Sur un problème de P. Alexandroff.

Par

Bronisław Knaster (Warszawa).

Cette Note contient la solution d'un problème que je dois à M. Alexandroff: il s'agit de *caractériser par des propriétés topologiques intrinsèques les espaces qui sont homéomorphes aux espaces connexes sans un point.* Le terme *espace* est entendu ici, et le sera constamment dans la suite, au sens d'espace métrique séparable ou — ce qui revient au même[1]) — au sens d'espace topologique normal à base dénombrable d'ensembles ouverts; on peut d'ailleurs, conformément au théorème de Urysohn, le regarder toujours comme placé dans le cube fondamental de Hilbert.

Le problème en question n'est pas sans intérêt pour plusieurs raisons.

D'abord, parce que — à côté des ensembles fort simples qui sont homéomorphes aux espaces connexes sans un point (tels que, par exemple, l'ensemble des points d'une famille arbitraire de droites) — il y en a, même sur le plan, qui sont *dispersés* (c'est à dire: dont chaque sous-ensemble connexe est un point) et qui pourtant deviennent connexes par l'adjonction d'un seul point convenablement choisi[2]). Or, une caractérisation intrinsèque de ces ensembles promet de fournir quelques renseignements sur la structure des espaces dispersés, qui n'est à l'heure actuelle que bien imparfaitement connue.

D'autre part, une telle caractérisation fait partie de l'étude de la notion générale de connexité, qui est fondamentale en Topologie. En appelant *biconnexe* tout ensemble connexe qui n'est pas somme

[1]) en vertu du théorème de P. Urysohn, *Zum Metrisationsproblem*, Math. Annalen **94** (1925), p. 310; voir aussi p. ex. C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografje Matematyczne 1933, p. 105.

[2]) B. Knaster et C. Kuratowski, *Sur les ensembles connexes*, Fundam. Math. **2** (1921), p. 241-244 (exemple α).

de deux ensembles connexes (non vides) sans points communs[3]), on montre que tout ensemble connexe C admettant un point $p \in C$ tel que $C-(p)$ est dispersé, est nécessairement biconnexe[4]). Un ensemble biconnexe ne contient tout au plus qu'un seul point singulier p de ce genre[5]), mais il peut n'en contenir aucun[6]). Parmi les premiers, il y a qui sont des coupures des espaces euclidiens de dimension $n>1$ arbitraire[7]) et, en conséquence, qui sont eux-mêmes de dimension positive aussi élevée qu'on le veut (même en chacun de leurs points); d'ailleurs, il en est alors de-même de leurs sous-ensembles dispersés de type $C-(p)$. Ainsi, le problème de M. Alexandroff embrasse en particulier l'un des cas les plus remarquables de la structure des espaces connexes. C'est précisément ce cas qu'il avait en vue en proposant son problème.

Enfin, étant donné un espace E, on peut lui ajouter — comme on sait — des points convenablement définis, de façon à en obtenir un espace complet $\widetilde{E}$[8]), et même un espace compact $\overline{E}$, tel que $E \subset \widetilde{E} \subset \overline{E}$ et que, en outre, la dimension de $\overline{E}$ ne dépasse pas celle de E[9]). L'importance de ces théorèmes en Topologie est notoire. Or, le problème de M. Alexandroff permet de ranger à côté du complétement et de la compactification des espaces, qui sont toujours possibles, leur connectification dans les cas où ces espaces en sont susceptibles grâce à une propriété caractéristique de leur structure qu'il s'agit de déterminer (l'identité de la dimension étant ici assurée par le fait que le point à ajouter est unique).

Cette propriété caractéristique porte le numéro V dans l'énoncé du théorème, qui renferme la solution du problème.

Et encore[10]): les espaces à caractériser sont de beaucoup plus généraux qu'ils ne semblent. Je montre, en effet, qu'ils coïncident avec les images homéomorphes des sous-ensembles ouverts tout à fait arbitraires d'espaces connexes (propriété IV).

[3]) ibidem, p. 214.

[4]) ibidem, p. 215 (Théorème XI) et p. 244.

[5]) J. R. Kline, Fundam. Math. **3** (1922), p. 238.

[6]) E. W. Miller, Fundam. Math. **29** (1937), p. 123-133.

[7]) B. Knaster, *Sur les coupures biconnexes des espaces euclidiens de dimension $n>1$ arbitraire,* Recueil Math. de Moscou 1945 (à paraître). Ces exemples sont effectifs.

[8]) Voir p. ex. C. Kuratowski, op. cit., p. 200-202.

[9]) W. Hurewicz, Monatshefte für Math. und Phys. **37** (1930), p. 199; cf. aussi la généralistion due à C. Kuratowski, Fundam. Math. **28** (1937), p. 336.

[10]) Remarque de M. E. Szpilrajn-Marczewski.

Définition. E étant un espace, appelons *diffus dans* E tout ensemble X qui a des points communs avec les deux sommandes de chaque décomposition de E en deux ensembles séparés non vides, c'est à dire pour lequel les conditions

$$E = A + B, \quad \bar{A}B = 0 = A\bar{B} \quad \text{et} \quad A \neq 0 \neq B$$

entraînent l'inégalité

$$XA \neq 0.$$

Comme exprimée uniquement par des notions topologiques, celle d'ensemble diffus est un invariant des transformations homéomorphes de l'espace E [11]).

Théorème. *Les propriétés suivantes d'un espace (non vide) sont équivalentes*:

I. *homéomorphie à un espace connexe sans un point*,

II. *homéomorphie à un espace connexe sans un ensemble fini de points*,

III. *homéomorphie à un vrai sous-ensemble ouvert et dense d'un espace connexe*,

IV. *homéomorphie à un vrai sous-ensemble ouvert d'un espace connexe*,

V. *existence dans l'espace d'une suite descendante d'ensembles fermés et diffus dans lui dont la partie commune est vide.*

Démonstration. L'implication I→II est évidente, l'ensemble composé d'un point étant fini. Il en est de-même de l'implication II→III, tout ensemble fini F étant fermé et non-dense dans chaque espace connexe C tel que $C-F$ n'est pas vide; par suite, $C-F$ est ouvert et dense dans C. L'implication III→IV est triviale.

Pour démontrer l'implication IV→V, on peut admettre (par suite de l'invariance des notions topologiques, qui y interviennent, envers l'homéomorphie) que l'espace donné E est lui-même un vrai sous-ensemble ouvert d'un espace connexe C. Posons $F = C - E$. L'ensemble F est donc fermé (dans C) et on a

$$EF = 0. \tag{1}$$

Soit S_i la sphère fermée de l'espace C, de rayon $1/i$ et de „centre" F (c'est à dire: l'ensemble des points de C dont chacun est à la distance $\leqslant 1/i$ d'au moins un point de F). L'ensemble F étant fermé dans C, il en est de-même de S_i et on a

$$F = \prod_{i=1}^{\infty} S_i. \tag{2}$$

D'autre part, les S_i formant par définition une suite descendante de sous-ensembles fermés de C, les ensembles

$$F_i = S_i E \tag{3}$$

forment une suite descendante de sous-ensembles fermés de $E \subset C$ et on a en vertu de (3) $F_i = \prod_i S_i E = E \prod_i S_i$, d'où selon (2) et (1) $\prod_i F_i = EF = 0$, c'est à dire que la partie commune des F_i est vide.

Enfin, les F_i sont diffus dans E. Supposons, en effet, que $E = A + B$ soit une décomposition de E en ensembles séparés telle qu'on ait

$$F_i A = 0 \tag{4}$$

pour une valeur de i, donc aussi pour ses valeurs suivantes, puisque $F_i \supset F_{i+1} \supset \ldots$ Comme $A \subset E$, on a $A = EA$, d'où, en tenant compte de (3) et (4), $S_i A = S_i E A = F_i A = 0$, de sorte que l'ensemble A se trouve situé dans C à la distance $\geqslant 1/i$ du „centre" F de la sphère S_i et, par suite, est séparé de F. Or, comme séparé de B et de F, l'ensemble A l'est de $B + F$. En conséquence, l'identité $C = E + F = (A + B) + F = A + (B + F)$ représenterait une décomposition de C en deux ensembles séparés, contrairement à la connexité de C. L'implication IV→V se trouve ainsi établie.

Reste à montrer que V→I. Soit $F_1, F_2, \ldots$ une suite descendante de sous-ensembles de E, fermés dans E, diffus dans cet espace (donc non vides, puisque $E \neq 0$ par hypothèse) et dont la partie commune est vide:

$$\prod_i F_i = 0. \tag{5}$$

Leurs fermetures $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots$ (dans le cube de Hilbert) forment donc une suite descendante de sous-ensembles compacts (non vides) de E, d'où en vertu du théorème de Cantor [12])

$$F = \prod_i \bar{F}_i \neq 0. \tag{6}$$

[11]) Cf. C. Kuratowski, op. cit., p. 13 (IV).

[12]) Voir p. ex. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 230 (I).

Tout F étant fermé dans E, on a $F_i = \overline{F}_i E$, d'où selon (6) $EF = E \prod_i \overline{F}_i = \prod_i \overline{F}_i E = \prod_i F_i$. Il en résulte en vertu de (5) que $EF = 0$, égalité qui a été désignée par (1).

Soit $E = A + B$ une décomposition quelconque de E en deux ensembles séparés. Tout F_i étant diffus dans E, on a $F_i A \neq 0$, d'où $F_i \overline{A} \neq 0$. En appliquant donc le théorème de Cantor à la suite descendante d'ensembles compacts non vides $\overline{F}_1 \overline{A}$, $\overline{F}_2 \overline{A}, \ldots$ contenus dans $\overline{E}$, il vient, comme auparavant, $\prod_i \overline{F}_i \overline{A} \neq 0$, c'est à dire d'après (6)

$$F\overline{A} \neq 0. \tag{7}$$

Enfin, comme compact par définition, l'ensemble F est en particulier fermé dans $E+F$; l'ensemble E y est donc ouvert en vertu de (1).

Ceci établi, soit C l'espace qui s'obtient de $E+F$ par l'*identification*[13]) des points de F, c'est à dire l'espace ayant pour éléments les valeurs d'une fonction continue arbitraire f, définie sur $E+F$, transformant E par homéomorphie et constante sur F (on obtient une telle fonction, en posant par exemple $f(x) = x$ lorsque $x \in E$ et $\lim_{n=\infty} f(x_n) = f(F) = \text{const.}$ lorsque $\lim_{n=\infty} \varrho(x_n, F) = 0$ et seulement dans ce cas). On a ainsi par définition:

$$C = f(E+F) = f(E) + f(F). \tag{8}$$

Posons $q = f(F)$. L'image homéomorphe $f(E)$ de E coïncide donc avec l'espace C sans un point, à savoir sans le point q.

Or, l'espace C est connexe. En effet, supposons qu'il existe une décomposition

$$C = P + Q \tag{9}$$

de C en deux ensembles séparés et désignons-en par Q celui des deux qui contient le point q. Par conséquent:

$$F = f^{-1} f(F) = f^{-1}(q) \subset f^{-1}(Q). \tag{10}$$

En posant

$$A = f^{-1}(P) \quad \text{et} \quad B = f^{-1}(Q), \tag{11}$$

on aurait donc en vertu de (10)

$$F \subset B \tag{12}$$

[13]) Voir p. ex. P. Alexandroff und H. Hopf, *Topologie I*, Berlin 1935, p. 64 (3).

et, d'après (8) et (9), $E+F = f^{-1}(C) = f^{-1}(P+Q) = f^{-1}(P) + f^{-1}(Q) = A+B$. Les ensembles P et Q étant séparés, il en est de-même en vertu de (11) des ensembles A et B, puisque la fonction f est continue. On aurait donc en particulier $\overline{A}B = 0$. Il en résulte en vertu de (12) que $\overline{A}F = 0$, contrairement à (7), ce qui achève la démonstration du théorème.

Il est à remarquer, pour terminer, que l'on peut évidemment interposer dans l'énoncé du théorème entre les propriétés I et IV non seulement les propriétés II et III, mais d'une façon générale n'importe quelle propriété de la forme: *homéomorphie à un espace connexe C diminué d'un ensemble fermé $F \in K$*, pourvu que la classe K contienne par définition celle des sous-ensembles de C à un point.

Mai 1945.