons:

(21) $$f_n(x) = r_n(x)\, e^{u_1(x)+\ldots+u_n(x)}.$$

Il vient suivant (20) et (21):

(22) $$f_n(x) = f_{n+1}(x) = \ldots \quad \text{pour} \quad x \epsilon F_n^*.$$

Par conséquent, en posant

(23) $$f(x) = f_n(x) \quad \text{pour} \quad x \epsilon F_n^*,$$

on définit la fonction f sur G de façon univoque. En vertu de (7), cette fonction est continue: $f \epsilon \mathfrak{L}^G$.

On a

(24) $$\mu_{F_{i_1\ldots i_n}} f = k_{i_1\ldots i_n}.$$

En effet, selon (3) et (9) on a $\mu_{F_{i_1\ldots i_n}} f = \mu_{R_{i_1\ldots i_n}} f|F_n^*$ et comme selon (23) $f|F_n^* = f_n|F_n^*$, on en tire: $\mu_{F_{i_1\ldots i_n}} f = \mu_{R_{i_1\ldots i_n}} f_n|F_n^* = \mu_{R_{i_1\ldots i_n}} r_n$, puisque $f_n \sim r_n$ sur F_n^* (cf. (21) et théor. 4). Enfin $\mu_{R_{i_1\ldots i_n}} r_n = k_{i_1\ldots i_n}$ en vertu des formules (18), (14) et (9).

On a ainsi $\mu_F f = \nu(F)$ (cf. (15)), si F est de la forme $F = F_{i_1\ldots i_n}$.

Dans le cas où F est un ensemble arbitraire fermé-ouvert dans $\mathcal{S}_2 - G$, il existe un F^* fermé qui sépare les ensembles (fermés et disjoints) F et $\mathcal{S}_2 - G - F$. En vertu de (7), il existe un n tel que $F^* \subset F_n^*$. On peut donc admettre que $F^* = F_n^*$. Partageons les systèmes d'indices $i_1, \ldots i_n$ en deux groupes, suivant que $FR_{i_1\ldots i_n} \neq 0$ ou $FR_{i_1\ldots i_n} = 0$, donc où $(\mathcal{S}_2 - G - F)R_{i_1\ldots i_n} \neq 0$ (puisque $R_{i_1\ldots i_n} - G \neq 0$). Ces deux groupes sont disjoints, puisque les ensembles $R_{i_1\ldots i_n}$ sont connexes et l'ensemble F_n^* sépare F de $\mathcal{S}_2 - G - F$. Par conséquent, $i_1 \ldots i_n$ appartenant au premier groupe, on a $(\mathcal{S}_2 - G - F)R_{i_1\ldots i_n} = 0$, d'où $R_{i_1\ldots i_n} - G \subset F$, c. à d. $F_{i_1\ldots i_n} \subset F$. On en conclut, en tenant compte de (13), que F est la somme des ensembles $F_{i_1\ldots i_n}$ où $i_1 \ldots i_n$ parcourt le premier groupe. D'où en vertu de β, (12) et (24), l'égalité $\mu_F f = \nu(F)$.

XI. Caractérisation du groupe $\mathfrak{B}(G)$. On a le suivant *théorème de dualité*:

1. *$G \subset \mathcal{S}_2$ étant ouvert, les groupes $\mathfrak{B}(G)$ et $\mathfrak{N}(\mathcal{S}_2 - G)$ sont isomorphes*[15]). *Une isomorphie entre eux s'obtient en faisant correspondre à chaque fonction $f \epsilon \mathfrak{L}^G$ la multiplicité $\mu_F f$, conçue comme fonction de F.*

Pour s'en convaincre, on n'a qu'à tenir compte des théorèmes X, 1 - 6.

Considérons deux cas particuliers:

2. *Si le complémentaire $\mathcal{S}_2 - G$ est formé de $n+1$ composantes, le groupe $\mathfrak{B}(G)$ est isomorphe au groupe $\mathcal{G}^n$ des points entiers de l'espace cartésien à n dimensions*[16]).

3. *Si $\mathcal{S}_2 - G$ est formé d'une suite infinie de composantes dont toutes, sauf une seule, sont isolées, $\mathfrak{B}(G)$ est isomorphe au groupe $\mathcal{G}^{\aleph_0}$ des suites infinies de nombres entiers.*

En vertu du th. 1, il s'agit de démontrer que

2'. *Si $\mathcal{X} = C_0 + \ldots + C_n$, les $n+1$ sommandes étant connexes, fermés et disjoints, $\mathfrak{N}(\mathcal{X})$ est isomorphe à $\mathcal{G}^n$.*

3'. *Si $\mathcal{X} = C_0 + C_1 + \ldots$ est un espace compact, la suite de ses composantes étant infinie et seule la composante C_0 admettant des points d'accumulation des autres, $\mathfrak{N}(\mathcal{X})$ est isomorphe à $\mathcal{G}^{\aleph_0}$.*

En effet, dans le cas 2', on fait correspondre à la fonction $\nu \epsilon \mathfrak{N}(\mathcal{X})$ l'élément $k(\nu) = \{\nu(C_1), \ldots, \nu(C_n)\}$ de $\mathcal{G}^n$. On constate facilement que $k(\nu + \nu') = k(\nu) + k(\nu')$ et qu'à chaque point $\{k_1, \ldots, k_n\}$ de $\mathcal{G}^n$ correspond un ν tel que $\nu(C_1) = k_1, \ldots, \nu(C_n) = k_n$; car on pose $\nu(C_0) = -(k_1 + \ldots + k_n)$ et, pour $F = C_{j_0} + \ldots + C_{j_m}$, $\nu(F) = k_{j_0} + \ldots + k_{j_m}$ où $k_0 = \nu(C_0)$.

D'une façon analogue, on pose dans le cas 3':

$$k(\nu) = \{\nu(C_1), \nu(C_2), \ldots\}.$$

Etant donnée une suite $\{k_1, k_2, \ldots\} \epsilon \mathcal{G}^{\aleph_0}$, posons:

$$\nu(F) = k_{j_1} + \ldots + k_{j_m} \quad \text{pour} \quad F = C_{j_1} + \ldots + C_{j_m} \quad (j_i > 0);$$

dans le cas où F n'est pas de cette forme, son complémentaire $\mathcal{X} - F$ se laisse représenter de cette façon; on pose alors $\nu(F) = -\nu(\mathcal{X} - F)$. Il s'agit de prouver que $\nu \epsilon \mathfrak{N}(\mathcal{X})$, c. à d. que la fonction ν est additive. Soit donc $F_1 \cdot F_2 = 0$. Si les deux ensembles F_1 et F_2 sont

[15]) Pour la définition du groupe $\mathfrak{N}(\mathcal{S}_2 - G)$, voir Introduction, p. 319.

[16]) Cf. un théorème analogue de M. Eilenberg, loc. cit.. p. 106.

formés d'un nombre fini $j>0$ de composantes C_j, on constate aussitôt que $\nu(F_1+F_2)=\nu(F_1)+\nu(F_2)$. Si l'ensemble (fermé-ouvert) F_2 contient une infinité de composantes, il contient nécessairement C_0 (en vertu des hypothèses faites sur $\mathfrak{X}$ et C_0). Les ensembles F_1 et F_2 étant disjoints, on peut donc admettre que F_1 se compose d'un nombre fini de composantes $F_1=C_{j_1}+\ldots+C_{j_n}$ et que $\mathfrak{X}-F_2=C_{j_1}+\ldots+C_{j_m}$ où $m\geqslant n$. Il vient $\mathfrak{X}-(F_1+F_2)=C_{j_{n+1}}+\ldots+C_{j_m}$, d'où $\nu(F_1+F_2)=-k_{j_{n+1}}-\ldots-k_{j_m}$.

D'autre part, $\nu(F_1)=k_{j_1}+\ldots+k_{j_n}$ et $\nu(F_2)=-k_{j_1}-\ldots-k_{j_m}$, donc $\nu(F_1)+\nu(F_2)=\nu(F_1+F_2)$, d'où $\nu\in\mathfrak{N}(\mathfrak{X})$.

Ajoutons que *le th.* 1 *reste vrai en remplaçant l'ensemble ouvert G par un ensemble F fermé* [17]. La démonstration en devient bien plus simple. En effet, pour établir dans ce cas le th. X, 6, il suffit de faire correspondre à la fonction $\nu\in\mathfrak{N}(\mathcal{S}_2-F)$ la fonction rationnelle:

$$(1)\qquad f(x)=(x-p_0)^{k_0}\cdot(x-p_1)^{k_1}\cdot\ldots \quad \text{où} \quad k_n=\nu(R_n) \quad \text{et} \quad p_n\in R_n,$$

$R_0, R_1, \ldots$ étant la suite des composantes de l'ensemble $\mathcal{S}_2-F$. Le produit (1) n'est infini qu'en apparence, car il n'y a qu'un nombre fini d'indices n pour lesquels $k_n\neq 0$ (s'il existait une infinité des R_n pour lesquels $k_n>0$, le nombre ν correspondant à leur somme serait infini). G étant un ensemble fermé-ouvert dans $\mathcal{S}_2-F$, on a $G=R_{l_1}+R_{l_2}+\ldots$, d'où (cf. IX, p. 341):

$$\mu_G f=k_{l_1}+k_{l_2}+\ldots=\nu(R_{l_1})+\nu(R_{l_2})+\ldots=\nu(G).$$

Le th. 2 reste aussi vrai en remplaçant G par F.

A la place du th. 3, on a le suivant: *si $\mathcal{S}_2-F$ contient une infinité de composantes, le groupe $\mathfrak{B}(F)$ est isomorphe au groupe $\mathcal{G}^\omega$ des suites infinies de nombres entiers dont chacune ne contient qu'un nombre fini de termes $\neq 0$*. Ajoutons que la base du groupe $\mathfrak{B}(F)$ est définie par la suite des homographies $\dfrac{x-p_1}{x-p_0}, \dfrac{x-p_2}{x-p_0}, \ldots$; ces homographies peuvent d'ailleurs être remplacées par des translations $x-p_1, x-p_2, \ldots$, si $\infty\in R_0$.

Enfin, au th. 3′ correspond le suivant: *si l'espace $\mathfrak{X}$ est formé d'une suite infinie de composantes ouvertes, $\mathfrak{N}(\mathfrak{X})$ est isomorphe à $\mathcal{G}^\omega$*.

Remarque. L'importance topologique des th. 2 et 3 pour le cas de F fermé tient surtout au fait qu'ils impliquent *l'invariance du nombre des composantes du complémentaire*; le théorème de Jordan en est un cas particulier.

[17]) Cf. ibidem, p. 93.

XII. Rapports à quelques théorèmes sur les fonctions analytiques. On a les énoncés suivants:

1. *La notion de multiplicité est une notion locale: on n'altère pas la valeur de $\mu_F f$ en réduisant le domaine des x à un ensemble ouvert qui, augmenté de F, constitue un entourage de F.*

D'une façon plus générale:

Soient: G et G_0 deux ensembles ouverts tels que $G_0\subset G\subset\mathcal{S}_2$, F et F_0 deux ensembles fermés-ouverts dans $\mathcal{S}_2-G$ et $\mathcal{S}_2-G_0$ respectivement et tels que $F=F_0-G$. Soit $f\in\mathfrak{L}^G$. On a alors

$$\mu_{F_0} f_0=\mu_F f \quad \text{où} \quad f_0=f|G_0.$$

Soit, en effet, $f(x)=\lim\limits_{n=\infty} r_n(x)e^{u_n(x)}$, la convergence étant uniforme sur chaque sous-ensemble fermé de G et $r_n(x)$ étant une fonction rationnelle. D'après (2), p. 342, on a $\mu_{F_0} f_0=\mu_{F_0} r_n$ et $\mu_F f=\mu_F r_n$ pour n suffisamment grand. Comme aucun zéro ni pôle de r_n n'appartient à G, les mêmes zéros et pôles appartiennent à F et à F_0. Selon la définition de la multiplicité, il vient $\mu_{F_0} r_n=\mu_F r_n$, d'où la conclusion demandée.

2. *g étant une fonction holomorphe sur un ensemble ouvert et p un zéro k-uple de cette fonction, on a*

$$\mu_p g^*=k,$$

g^* désignant la fonction g réduite aux x tels que $g(x)\neq 0$.

On a, en effet $g(x)=(x-p)^k g_1(x)$ où $g_1(x)\neq 0$ dans l'entourage de p. En prenant pour cet entourage un cercle (ouvert) Q, on a donc, selon II, 4a, $g_1\sim 1$ sur Q, donc $g(x)\sim(x-p)^k$ sur $Q-p$; d'où la conclusion demandée en vertu de 1 (en substituant p à F).

Le même théorème s'étend aux fonctions *méromorphes* (en tenant compte toutefois de la remarque p. 318, renvoi 1).

Remarque. Dans les hypothèses du th. 2, on a donc $\mu_p g^*>0$. Cependant dans le domaine des fonctions continues arbitraires, un zéro (isolé) peut avoir la multiplicité 0, ou même une multiplicité négative. Les deux fonctions suivantes en fournissent des exemples:

1° $g(x)=e^{-\frac{1}{|x|}}$, $g(0)=0$. On a $\mu_p g^*=0$ pour $p=0$.

2° $g(x)=x^{-n}e^{-\frac{1}{|x|}}$, $g(0)=0$. On a $\mu_0 g^*=-n$ pour $p=0$.

3. *Théorème de Rouché généralisé. Soient: M un sous-ensemble fermé de $\mathcal{S}_2$, g et g_1 deux fonctions-éléments de $(\mathcal{E}^2)^M$ telles que l'on ait $|g_1(x)|<|g(x)|$ pour chaque x appartenant à la frontière de M. F et F^* désignant respectivement l'ensemble des zéros de $g(x)$ et de $g^*(x)=g(x)+g_1(x)$, on a*

$$\mu_F f=\mu_{F^*} f^{*}\ ^{18)},$$

où $f=g|G$, $f^*=g^*|G^*$, $G=\mathrm{Int}\,(M)-F$ *et* $G^*=\mathrm{Int}\,(M)-F^*$.

Désignons, en effet, par F_0 l'ensemble des x tels que $|g(x)|\leqslant|g_1(x)|$. Il vient $F_0\subset\mathrm{Int}(M)$, $F\subset F_0$ et $F^*\subset F_0$. On en conclut que les ensembles F, F^* et F_0 sont fermés-ouverts respectivement dans $\mathcal{S}_2-G$, $\mathcal{S}_0-G^*$ et $\mathcal{S}_2-G_0$ où $G_0=\mathrm{Int}(M)-F_0$. Cela résulte des décompositions suivantes (en couples d'ensembles fermés et disjoints):

$$\mathcal{S}_2-G=\overline{\mathcal{S}_2-M}+F,\quad \mathcal{S}_2-G^*=\overline{\mathcal{S}_2-M}+F^*,\quad \mathcal{S}_2-G_0=\overline{\mathcal{S}_2-M}+F_0.$$

En outre, $F=F_0-G$ et $F^*=F_0-G^*$, car $F_0-G=F_0-\mathrm{Int}(M)+F$ et $F_0-G^*=F_0-\mathrm{Int}(M)+F^*$. En appliquant le th. 1, on en tire

$$\mu_{F_0}f_0=\mu_F f\quad\text{et}\quad \mu_{F_0}f_0^*=\mu_{F^*}f^*,\quad\text{où}\quad f_0=f|G_0\quad\text{et}\quad f_0^*=f^*|G_0.$$

Reste à démontrer que $\mu_{F_0}f_0=\mu_{F_0}f_0^*$, donc, suivant 4, p. 341, que $f_0\sim f_0^*$ sur F_0. Or, cette homotopie est réalisée en posant

$$h(x,t)=g(x)+tg_1(x)\quad\text{pour}\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

car pour $x\in G_0$:

$$h(x,0)=g(x)=f_0(x),\quad h(x,1)=g(x)+g_1(x)=f_0^*(x)\quad\text{et}\quad h(x,t)\neq 0,$$

puisqu'on aurait autrement $|g(x)|=t|g_1(x)|$, donc $|g(x)|\leqslant|g_1(x)|$, d'où $x\in F_0$, contrairement à $x\in G_0$.

4. *Corollaire. Soient $M=\overline{M}\subset\mathcal{S}_2$ et $g_n\in(\mathcal{E}^2)^M$ où $n=1,2,\dots$ une suite de fonctions uniformément convergeant vers une fonction $g(x)$ qui ne s'annule en aucun point frontière de M. F_n et F désignant respectivement l'ensemble des zéros de $g_n(x)$ et de $g(x)$, on a pour n suffisamment grand*

$$\mu_F f=\mu_{F_n}f_n\quad\text{où}\quad f=g|[\mathrm{Int}\,(M)-F]\quad\text{et}\quad f_n=g_n|[\mathrm{Int}\,(M)-F_n].$$

[18]) On constate aussitôt (en tenant compte du th. 2) que dans le cas où les fonctions g et g_1 sont *holomorphes* sur $\mathrm{Int}(M)$, $\mu_F f$ et $\mu_{F^*}f^*$ désignent respectivement les nombres des zéros des fonctions g et g^*, chaque zéro étant compté avec de sa multiplicité.

En effet, η désignant la borne inférieure de $|g(x)|$ où x parcourt la frontière de M, on a par hypothèse $\eta>0$. Il existe donc un n_0 t l que $|g_n(x)-g(x)|<\eta$ pour $n>n_0$. Posons $h_n(x)=g_n(x)-g(x)$. Il vient $|h_n(x)|<|g(x)|$ sur la frontière de M. En appliquant le th. 3, on obtient la conclusion demandée.

5. *La multiplicité $\mu_F f$ est invariante par rapport à l'homographie; c. à d. que h étant une homographie, on a*

$$\mu_{h^{-1}(F)}fh(x)=\mu_F f(y).$$

Ce théorème sera établi sous une forme plus générale dans le N XXI. Une démonstration directe ne présente non plus de difficulté (on peut, d'ailleurs, en vertu des théorèmes du N X, se borner au cas où f est une fonction rationnelle).

§ 5. Rapport de la notion de multiplicité à celle d'indice.

XIII. Définitions et notations. Soit $x=\zeta(t)$, où $0\leqslant t\leqslant 1$, une représentation paramétrique d'un continu $C\subset\mathcal{E}^2$ sur l'intervalle $\mathcal{J}$. Soit $\zeta(0)=\zeta(1)$. Soit $p\in\mathcal{S}_2-C$. On a par définition (cf. p. 328):

(1) $$\mathrm{ind}_\zeta\, p=\Delta_\zeta(x-p).$$

Autrement dit, on a, en posant $\zeta(t)-p=e^{u(t)}$ et $u\in(\mathcal{E}^2)$:

(2) $$\mathrm{ind}_\zeta\, p=\frac{1}{2\pi i}[u(1)-u(0)].$$

En outre, $\mathrm{ind}_\zeta\infty=0$.

Inversement, l'accroissement se laisse définir à l'aide de l'indice: soit $f\in\mathcal{P}^C$; on a

(3) $$\Delta_\zeta f=\mathrm{ind}_{f\zeta}\,0,$$

$f\zeta$ désignant la fonction superposée $f[\zeta(t)]$.

D'une façon analogue, si $g\in(\mathcal{E}^2)^C$ et $p\in\mathcal{S}_2-g(C)$, on a

(4) $$\Delta_\zeta[g(x)-p]=\mathrm{ind}_{g\zeta}\,p.$$

La transformation ζ de l'intervalle $\mathcal{J}$ détermine une transformation ζ^0 de la circonférence $|x|=1$ (que nous désignons par $\mathcal{S}$). A savoir: $2\pi t$ étant l'argument de x (où $0\leqslant t\leqslant 1$), nous posons $\zeta^0(x)=\zeta(t)$. On constate aussitôt que la fonction ζ^0 est continue:

(5) $$\zeta^0\in(\mathcal{E}^2)^{\mathcal{S}},\quad \zeta^0(\mathcal{S})=C\quad\text{et}\quad \zeta^0(e^{2\pi i t})=\zeta(t).$$

Inversement, si $g \in (\mathcal{E}^2)^{\mathcal{S}}$, on a

(6) $$\zeta^0(x)=g(x) \text{ en posant } \zeta(t)=g(e^{2\pi i t}).$$

1. *Si* $\operatorname{ind}_\zeta p=n$, *on a* $\zeta^0(x)-p\sim x^n$ *(sur* $\mathcal{S}$*).*

Soit, en effet, $\zeta(t)-p=e^{u(t)}$ où $u(1)-u(0)=2n\pi i$. Définissons la fonction $y=v(x)$ en convenant que $y=u(t)-2n\pi i t$ où $x=e^{2\pi i t}$. On a donc

$$v \in (\mathcal{E}^2)^{\mathcal{S}} \quad \text{et} \quad v(e^{2\pi i t})=u(t)-2n\pi i t.$$

En posant $x=e^{2\pi i t}$, il vient

$$x^n e^{v(x)}=e^{2n\pi i t}\cdot e^{u(t)-2n\pi i t}=e^{u(t)}=\zeta^0(x)-p.$$

2. *Pour que la fonction* ζ^0 *soit une homéomorphie, il faut et il suffit que l'on ait* $\zeta(t)\neq\zeta(t')$ *pour chaque couple* $t\neq t'$, *sauf lorsque* $|t-t'|=1$.

En effet, si $\zeta(t)=\zeta(t')$, on a $\zeta^0(x)=\zeta^0(x')$ pour $x=e^{2\pi i t}$ et $x'=e^{2\pi i t'}$. En supposant, que ζ^0 est une homéomorphie, il vient $x=x'$, d'où soit $t=t'$, soit $|t-t'|=1$.

Inversement, si $\zeta^0(x)=\zeta^0(x')$ et $x=e^{2\pi i t}$, $x'=e^{2\pi i t'}$, on a $\zeta(t)=\zeta(t')$. On a donc soit $t=t'$, soit $|t-t'|=1$, d'où $e^{2\pi i t}=e^{2\pi i t'}$ donc $x=x'$.

XIV. *Théorèmes auxiliaires.*

1. *Soit* $g \in \mathcal{S}_2^{\mathcal{X}}$, $\mathcal{X}$ *étant un espace compact. Si les points* p *et* q *appartiennent à la même composante de* $\mathcal{S}_2-g(\mathcal{X})$, *on a*

1) $$\frac{g(x)-p}{g(x)-q}\sim 1 \quad (\textit{sur } \mathcal{X}).$$

Si p *appartient à la composante non-bornée de* $\mathcal{S}_2-g(\mathcal{X})$, *on a* $g(x)-p\sim 1$.

On a, en effet (p. 330, V, 1): $\dfrac{y-p}{y-q}\sim 1$ sur $g(\mathcal{X})$. Il vient $\dfrac{y-p}{y-q}=e^{v(y)}$, $v \in (\mathcal{E}^2)^{g(\mathcal{X})}$, donc $\dfrac{g(x)-p}{g(x)-q}=e^{u(x)}$ où $u(x)=vg(x)$, d'où la relation (1). La deuxième partie s'en déduit en posant $q=\infty$.

2. *Dans l'hypothèse supplémentaire que la fonction* g *est biunivoque, le théorème inverse est vrai, c. à d. la condition* (1) *implique que* p *et* q *appartiennent à la même composante de* $\mathcal{S}_2-g(\mathcal{X})$.

Si $g(x)-p\sim 1$, *le point* p *appartient à la composante non-bornée de* $\mathcal{S}_2-g(\mathcal{X})$.

Soit, en effet, $x=h(y)$ la fonction inverse à $y=g(x)$. En admettant (1) et en posant $v(y)=uh(y)$, on a $\dfrac{g(x)-p}{g(x)-q}=e^{u(x)}$, donc $\dfrac{y-p}{y-q}=e^{v(y)}$ sur $g(\mathcal{X})$, d'où $\dfrac{y-p}{y-q}\sim 1$.

D'après V, 2, p. 331, p et q appartiennent à la même composante de $\mathcal{S}_2-g(\mathcal{X})$.

En particulier, si $q=\infty$, on en conclut que p appartient à la composante non-bornée.

3. *Si* p *et* q *appartiennent à la même composante de* $\mathcal{S}_2-C$ *où* $C=\zeta(\mathcal{J})\subset\mathcal{S}_2$, *on a* $\operatorname{ind}_\zeta p=\operatorname{ind}_\zeta q$. *Si* p *appartient à la composante non-bornée, on a* $\operatorname{ind}_\zeta p=0$. *Si* ζ^0 *est une homéomorphie et* p *appartient à une composante bornée de* $\mathcal{S}_2-C$, *on a* $\operatorname{ind}_\zeta p\neq 0$.

Posons, en effet, dans les énoncés précédents: $g=\zeta^0$ et $\mathcal{X}=\mathcal{S}$. Il vient $\zeta^0(x)-p\sim\zeta^0(x)-q$ sur $\mathcal{S}$, d'où $\operatorname{ind}_\zeta p=\operatorname{ind}_\zeta q$ en vertu de XIII, 1. En particulier, si $q=\infty$, il vient $\operatorname{ind}_\zeta p=0$. Si ζ^0 est une homéomorphie, on a selon XIV, 2, $\zeta^0(x)-p$ non ~ 1, d'où selon XIII, 1, $\operatorname{ind}_\zeta p\neq 0$.

La dernière partie du th. 3 sera précisée (cf. XV, 1) en vertu des théorèmes qui suivent.

4. *Soient:* $\zeta(\mathcal{J})=C$, ζ^0 *une homéomorphie,* $f \in \mathcal{P}^C$ *et* $p \in \mathcal{S}_2-C$. *Si* $\operatorname{ind}_\zeta p=1$ *et* $\Delta_\zeta f=n$, *on a* $f(x)\sim(x-p)^n$.

Posons, en effet, $\zeta(t)-p=e^{u(t)}$, $u(1)-u(0)=2\pi i$ et $f\zeta(t)=e^{v(t)}$, $v(1)-v(0)=2n\pi i$. Définissons la fonction $y=w(x)$ pour $x \in C$, en admettant que $w(x)=v(t)-nu(t)$ où $x=\zeta(t)$. Bien qu'à $x=\zeta(0)=\zeta(1)$ correspondent deux valeurs de t, la fonction w est définie d'une façon univoque, puisque $v(1)-nu(1)=\big(v(0)+2n\pi i\big)-\big(2n\pi i+nu(0)\big)=$ $=v(0)-nu(0)$. Donc $w \in (\mathcal{E}^2)^C$ et $w\zeta(t)=v(t)-nu(t)$. Il vient

$$\big(\zeta(t)-p\big)^n e^{w\zeta(t)}=e^{nu(t)}\cdot e^{v(t)-nu(t)}=e^{v(t)}=f\zeta(t),$$

d'où $(x-p)^n e^{w(x)}=f(x)$, en posant $x=\zeta(t)$.

5. *Soient* A *la circonférence* $|x-p|=r$ *et* $g \in (\mathcal{E}^2)^A$ *une transformation homéomorphe de* A *en la courbe simple fermée* $C=g(A)$. *Si* q *est un point de la composante bornée* D *de* $\mathcal{S}_2-C$, *on a* $g(x)-q\sim(x-p)^{\pm 1}$.

Envisageons d'abord le cas où C est une circonférence de centre q et de rayon s. Posons $\zeta(t)=p+re^{2\pi i t}$ où $0\leqslant t\leqslant 1$. On a donc $A=\zeta(\mathcal{J})$. Il vient

$$g\zeta(t)-q=|g\zeta(t)-q|e^{2\pi i\varphi(t)}=s\,e^{2\pi i\varphi(t)},$$

où φ est une fonction continue à valeurs réelles.

Supposons, par impossible, que $|\varphi(1)-\varphi(0)|>1$. Il existe alors un t_0 tel que $|\varphi(t_0)-\varphi(0)|=1$. Par conséquent:

$$e^{2\pi i\varphi(t_0)}=e^{2\pi i\varphi(0)}, \quad \text{d'où} \quad g\zeta(t_0)=g\zeta(0), \quad \text{donc} \quad \zeta(t_0)=\zeta(0).$$

De là résulte, selon la définition de ζ, que $e^{2\pi i t_0}=1$, ce qui est impossible puisqu $0<t_0<1$.

On a donc $|\varphi(1)-\varphi(0)|\leqslant 1$, d'où $\mathrm{ind}_{g\zeta}\, q\leqslant 1$.

D'autre part, $\mathrm{ind}_{g\zeta}\, q\neq 0$. Cette inégalité résulte de la dernière partie du th. 3, en tenant compte du fait que, pour $t\neq t'$ et $|t-t'|<1$, on a $g\zeta(t)\neq g\zeta(t')$ (cf. aussi XIII, 2).

Ainsi, $\mathrm{ind}_{g\zeta}\, q=\pm 1$. En substituant dans 4: $C=A$, $f(x)=g(x)-q$ et en tenant compte de XIII (4), il vient $g(x)-q\sim(x-p)^{\pm 1}$.

Dans le cas général, désignons par A_0 la circonférence $|x-p|=r/2$ et par C_0 la circonférence d'un cercle décrit du centre q et contenu dans D. D'après un théorème de la topologie du plan, l'homéomorphie g de A en C se laisse étendre à une homéomorphie g^* des deux „anneaux circulaires“ compris respectivement entre A_0 et A et entre C_0 et C; de sorte que $g^*(A_0)=C_0$.

Posons:

$$h(x,t)=g^*[p+(x-p)(1-\tfrac{1}{2}t)]-q, \quad 0\leqslant t\leqslant 1 \quad \text{et} \quad x\in A.$$

Il vient $h\in\mathcal{P}^{A\times\mathcal{J}}$, $h(x,0)=g(x)-q$ et, en posant $g_0(x)=g^*\left(\dfrac{p+x}{2}\right)$, on a $h(x,1)=g_0(x)-q$. Donc $g(x)-q\sim g_0(x)-q$ et, g_0 étant une transformation homéomorphe de A en C_0, on a — comme nous venons de montrer — $g_0(x)-q\sim(x-p)^{\pm 1}$, d'où $g(x)-q\sim(x-p)^{\pm 1}$.

XV. Parcours positifs et négatifs. Soit $C\subset\mathcal{E}^2$ une courbe simple fermée et $y=\zeta(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, $\zeta(0)=\zeta(1)$ sa représentation paramétrique. Si ζ^0 est une homéomorphie et si l'on a $\mathrm{ind}_\zeta\, p=1$ pour chaque point p appartenant à la composante bornée D de $\mathcal{S}_2-C$, ζ est dit un *parcours positif de la courbe C*.

Si l'on a constamment $\mathrm{ind}_\zeta\, p=-1$, le parcours est dit *négatif*.

1. *ζ^0 étant une homéomorphie, ζ est soit un parcours positif, soit négatif de la courbe $C=\zeta(\mathcal{J})$.*

Remplaçons, en effet, dans XIV, 5, A par $\mathcal{S}$ et g par ζ^0. Il vient $\zeta^0(x)-p\sim x^{\pm 1}$, d'où $\mathrm{ind}_\zeta\, p=\pm 1$ en vertu de XIII, 1. En outre, d'après XIV, 3, $\mathrm{ind}_\zeta\, p$ a une valeur constante (pour $p\in D$).

Si le parcours $y=\zeta(t)$ est positif, le parcours $y=\zeta(1-t)$ est négatif. Chaque courbe simple fermée admet donc deux parcours: l'un positif et l'autre négatif.

Le th. XIV, 4 implique le suivant:

2. *Soient ζ un parcours positif de la courbe C, $f\in\mathcal{P}^C$ et $p\in D$. Si $\Delta_\zeta f=n$, on a $f(x)\sim(x-p)^n$.*

On encore: *si $g\in(\mathcal{E}^2)^C$ et $q\in\mathcal{S}_2-g(C)$, on a*

$$g(x)-q\sim(x-p)^{\mathrm{ind}_{g\zeta}q}.$$

XVI. Rapport à la multiplicité. Le th. XIII, 1 entraîne aussitôt l'identité:

1. $\mathrm{ind}_\zeta\, p=\mu_Q[\zeta^0(x)-p]$ *où Q désigne le cercle $|x|<1$.*

2. *Soient: ζ un parcours positif de la courbe $C\subset\mathcal{E}^2$, D la composante bornée de $\mathcal{S}_2-C$ et $f\in\mathcal{P}^C$. On a*

$$\mu_D f=\Delta_\zeta f=\mathrm{ind}_{f\zeta}\, 0. \tag{1}$$

Parsuite: *si $g\in(\mathcal{E}^2-q)^C$, on a $\mu_D[g(x)-q]=\mathrm{ind}_{g\zeta}\, q$.*

Soit, en effet, $p\in D$. Soit conformément à V, 4, $f(x)\sim(x-p)^n$. Donc selon IX, p. 341, $\mu_D f=n$. D'autre part, $\Delta_\zeta f=n$ selon XV, 2.

D'une façon analogue:

2'. *Si D_1 est la composante non-bornée de $\mathcal{S}_2-C$ et ζ_1 est un parcours négatif de C, on a $\mu_{D_1}f=\Delta_{\zeta_1}f=\mathrm{ind}_{f\zeta_1}0$.*

Soit $\zeta(t)=\zeta_1(1-t)$. ζ étant un parcours positif, la formule (1) est réalisée. Comme $\mu_D f+\mu_{D_1}f=0$ (cf. IX, 1 et 2) et $\Delta_\zeta f=-\Delta_{\zeta_1}f$, on en tire la relation demandée.

Soit $G\subset\mathcal{S}_2$ un ensemble ouvert. Admettons que *p soit un point isolé de l'ensemble $\mathcal{S}_2-G$*. On peut donc l'entourer d'un cercle (ouvert) D de centre p tel que $\overline{D}-p\subset G$. Soit C le contour de D; on peut admettre que $\infty\in\mathcal{S}_2-C$. On a le théorème suivant:

3. *Pour $f\in\mathcal{P}^G$, on a $\mu_p f=\Delta_\zeta f^*=\mathrm{ind}_{f\zeta}0$, où $f^*=f|C$ et où ζ est un parcours positif ou négatif de C, suivant que $p\neq\infty$ ou $p=\infty$* [19]).

[19]) On voit ainsi qu'étant donnés: une fonction $g\in(\mathcal{E}^2)^G$ et un zéro isolé p de cette fonction, et qu'en désignant par f la fonction g réduite aux x tels que $g(x)\neq 0$, la multiplicité $\mu_p f$ coïncide avec „*l'indice*“ du point p dans le sens employé par MM. Alexandroff-Hopf, op. cit., p. 470 („Index“ oder „Vielfachheit einer 0-Stelle“).

Si l'ensemble F des zéros de la fonction g est fini, $\mu_F f$ coïncide donc avec le „*nombre algébrique des zéros*“ de g.

On a, en effet, $\mu_p f = \mu_D f^*$ selon X(3), p. 343, et $\mu_D f^* = \Delta_\zeta f^*$ selon 2 et 2'.

Soit, à présent, R une région dont le complémentaire est formé d'un nombre fini de composantes: $\mathcal{S}_2 - R = C_0 + \ldots + C_n$. Chacune de ces composantes étant un continu qui ne coupe pas $\mathcal{S}_2$, on peut la séparer de toutes les autres à l'aide d'une courbe simple fermée. En raisonnant, comme auparavant, on a le théorème suivant:

4. *Soit $f \in \mathfrak{P}^R$. Si la courbe simple fermée $K \subset \mathcal{E}^2$ sépare le continu C_j de tous les C_l avec $l \neq j$, et si D désigne la composante de $\mathcal{S}_2 - K$ qui contient C_j, on a*

$$\mu_{C_j} f = \Delta_\zeta f^* = \mathrm{ind}_{f\zeta}\, 0 \quad \textit{où} \quad f^* = f|K,$$

ζ étant un parcours positif ou négatif de K suivant que D est borné ou non-borné.

Le th. 3 permet aussi de calculer $\mu_R f$ dans le cas où f est défini sur un ensemble fermé:

5. *Soient $F = \overline{F} \subset \mathcal{S}_2$, R une composante de $\mathcal{S}_2 - F$, $p \in R$ et $f \in \mathfrak{P}^F$. Soit f_1 une extension de f sur l'espace $\mathcal{S}_2$ privé d'un ensemble fini Z de points tel que $ZR = p$ (f_1 est p. ex. le membre droit de la formule* V, 4 (1), p. 332). *On a alors $\mu_R f = \mu_p f_1$.*

C'est une conséquence directe de X(3), p. 343, en y remplaçant G^* par R, F^* par F, F par p, f par f_1 et G par $\mathcal{S}_2 - Z$.

XVII. Continus et ensembles élémentaires. Leur caractéristique. Soit $D_0, \ldots, D_n$ un système de disques tels que $\overline{D}_j \overline{D}_l = 0$ pour $j \neq l$. Soit A le continu „élémentaire" $\mathcal{S}_2 - (D_0 + \ldots + D_n)$ (cf. p. 321). Par définition, la frontière C_j de D_j est une courbe simple fermée. En désignant par B la frontière du continu A, on constate aussitôt que:

1. $B = C_0 + \ldots + C_n$.

En posant $I = \mathrm{Int}(A)$ et $E_j = \mathcal{S}_2 - \overline{D}_j$, on a

2. $I = E_0 - (\overline{D}_1 + \ldots + \overline{D}_n)$,

car $I = \mathcal{S}_2 - \overline{D_0 + \ldots + D_n} = \mathcal{S}_2 - \overline{D}_0 - (\overline{D}_1 + \ldots + \overline{D}_n)$.

3. $\mathcal{S}_2 - B = I + D_0 + \ldots + D_n$,

les sommandes étant les composantes de $\mathcal{S}_2 - B$.

La multiplicité de I relative à une fonction $f \in \mathfrak{P}^B$ s'évalue facilement à l'aide de l'indice. On a, en effet:

4. $\mu_I f = \Delta_{\zeta_0} f_0 + \ldots + \Delta_{\zeta_n} f_n = \mathrm{ind}_{f\zeta_0}\, 0 + \ldots + \mathrm{ind}_{f\zeta_n}\, 0$,

où $f_j = f|C_j$ et où ζ_j désigne un parcours négatif ou positif de C_j, suivant que D_j est borné ou non-borné.

Autrement dit (cf. Introduction, formule (5), p. 321):

$$\mu_I f = \mathrm{car}_A f.$$

En effet, il vient selon IX, 1, 2 (p. 341) et XVII, 3:

$$\mu_I f + \mu_{D_0} f + \ldots + \mu_{D_n} f = 0.$$

D_j étant fermé-ouvert dans $\mathcal{S}_2 - C_j$, on a (selon la définition du coefficient μ):

$$\mu_{D_j} f = \mu_{D_j} f_j \quad \text{et} \quad \mu_{D_j} f_j = -\Delta_{\zeta_j} f_j$$

en vertu de XVI, 2 et 2'.

Le th. 4, rapproché de IX, 7 (en y substituant B à F et I à R) implique les deux suivants:

5. *Si $f \in \mathfrak{P}^A$, on a $\Delta_{\zeta_0} f_0 + \ldots + \Delta_{\zeta_n} f_n = 0$* [20]*, c. à d.* $\mathrm{car}_A (f|B) = 0$.

6. *Si $f \in \mathfrak{P}^B$ et $\Delta_{\zeta_0} f_0 + \ldots + \Delta_{\zeta_n} f_n = 0$, la fonction f admet une extension $f^* \in \mathfrak{P}^A$.*

Soit A un ensemble élémentaire:

$$A = A_1 + \ldots + A_m,$$

les sommandes étant des continus élémentaires disjoints.

En désignant par I l'intérieur de A, par B sa frontière et en conférant un sens analogue aux symboles A_l et B_l, on a

7. $I = I_1 + \ldots + I_m$ *et* $B = B_1 + \ldots + B_m$.

En conséquence:

8. *I_l est une composante de $\mathcal{S}_2 - B$.*

Soit $f \in \mathfrak{P}^B$. En posant $f_l = f|B_l$, on a donc $\mu_{I_l} f = \mu_{I_l} f_l$, d'où en vertu de 7 et IX, 2:

$$\mu_I f = \mu_{I_1} f + \ldots + \mu_{I_m} f = \mu_{I_1} f_1 + \ldots + \mu_{I_m} f_m.$$

---

[20]) Dans des hypothèses de régularité faites sur f et le contour B de A, on a

$$\Delta_\zeta f = \frac{1}{2\pi i} \int_B \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx$$

et le th. 5 résulte alors du th. de Cauchy de la Théorie des fonctions analytiques.

Comme $\operatorname{car}_A f = \operatorname{car}_{A_1} f + \ldots + \operatorname{car}_{A_m} f$, on a finalement:

9. $\mu_I f = \operatorname{car}_A f$,

formule qui permet de calculer la multiplicité à l'aide de l'indice.

Remarques. Soient A un ensemble élémentaire et $g \in (\mathcal{E}^2)^A$. Admettons que $g(x) \neq 0$ pour $x \in B$ et posons $f = g|B$. Si $\operatorname{car}_A f \neq 0$, il existe un x_0 tel que $g(x_0) = 0$ [21].

C'est une conséquence directe du th. 5. Plus précisément:

Si l'ensemble F des zéros de la fonction g est fini, le „nombre algébrique" de ces zéros (cf. le renvoi, p. 355) coïncide avec $\operatorname{car}_A f$, donc avec $\mu_I f$ [22].

Ce dernier énoncé est un cas particulier du théorème suivant:

Soient $M = \overline{M} \subset \mathcal{S}_2$ et $h \in \mathcal{S}_2^M$. Désignons par F l'ensemble des x tels que $h(x) = 0$ ou ∞. Admettons que, B désignant la frontière de M, on a $FB = 0$. Alors, en posant $h|B = f$, $I = \operatorname{Int}(M)$ et $G = I - F$, on a l'égalité

$$(1) \qquad \mu_F f = \mu_F(h|G).$$

Il existe, en effet, un ensemble ouvert $H \supset M$ et une extension $h^* \in \mathcal{S}_2^H$ de h qui ne s'annule en aucun point en dehors de M; car en vertu du th. de Tietze, la fonction f admet sur un entourage de B une extension qui ne s'annule en aucun point.

Or, d'après (3), p. 343 (en remplaçant F^* par B, f par $h^*|H-F$, G par $H-F$ et G^* par I), il vient $\mu_I f = \mu_F(h^*|H-F)$ et d'après XII, 1 (en remplaçant G_0 par G, G par $H-F$, f par $h^*|H-F$ et F_0 par F), on a $\mu_F(h^*|H-F) = \mu_F(h|G)$, d'où l'égalité (1).

XVIII. Évaluation de $\mu_F f$ à l'aide de l'indice, pour $f \in \mathcal{P}^G$ où G est ouvert. Nous établirons d'abord quelques lemmes topologiques.

1. *R étant une région dont le complémentaire $\mathcal{S}_2 - R$ est un continu, il existe une suite de disques $D_1, D_2, \ldots$ telle que*

$$(1) \qquad R = D_1 + D_2 + \ldots \quad \textit{où} \quad \overline{D}_n \subset D_{n+1}.$$

En effet, $\mathcal{S}_2 - R$ étant un continu qui ne coupe pas $\mathcal{S}_2$, on démontre facilement qu'il est le produit d'une suite infinie de disques $E_1, E_2, \ldots$ tels que $E_n \supset \overline{E}_{n+1}$. Il suffit de poser $D_n = \mathcal{S}_2 - \overline{E}_n$.

[21]) Cf. le „théorème d'existence de Kronecker" (cas $n=2$) chez Alexandroff-Hopf, op. cit., pp. 467 et 470.

[22]) Cf. ibidem, p. 472, th. II.

2. *Chaque continu $C \subset \mathcal{S}_2$ est de la forme*

$$(2) \qquad C = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \quad \textit{où} \quad A_{n+1} \subset \operatorname{Int}(A_n),$$

A_n étant un continu élémentaire.

Soit, en effet, $R_1, R_2, \ldots$ la suite des composantes de $\mathcal{S}_2 - C$. Comme $\mathcal{S}_2 - R_m$ est un continu [23]), on a selon le lemme 1:

$$(3) \qquad R_m = D_{m1} + D_{m2} + \ldots \quad \text{où} \quad \overline{D}_{mn} \subset D_{m,n+1},$$

D_{mn} étant un disque pour tout m et n. Posons:

$$(3') \qquad A_n = \mathcal{S}_2 - (D_{1n} + D_{2n} + \ldots + D_{nn}).$$

Il vient en vertu de (3):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_2 - A_n = \sum_{j=1}^{\infty} D_{1j} + \sum_{j=2}^{\infty} D_{2j} + \ldots = R_1 + R_2 + \ldots = \mathcal{S}_2 - C,$$

d'où la première des formules (2). La deuxième résulte de (3') et (3):

$$\overline{\mathcal{S}_2 - A_n} = \overline{D_{1n} + \ldots + D_{nn}} \subset D_{1,n+1} + \ldots + D_{n,n+1} + D_{n+1,n+1} = \mathcal{S}_2 - A_{n+1}.$$

Enfin, A_n est un continu élémentaire, car

$$\overline{D}_{jn} \cdot \overline{D}_{ln} \subset D_{j,n+1} \cdot D_{l,n+1} \subset R_j \cdot R_l = 0 \qquad (j \neq l).$$

3. *Chaque ensemble fermé $F \subset \mathcal{S}_2$ est de la forme*

$$(4) \qquad F = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \quad \textit{où} \quad A_{n+1} \subset \operatorname{Int}(A_n),$$

A_n étant un ensemble élémentaire.

Nous allons représenter F d'abord sous la forme

$$(5) \qquad F = F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \quad \text{où} \quad F_{n+1} \subset \operatorname{Int}(F_n) \quad \text{et} \quad F_n = F_{n1} + \ldots + F_{nk_n},$$

les sommandes étant des continus disjoints (en nombre fini).

On a évidemment $F = G_1 \cdot G_2 \cdot \ldots$ et $\overline{G}_{n+1} \subset G_n$ où G_n est ouvert. Soit $R_{n1}, R_{n2}, \ldots$ la suite des composantes de G_n. En vertu du th. de Borel, il n'existe qu'un nombre fini d'indices j tels que $FR_{nj} \neq 0$. Désignons par G_n^* leur somme et posons $F_n = \overline{G_n^*}$. On constate facilement que les conditions (5) sont réalisées.

Passons à la définition des ensembles A_n. Soit, conformément à 2, $A_{n1}, \ldots, A_{nk_n}$ un système de continus élémentaires disjoints tels que

$$(6) \qquad F_{nj} \subset \operatorname{Int}(A_{nj}) \quad \text{et} \quad A_{nj} \subset \operatorname{Int}(F_{n-1}) \quad (\text{où} \quad F_0 = \mathcal{S}_2).$$

[23]) Cf. *Sur les ensembles connexes* de M. B. Knaster et moi, Fund. Math. **2** (1921), th. X.

Posons $A_n = A_{n1} + \ldots + A_{nk_n}$. On a donc

$$F_n = F_{n1} + \ldots + F_{nk_n} \subset \operatorname{Int}(A_n)$$

et la deuxième partie de (6) entraîne

$$A_{n+1} = A_{n+1,1} + \ldots + A_{n+1,k_{n+1}} \subset \operatorname{Int}(F_n) \subset F_n \subset \operatorname{Int}(A_n).$$

Enfin, $A_{n+1} \subset F_n \subset A_n$, d'où l'égalité (4) en raison de (5).

Les lemmes établis, donnons-nous un ensemble ouvert $G \subset \mathcal{S}_2$, un ensemble F fermé-ouvert dans $\mathcal{S}_2 - G$ et une fonction $f \in \mathcal{P}^G$. Les ensembles F et $\mathcal{S}_2 - G - F$ étant fermés et disjoints, il existe en vertu du lemme 3 un ensemble élémentaire A tel que

$$F \subset \operatorname{Int}(A) \quad \text{et} \quad A \cdot (\mathcal{S}_2 - G - F) = 0, \quad \text{c. à d.} \quad A \subset G + F.$$

En désignant par B la frontière de A, on a donc $B \subset G$, de sorte que la fonction f est définie sur B. Soit $f^* = f|B$. L'ensemble $I = \operatorname{Int}(A)$ étant fermé-ouvert dans $\mathcal{S}_2 - B$, on a selon (3), p. 343 (en remplaçant F^* par B et G^* par I) $\mu_F f = \mu_I f^*$. Rapprochée de XVII, 9, cette égalité donne le théorème suivant:

4. $\mu_F f = \operatorname{car}_A f^*$,

qui ramène la définition de la multiplicité à celle de la caractéristique, donc à celle de l'indice.

§ 6. Transformations homéomorphes.

XIX. Transformations des courbes simples fermées. *Soient: $C \subset \mathcal{E}^2$ une courbe simple fermée, D une composante de $\mathcal{S}_2 - C$ et $f \in \mathcal{P}^C$ une homéomorphie. Si le point 0 appartient à la composante non-bornée de $\mathcal{S}_2 - f(C)$, on a $\mu_D f = 0$. S'il appartient à la composante bornée, on a $\mu_D f = \pm 1$, suivant que le parcours $f\zeta$ de $f(C)$ est positif ou négatif (ζ désignant un parcours positif ou négatif de C suivant que D est borné ou non-borné)*; par conséquent, *si D est borné, on a $f(x) \sim (x-p)^{\pm 1}$ pour $p \in D$.*

Comme $\mu_{\mathcal{S}_2 - \bar{D}} f = -\mu_D f$, il suffit de considérer le cas où D est borné.

En posant $\eta(t) = f\zeta(t)$, la transformation $\eta^0(z)$, où $z \in \mathcal{S}$, est une homéomorphie. Car $2\pi t$ étant l'argument de z, on a selon la définition de η^0 l'identité $\eta^0(z) = \eta(t) = f\zeta(t)$; l'hypothèse $\eta^0(z) = \eta^0(z')$ entraîne donc $f\zeta(t) = f\zeta(t')$, d'où $\zeta(t) = \zeta(t')$, donc $t = t'$ ou $|t - t'| = 1$. D'après XIII,2, η^0 est une homéomorphie.

Si le point 0 appartient à la composante non-bornée de $\mathcal{S}_2 - f(C)$, on a d'après XVI, 2 et XIV, 3: $\mu_D f = \operatorname{ind}_{f\zeta} 0 = 0$. S'il appartient à la composante bornée, il vient (en substituant dans XV,1 $f\zeta$ à ζ et 0 à p) $\operatorname{ind}_{f\zeta} 0 = \pm 1$, suivant que le parcours $f\zeta$ de $f(C)$ est positif ou négatif; on a donc selon XV,2 $\mu_D f = 1$ ou $\mu_D f = -1$ respectivement.

XX. Rapports aux homographies. On a d'abord le théorème suivant:

1. *Théorème. A étant un continu élémentaire, chaque homéomorphie $f \in \mathcal{P}^A$ est homotope à une homographie.*

Soit $\mathcal{S}_2 - A = D_0 + \ldots + D_n$, somme de disques tels que $\bar{D}_j \bar{D}_l = 0$ pour $j \neq l$. Soit $p_j \in D_j$. On a selon V,4 p. 332:

$$f(x) \sim (x - p_0)^{k_0} \cdot \ldots \cdot (x - p_n)^{k_n}, \qquad k_0 + \ldots + k_n = 0.$$

Il s'agit de démontrer que $|k_j| \leqslant 1$ et que la condition $k_j \neq 0$ entraîne $k_j \neq k_l$ pour $j \neq l$. En supposant qu'il n'en est pas ainsi, on peut admettre que soit $|k_0| \geqslant 2$, soit $|k_0 + k_1| \geqslant 2$. Désignons par k le nombre k_0 ou le nombre $k_0 + k_1$, suivant le cas qui se présente; d'une façon analogue, soit $G = D_0$ ou $G = D_0 + D_1$; enfin, soit $H = \mathcal{S}_2 - A - G$.

Il existe évidemment une courbe simple fermée $C \subset \mathcal{E}^2$ qui sépare G de H. On a donc $C \subset A$ et, en désignant par D la composante de $\mathcal{S}_2 - C$ qui contient G, il vient

$$\mu_G f = \mu_D(f|C) \quad \text{et} \quad |\mu_D(f|C)| \leqslant 1$$

selon XIX. D'autre part (cf. IX,2, p. 341), $\mu_G f = k$ et, en vertu de la définition de k, $|k| \geqslant 2$, d'où la contradiction demandée.

Un théorème analogue concerne les régions. Nous allons en baser la démonstration sur deux énoncés qui suivent:

2. *Chaque région $R \subset \mathcal{S}_2$ est de la forme*

(1) $$R = A_1 + A_2 + \ldots \quad \textit{où} \quad A_n \subset \operatorname{Int}(A_{n+1}),$$

A_n étant un continu élémentaire.

En effet, on démontre facilement qu'il existe une suite de continus $A_1^*, A_2^*, \ldots$ satisfaisant à la condition (1). D'autre part en vertu de XVIII, 2, on peut faire correspondre à chaque A_n^* un continu élémentaire C_n tel que $A_n^* \subset \operatorname{Int}(C_n)$ et $C_n \subset R$. Or, définissons les continus élémentaires A_n par induction: soit $A_1 = C_1$;

$A_n \subset R$ supposé défini, soit $k_n > n$ un indice tel que $A_n \subset A^*_{k_n}$ (l'existence de k_n résulte du th. de Borel) et posons $A_{n+1} = C_{k_n}$. On a donc $A_n \subset A^*_{k_n} \subset \mathrm{Int}(C_{k_n}) = \mathrm{Int}(A_{n+1})$.

3. *Soient $G \subset \mathcal{S}_2$ un ensemble ouvert et $f \in \mathcal{P}^G$. Si la multiplicité $\mu_F f$ n'admet (pour F variable) que trois valeurs k, 0 et $-k$* [24]*), on a*

$$f(x) \sim \left(\frac{x-p}{x-q}\right)^k. \tag{2}$$

Désignons par $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_0$ et $\boldsymbol{F}_{-1}$ les trois familles d'ensembles F pour lesquels $\mu_F f$ est égal respectivement à k, 0 et $-k$.

Nous allons montrer d'abord qu'étant donné un système d'ensembles $F_1, \dots, F_n$ appartenant à la famille $\boldsymbol{F}_1$, leur produit $F_1 \cdot \ldots \cdot F_n$ lui appartient aussi. Procédons par induction. Notre énoncé étant évident pour $n = 1$, admettons qu'il soit vrai pour un indice $n (\geqslant 1)$. Soient $F_1 \in \boldsymbol{F}_1, \dots, F_{n+1} \in \boldsymbol{F}_1$. Posons $P = F_1 \cdot \ldots \cdot F_{n+1}$ et considérons la décomposition $F_j = P + (F_j - P)$ en deux ensembles disjoints et fermés-ouverts dans $\mathcal{S}_2 - G$. Il vient (selon IX,2, p. 341):

$$k = \mu_{F_j} f = \mu_P f + \mu_{F_j - P} f. \tag{3}$$

Donc, en supposant que $\mu_P f = 0$, on aurait $\mu_{F_j - P} f = k$ pour chaque j; d'où $\mu_{(F_1 - P) + (F_2 - P)} f = 2k$, contrairement à l'hypothèse.

En supposant que $\mu_P f = -k$, on tire de (3) $\mu_{F_1 - P} f = 2k$. Le seul cas possible est donc celui où $\mu_P f = k$, c. à d. où $P \in \boldsymbol{F}_1$.

Ceci établi, on en déduit l'existence d'un point p qui appartient à tous les ensembles-éléments F de $\boldsymbol{F}_1$. D'une façon analogue, il existe un q qui appartient à tous les ensembles-éléments de $\boldsymbol{F}_{-1}$.

Le complémentaire $\mathcal{S}_2 - G - F$ d'un élément de $\boldsymbol{F}_{\pm 1}$ appartient à $\boldsymbol{F}_{\mp 1}$ (selon X,1) et il en résulte que q n'appartient à aucun élément de $\boldsymbol{F}_1$, ni p à aucun élément de $\boldsymbol{F}_{-1}$.

Inversement, si $p \in F$ et $q \in \mathcal{S}_2 - F$, on a $F \in \boldsymbol{F}_1$. Soit, en effet, $F_1 \in \boldsymbol{F}_1$. Donc $p \in F_1$ et $q \in \mathcal{S}_2 - F_1$, d'où $(F_1 - F) \in \boldsymbol{F}_0$ et $(F - F_1) \in \boldsymbol{F}_0$. Comme $F_1 = (F_1 - F) + FF_1$, il vient $FF_1 \in \boldsymbol{F}_1$, d'où $F \in \boldsymbol{F}_1$ en raison de l'identité $F = (F - F_1) + FF_1$.

[24]) Dans la démonstration du htéorème 4, qui suit, on pose $k = 1$.

On parvient ainsi à la conclusion que $\boldsymbol{F}_1$ est la famille des ensembles F (fermés-ouverts dans $\mathcal{S}_2 - G$) tels que $p \in F$ et $q \in \mathcal{S}_2 - F$; de même, $\boldsymbol{F}_{-1}$ est celle des F tels que $q \in F$ et $p \in \mathcal{S}_2 - F$; enfin, $\boldsymbol{F}_0$ est celle des F tels qu'on a soit $p \in F$ et $q \in F$, soit $p \in \mathcal{S}_2 - F$ et $q \in \mathcal{S}_2 - F$.

En posant $r(x) = \left(\frac{x-p}{x-q}\right)^k$, on en conclut aussitôt que $\mu_F r$ est égal à k, 0 ou $-k$, suivant que F appartient à $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_0$ ou $\boldsymbol{F}_{-1}$. On a donc $\mu_F f = \mu_F r$ quel que soit F fermé-ouvert dans $\mathcal{S}_2 - G$. Cela implique en vertu de X,5, p. 344, que $f \sim r$.

4. *Théorème. $R \subset \mathcal{S}_2$ étant une région, chaque homéomorphie $f \in \mathcal{P}^R$ est homotope à une homographie.*

En vertu de l'énoncé 3, il suffit de prouver que $|\mu_F f| \leqslant 1$ quel que soit F fermé-ouvert dans $\mathcal{S}_2 - R$. Or, F et $\mathcal{S}_2 - R - F$ étant fermés et disjoints, il existe un F^* fermé qui les sépare. En raison de l'énoncé 2, on peut admettre que F^* est un continu élémentaire (puisque $F^* \subset A_n$ pour n suffisamment grand). Le complémentaire de F^* étant formé de deux ensembles ouverts disjoints dont l'un contient F et l'autre $\mathcal{S}_2 - R - F$, désignons par G^* le premier de ces deux ensembles. Selon X(3), p. 343, on a $\mu_F f = \mu_{G^*} f^*$ où $f^* = f|F^*$. Or, f^* étant d'après le th. 1 homotope à une homographie et la multiplicité relative à une homographie ayant évidemment la valeur absolue $\leqslant 1$, il vient en raison de X,4 $|\mu_{G^*} f^*| \leqslant 1$, d'où $|\mu_F f| \leqslant 1$.

XXI. Homéomorphies positives et négatives.

1. *$G \subset \mathcal{S}_2$ étant un ensemble ouvert et $g \in (\mathcal{E}^2)^G$ une homéomorphie, on a*

$$\mu_p[g(x) - g(p)] = \pm 1 \quad \textit{quel que soit } p \in G \text{ [25])}. \tag{1}$$

De plus, si G est une région, la valeur de $\mu_p[g(x) - g(p)]$ est constante [26]).

Soit, en effet, p un point donné de G. Posons $h(x) = g(x) - g(p)$. La fonction h ne s'annule qu'au point p. En posant $H = G - p$ et $h^* = h|H$, on a donc $h^* \in \mathcal{P}^H$ et p est un point isolé de $\mathcal{S}_2 - H$. Soient: D un cercle (ouvert) de centre p et C sa circonférence. Admettons que $D + C \subset G$. La fonction h étant une homéomorphie,

[25]) Bien entendu, la variabilité de x est restreinte dans cette formule à $G - p$.
[26]) Voir Alexandroff-Hopf, op. cit., p. 475.

l'ensemble $h(D)$ est borné, $h(C)$ est une courbe simple fermée et le disque $h(D)$ est (en vertu de l'invariance de la notion de point intérieur) la composante bornée de $\mathcal{S}_2 - h(C)$. Comme $0 = h(p) \in h(D)$, on a selon XIX, 1 $\mu_D(h|C) = \pm 1$, d'où l'égalité (1) (cf. X (3), p. 343).

Admettons à présent que G est une région. Soient $p_0 \in G$, $p_1 \in G$, D un disque tel que $p_0, p_1 \in D$, $\bar{D} \subset G$ et C la frontière de D. Posons $h_j(x) = g(x) - g(p_j)$ pour $j = 0,1$. Il vient, comme auparavant, $\mu_{p_j} h_j = \mu_D(h_j|C)$. Comme $g(p_0)$ et $g(p_1)$ appartiennent à $g(D)$, qui est une composante de $\mathcal{S}_2 - g(C)$, on a d'après p. 352,1 $g(x) - g(p_0) \sim g(x) - g(p_1)$ sur C, c. à d. $(h_0|C) \sim (h_1|C)$, d'où (cf. p. 341, 4) $\mu_D(h_0|C) = \mu_D(h_1|C)$, donc $\mu_{p_0} h_0 = \mu_{p_1} h_1$.

Définition. $R \subset \mathcal{S}_2$ étant une région et g une transformation homéomorphe de R en sous-ensemble de $\mathcal{S}_2$, g est dite une *homéomorphie positive* si l'on a $\mu_p[g(x) - g(p)] = 1$ pour chaque point p tel que $g(p) \neq \infty$.

Si l'on a $\mu_p[g(x) - g(p)] = -1$, l'homéomorphie g est dite *négative*.

L'ensemble R privé d'un seul point étant une région, *chaque transformation homéomorphe* $g \in \mathcal{S}_2^R$ *est* — en vertu du th. 1, qui précède — *une homéomorphie soit positive, soit négative.*

On voit aussi que, pour démontrer que l'homéomorphie g est positive ou qu'elle est négative, il suffit de connaître la valeur de $\mu_p[g(x) - g(p)]$ pour un seul point p (tel que $g(p) \neq \infty$).

Il en résulte en vertu du th. XVI, 3, p. 355, et p. 351 (4) que

2. *D étant un cercle (ouvert borné) de centre p tel que $\bar{D} \subset G$ et que* $\mathrm{ind}_{g\zeta}\, g(p) = 1$ *(où ζ est un parcours positif du contour de D), l'homéomorphie g est positive.*

Les homéomorphies positives sont donc bien les transformations qui n'altèrent pas *l'orientation* de la région considérée.

Envisageons à présent quelques cas particuliers.

3. *$R \subset \mathcal{E}^2$ étant une région telle que $\mathcal{E}^2 - R$ est connexe et $g \in (\mathcal{E}^2)^R$ une homéomorphie, la condition nécessaire et suffisante pour que g soit une homéomorphie positive est que l'on ait pour chaque $p \in R$*

$$g(x) - g(p) \sim x - p \quad \textit{sur} \quad R - p. \tag{2}$$

On a, en effet, selon p. 334, 2 (en posant $p_0 = \infty$) la relation $g(x) - g(p) \sim (x-p)^k$, et comme $\mu_p[g(x) - g(p)] = k$, il vient $k = \pm 1$, suivant que l'homéomorphie est positive ou négative.

On démontre d'une façon analogue que

4. *Une transformation homéomorphe de $\mathcal{S}_2$ en $\mathcal{S}_2$ est positive dans le cas et seulement dans le cas où l'on a*

$$g(x) - g(p) \sim \frac{x-p}{x-p_0} \quad \textit{sur} \quad \mathcal{S}_2 - p - p_0, \quad \textit{où} \quad g(p_0) = \infty.$$

En particulier, *si $p_0 = \infty$, on a la relation* (2).

Il en résulte que *toute homographie est une homéomorphie positive.* Car

$$\frac{ax-b}{cx-d} - \frac{ap-b}{cp-d} = \lambda \cdot \frac{x-p}{x-p_0}, \quad \text{où} \quad p_0 = \frac{d}{c}$$

et où λ est une constante (on suppose que $ad - bc \neq 0$).

Comme exemple d'une *homéomorphie négative* de $\mathcal{S}_2$, considérons la fonction $g(\alpha + i\beta) = \alpha - i\beta$, c. à d. $g(x) = |x|^2 : x$. On constate aussitôt que, pour $\zeta(t) = e^{2\pi i t}$, on a $\mathrm{ind}_{g\zeta}\, 0 = -1$, d'où la conclusion demandée en raison du th. 2.

Le th. 2 implique aussitôt le suivant:

5. *Etant données deux régions $R_1 \subset R$ et une homéomorphie $g \in \mathcal{S}_2^R$, si la transformation partielle $g|R_1$ est une homéomorphie positive, la transformation g l'est également.*

6. *La transformation inverse à une homéomorphie positive est une homéomorphie positive.*

Plus précisément: *soient R une région et $y = g(x)$ une homéomorphie positive transformant R en Q; alors, la transformation inverse $x = h(y)$ est une homéomorphie positive.*

Soit, en effet, D un cercle (ouvert borné) de centre $p \neq 0$ tel que $\bar{D} \subset R$ et $\infty \in \mathcal{S}_2 - g(D)$. Posons $q = g(p)$ et $H = g(D)$. On a par hypothèse $\mu_p[g(x) - g(p)] = 1$. La même égalité a lieu en restreignant la variabilité de x à D (cf. th. 5). Donc, selon th. 3, on a

$$g(x) - g(p) \sim x - p$$

sur $D - p$, c. à d. $g(x) - g(p) = (x-p)e^{u(x)}$.

En substituant $h(y)$ à x, il vient $y - q \sim h(y) - h(q)$ sur $H - q$, donc $\mu_q[h(y) - h(q)] = 1$ en vertu du th. 3. D'où la conclusion demandée.

7. *Soient: $G \subset \mathcal{S}_2$ un ensemble ouvert ou fermé, F un ensemble fermé-ouvert dans $\mathcal{S}_2 - G$ et $f \in \mathfrak{L}^G$. La multiplicité $\mu_F f$ est invariante par rapport aux homéomorphies g positives transformant $\mathcal{S}_2$ en $\mathcal{S}_2$*; c. à d. que l'on a

$$\mu_{g^{-1}(F)} fg(x) = \mu_F f(y). \tag{3}$$

En particulier, *la multiplicité est un invariant de l'homographie.*

Considérons d'abord le cas où $f(y)$ est une fonction rationnelle:

$$f(y) = \lambda (y - q_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (y - q_n)^{k_n} \quad \text{où} \quad k_1 + \ldots + k_n = 0.$$

En désignant par $p_0, p_1, \ldots, p_n$ les points tels que

$$g(p_0) = \infty, \; g(p_1) = q_1, \; g(p_2) = q_2, \; \ldots, \; g(p_n) = q_n,$$

il vient en vertu du th. 4:

$$fg(x) = \lambda [g(x) - g(p_1)]^{k_1} \cdot \ldots \cdot [g(x) - g(p_n)]^{k_n} \sim$$
$$\sim (x - p_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x - p_n)^{k_n} \cdot (x - p_0)^{-(k_1 + \ldots + k_n)} = (x - p_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x - p_n)^{k_n},$$

puisque $k_1 + \ldots + k_n = 0$.

Soit $q_{j_1}, \ldots, q_{j_m}$ le système des points q_j qui appartiennent à F. On a donc $\mu_F f = k_{j_1} + \ldots + k_{j_m}$ d'après la définition de la multiplicité. Or, les conditions $q_j \in F$ et $p_j \in g^{-1}(F)$ étant équivalentes, il vient

$$\mu_{g^{-1}(F)} [(x - p_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x - p_n)^{k_n}] = k_{j_1} + \ldots + k_{j_n}.$$

Comme $\mu_{g^{-1}(F)} fg(x) = \mu_{g^{-1}(F)} [(x - p_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x - p_n)^{k_n}]$, on en déduit l'égalité (3).

Le cas où f est une fonction rationnelle étant établi, passons au cas général. En supposant que G est fermé, il existe selon p. 332, 4 une fonction rationnelle $r(y)$ telle que $f(y) \sim r(y)$, d'où $fg(x) \sim rg(x)$. Par conséquent (cf. p. 341, IX, 4):

$$\mu_F f(y) = \mu_F r(y) \quad \text{et} \quad \mu_{g^{-1}(F)} fg(x) = \mu_{g^{-1}(F)} rg(x),$$

de sorte que l'on est ramené au cas particulier qui vient d'être envisagé.

Enfin, si G est ouvert, il existe un ensemble fermé F^* qui sépare les ensembles F et $\mathcal{S}_2 - G - F$. Son complémentaire se compose donc de deux ensembles ouverts disjoints dont l'un — désignons-le par G^* — contient F et l'autre contient $\mathcal{S}_2 - G - F$. Par conséquent, l'ensemble $g^{-1}(G^*)$ contient $g^{-1}(F)$ et il est fermé-ouvert dans $\mathcal{S}_2 - g^{-1}(F^*)$. D'après (3), p. 343:

$$\mu_F f = \mu_{G^*}(f | F^*) \quad \text{et} \quad \mu_{g^{-1}(F)} fg = \mu_{g^{-1}(G^*)} [fg | g^{-1}(F^*)].$$

Les membres droits de ces égalités étant — comme nous venons de montrer — égaux, on parvient à la formule (3).

De là, il résulte que

8. *L'indice est un invariant des homéomorphies* **positives** *g transformant $\mathcal{E}^2$ en $\mathcal{E}^2$*; c. à d. que $\operatorname{ind}_{g\zeta} g(p) = \operatorname{ind}_\zeta p$ [27]).

En effet, d'après XVI, 1, p. 355:

$$\operatorname{ind}_\zeta p = \mu_Q[\zeta^0(x) - p] \quad \text{et} \quad \operatorname{ind}_{g\zeta} g(p) = \mu_Q[g\zeta^0(x) - g(p)]. \tag{4}$$

Par hypothèse (cf. th. 3), $g(y) - g(p) \sim y - p$ sur $\mathcal{E}^2 - p$. Par conséquent, $g\zeta^0(x) - g(p) \sim \zeta^0(x) - p$ sur $\mathcal{S}$ (la courbe $\zeta^0(\mathcal{S})$ étant située dans $\mathcal{E}^2 - p$). Cette homotopie implique en vertu du th. IX, 4 que les membres droits des égalités (4) sont identiques; d'où la conclusion demandée.

Les invariants des homéomorphies positives (de $\mathcal{S}_2$ ou de $\mathcal{E}^2$) peuvent être nommés *invariants de la Topologie orientée.* Tels sont, comme nous venons de voir, la multiplicité d'un ensemble, l'indice d'un point.

Par suite, les valeurs absolues de ces invariants sont des invariants des homéomorphies arbitraires; elles sont donc des notions topologiques (bien que leurs définitions fassent usage des notions non topologiques).

Tel est aussi l'accroissement du logarithme. On a, en effet, selon XIII (3), p. 351 (l'homéomorphie étant positive ou négative):

$$\Delta_{g\zeta} fg^{-1} = \operatorname{ind}_{fg^{-1}g\zeta} 0 = \operatorname{ind}_{f\zeta} 0 = \Delta_\zeta f.$$

---

[27]) Voir Alexandroff-Hopf, op. cit., p. 476.