Remarque sur l'équation fonctionelle $f(x+y)=f(x)+f(y)$

Par

A. Alexiewicz et W. Orlicz (Poznań).

Le théorème suivant est dû à M. Fréchet[1]:

Toute fonction mesurable satisfaisant à l'équation

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \tag{1}$$

est continue (donc d'après Cauchy $f(x)=Ax$).

On connait plusieurs démonstrations de ce théorème[2]). Nous allons en donner encore deux.

D'abord, on peut déduire aisément ce théorème de deux théorèmes devenus déjà classiques dans la Théorie des fonctions réelles.

Soit, en effet, $f(x)$ une solution mesurable de (1); d'après un théorème de M. Denjoy[3]), elle est approximativement continue presque partout, donc dans un point. Faisant une translation convenable, on s'assure d'après (1) qu'elle est approximativement continue partout, donc, d'après un autre théorème de M. Denjoy[4]), elle est de première classe de Baire, donc continue dans un point, d'où la conclusion.

Voici une démonstration plus élémentaire.

Soit $f(x)$ une solution mesurable de (1). Soit $x\neq 0$. Posons:

$$\varphi(t)=f(t)-\frac{f(x)}{x}t, \quad \psi(t)=1/[1+|\varphi(t)|].$$

[1]) M. Fréchet, Enseignement Mathématique **15** (1923), p. 390—393.

[2]) W. Sierpiński, Fund. Math. **1** (1920), p. 116—122; S. Banach, ibidem, p. 123—124; M. Kac, Commentarii Math. Helvetici **9** (1936/37), p. 170—171.

[3]) A. Denjoy, Bull. de la Soc. Math. de France **43** (1915), p. 161—248. C. R. Ac. Sc. Paris **162** (1916), pp. 377—380 et 868—870.

[4]) ibidem.

On a $\varphi(t+x)=\varphi(t)+\varphi(x)=\varphi(t)$, puisque $\varphi(x)=0$, d'où il résulte que $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ sont de période x. Donc:

$$\int_0^x dt/[1+|\varphi(t)|]=\int_0^x \psi(t)dt=\int_0^x \psi(2t)dt=\int_0^x dt/[1+2|\varphi(t)|],$$

$$\int_0^x \frac{|\varphi(t)|\,dt}{(1+2|\varphi(t)|)\,(1+|\varphi(t)|)}=0.$$

Il s'en suit que $\varphi(t)=0$ presque partout, c'est à dire que $f(t)=\frac{f(x)}{x}t$ pour presque tout t; en particulier, pour $x=1$, il vient $f(t)=f(1)t$ pour presque tout t. Il existe donc pour tout $x\neq 0$ un $t_0\neq 0$ tel que $f(t_0)=\frac{f(x)}{x}t_0$ et $f(t_0)=f(1)t_0$, d'où $f(x)=f(1)x$. Evidemment, cette égalité a lieu aussi pour $x=0$.