Les suites infinies $n_1, n_2, \dots$ et $E_1, E_2, \dots$ étant ainsi définies par l'induction, on voit sans peine que $n_1 < n_2 < \dots$ et que $n_{p+k} \in E_{p+k-1} \subset E_p$, donc $A_{n_p} A_{n_{p+k}} \neq 0$ pour p et k naturels.

Comme $(A_{n_p} \times B_{n_p})(A_{n_{p+k}} \times B_{n_{p+k}}) = 0$ (puisque $A_{n_p} \times B_{n_p}$ et $A_{n_{p+k}} \times B_{n_{p+k}}$ sont des ensembles distincts de la famille $\mathscr{F}_2$), on a donc $B_{n_p} B_{n_{p+k}} = 0$, ce qui est impossible (pour p et k naturels), la famille $\mathscr{B}$ jouissant de la propriété S_1.

2° Le cas 1° n'a pas lieu. Il existe alors une suite infinie $m_1, m_2, \dots$ de nombres naturels telle que, pour tout k naturel, il existe un nombre naturel $q_k > k$ satisfaisant à l'égalité $A_{m_k} A_{m_l} = 0$ pour $l \geqslant q_k$. En posant $s_1 = 1$ et $s_k = q_{s_{k-1}}$ pour $k > 1$, nous aurons $s_1 < s_2 < \dots$ En posant ensuite $n_k = m_{s_k}$ pour $k = 1, 2, \dots$, nous aurons $n_1 < n_2 < \dots$ et $n_{k+1} = m_{s_{k+1}} = m_{q_{s_k}}$, donc $A_{n_k} A_{n_{k+1}} = A_{m_{s_k}} A_{m_{q_{s_k}}} = 0$ pour $k = 1, 2, \dots$, ce qui est impossible, la famille $\mathscr{A}$ jouissant de la propriété S_1. Le théorème est ainsi démontré.

Varsovie, le 24. XII. 1941.

Sur deux propriétés des classes d'ensembles.

Par

Edward Szpilrajn-Marczewski (Wrocław).

1. Problèmes et résultats. $\boldsymbol{K}$ étant une classe arbitraire d'ensembles, considérons les propriétés suivantes de $\boldsymbol{K}$:

Propriété (s). Chaque sous-classe de $\boldsymbol{K}$ d'ensembles disjoints deux à deux est au plus dénombrable.

Propriété (k). Chaque sous-classe indénombrable de $\boldsymbol{K}$ contient une sous-classe indénombrable d'ensembles ayant des points communs deux à deux.

Ces propriétés se présentent p. ex. dans l'étude du problème bien connu de Souslin et dans diverses recherches de la théorie des ensembles, de la topologie etc [1]).

Évidemment:

(i) Chaque classe jouissant de la propriété (k) jouit de la propriété (s).

D'autre part, on démontre aisément à l'aide d'une relation définie par M. W. Sierpiński (voir plus loin n° 4) que:

(ii) Il existe une classe d'ensembles jouissant de la propriété (s), mais pas de la propriété (k).

Le but de cette Note est d'étudier les propriétés (s) et (k) au point de vue de la *multiplication cartésienne*. Quant à la propriété (k), le problème ne présente aucune difficulté (voir 6(i) et 6(iii)); quant à la propriété (s), M. Sierpiński a démontré tout récemment [2]) que:

[1]) Voir p. ex. B. Knaster, *Sur une propriété caractéristique de l'ensemble des nombres réels*, Recueil Math. Moscou (à paraître), et ma Note *Séparabilité et multiplication cartésienne d'espaces topologiques*, Fund. Math. **34** (à paraître) avec la littérature qui y est citée.

[2]) W. Sierpiński, *Sur un problème de la théorie générale des ensembles*, ce volume, p. 299—302.

(iii) Il existe deux classes $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ d'ensembles jouissant de la propriété (s) et dont le produit cartésien $\boldsymbol{P}\dot{\times}\boldsymbol{Q}$ [3]) n'en jouit pas.

Or, je vais démontrer le suivant

Théorème. *Pour que la classe $\boldsymbol{P}$ d'ensembles jouisse de la propriété (k), il faut et il suffit que le produit cartésien $\boldsymbol{P}\dot{\times}\boldsymbol{Q}$ de la classe $\boldsymbol{P}$ et de chaque classe $\boldsymbol{Q}$ jouissant de la propriété (s) jouisse également de la propriété (s).*

Ce théorème et la proposition (ii) entraînent directement le résultat (iii) de M. Sierpiński.

Cependant, il est à noter que les problèmes analogues concernant les espaces topologiques — plus précisément: espaces topologiques dans lesquels la classe des ensembles ouverts possède la propriété (k) ou (s) — restent ouverts [4]).

2. Propriétés (k), (s) et (t). Il nous sera utile de formuler encore une propriété de classes d'ensembles qui ne jouera d'ailleurs qu'un rôle auxiliaire:

Propriété (t). Chaque sous-classe indénombrable de $\boldsymbol{K}$ contient parmi ses éléments deux ensembles disjoints et deux ensembles ayant des points communs.

Nous allons énoncer sans démonstrations plusieurs propositions faciles à vérifier, concernant (k), (s) et (t):

(i) Chacune des propriétés (k) et (s) est héréditaire (c. à d. se présentant pour les sous-ensembles des ensembles qui en jouissent).

(ii) Si la relation de disjonction, considérée dans la classe $\boldsymbol{P}$ d'ensembles, est semblable à la même relation considérée dans la classe $\boldsymbol{Q}$ et si la classe $\boldsymbol{P}$ jouit de la propriété (k) ou de la propriété (s) respectivement, la classe $\boldsymbol{Q}$ jouit également de la-même propriété.

(iii) Chaque classe indénombrable ayant la propriété (t) possède la propriété (s) sans avoir la propriété (k).

(iv) Chaque classe ayant la propriété (s), mais dépourvue de la propriété (k), contient une classe indénombrable jouissant de la propriété (t).

(v) Pour qu'une classe $\boldsymbol{K}$ ait la propriété (k), il faut et il suffit que chaque suite $\{E_\xi\}$ de type Ω d'ensembles non vides appartenant à $\boldsymbol{K}$ admette une suite partielle $\{E_{\alpha_\xi}\}$ de même type, telle que $E_{\alpha_\eta}\cdot E_{\alpha_\zeta}\neq 0$ pour $\eta<\zeta<\Omega$.

[3]) c. à d. la classe des ensembles $A\times B$ où $A\in\boldsymbol{P}$ et $B\in\boldsymbol{Q}$, le symbole $A\times B$ désignant le produit cartésien des ensembles A et B au sens ordinaire; cf. W. Sierpiński, l. c., p. 299.

[4]) Cf. ma Note précitée, n° 3.3.

3. Disjonction d'ensembles comme relation symétrique la plus générale. On a le théorème suivant:

Pour qu'une relation ϱ soit symétrique [5]) et non-réflexive [6]), il faut et il suffit qu'il existe une classe $\boldsymbol{K}$ d'ensembles non vides telle que la relation de disjonction $(E_1\cdot E_2=0)$, considérée dans $\boldsymbol{K}$, soit semblable à ϱ.

La suffisance de cette condition est évidente. Pour en démontrer la nécessité, supposons que ϱ soit une relation symétrique et non-réflexive, définie dans un ensemble R, et désignons, pour chaque $p\in R$, par $N(p)$ la classe dont les éléments sont: l'ensemble (p) et chaque ensemble (p,x) tel que $x\in R$ et p non ϱx. Soit enfin $\boldsymbol{K}$ la famille des classes $N(p)$ où $p\in R$. Pour $p\neq q$ appartenant à R, on a $(p)\in N(p)$ et (p) non $\in N(q)$; par conséquent, $N(p)\neq N(q)$. Donc, en faisant correspondre à chaque $p\in R$ l'ensemble $N(p)$, on obtient une correspondance biunivoque entre R et $\boldsymbol{K}$. Ensuite, $p\neq q$ étant deux éléments de R, si $N(p)\cdot N(q)\neq 0$, la classe $N(p)\cdot N(q)$ ne contient qu'un seul élément, à savoir l'ensemble (p,q). Il en résulte que les relations

$$p\varrho q \tag{1}$$

et

$$N(p)\cdot N(q)=0 \tag{2}$$

sont équivalentes.

Le théorème se trouve ainsi démontré.

Il est facile de voir que, dans l'énoncé de ce théorème, la relation de disjonction peut être remplacée par celle d'intersection d'ensembles distincts $(E_1\cdot E_2\neq 0;\ E_1\neq E_2)$; cf. p. ex. 5 (i).

4. Classe d'ensembles ayant la propriété (s), mais dépourvue de la propriété (k). Désignons par σ la relation suivante (définie par M. Sierpiński [7])) dans l'ensemble Z des nombres ordinaux au plus dénombrables: $\{x_\xi\}$ étant une suite fixée de type Ω formée de nombres réels distincts, posons $\alpha\sigma\beta$ lorsqu'on a soit $\alpha>\beta$ et $x_\alpha>x_\beta$, soit $\alpha<\beta$ et $x_\alpha<x_\beta$. On démontre aisément que, dans chaque ensemble indénombrable contenu dans Z, il existe des nombres ordinaux α, β et γ tels que $\alpha\sigma\beta$ et β non $\sigma\gamma$.

[5]) c. à d. que $p\varrho q$ entraîne $q\varrho p$.

[6]) c. à d. qu'on n'ait jamais $p\varrho p$.

[7]) W. Sierpiński, *Sur un problème de la théorie des relations*, Annali R. Sc. Sup. Pisa **2** (1933), p. 285-288.

Il en résulte, en vertu du n° 3, qu'*il existe une classe d'ensembles jouissant de la propriété* (t), donc — en vertu de 2 (iii) — *jouissant de la propriété* (s), *mais dépourvue de la propriété* (k).

5. Classes réciproquement semblables d'ensembles. Deux classes $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ d'ensembles non vides seront dites *réciproquement semblables* lorsque la relation de disjonction dans $\boldsymbol{P}$ est semblable à la relation d'intersection d'ensembles distincts dans $\boldsymbol{Q}$. En d'autres termes, des classes $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ sont réciproquement semblables lorsqu'il existe une correspondance biunivoque entre elles telle que, pour $A_1 \neq A_2$ appartenant à $\boldsymbol{P}$ et pour B_1 et B_2 qui appartiennent à $\boldsymbol{Q}$ et correspondent respectivement à A_1 et A_2, les relations $A_1 \cdot A_2 = 0$ et $B_1 \cdot B_2 \neq 0$ sont équivalentes.

(i) Pour chaque classe d'ensembles, il existe une autre réciproquement semblable à elle.

En effet, la relation ι d'intersection (d'ensembles distincts) étant symétrique et non-réflexive dans la classe donnée $\boldsymbol{P}$, il existe en vertu du n° 3 une classe $\boldsymbol{Q}$ telle que la relation de disjonction dans $\boldsymbol{Q}$ est semblable à ι; par conséquent les classes $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ sont réciproquement semblables.

On voit directement que

(ii) Chaque classe réciproquement semblable à une classe jouissant de la propriété (t) en jouit également.

6. Multiplication cartésienne. Admettons que, pour chacune des classes $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ en question, il existe au moins un ensemble non vide appartenant à elle.

(i) [et (ii)] *Si la classe* $\boldsymbol{P}\dot{\times}\boldsymbol{Q}$ *possède la propriété* (k) [*la propriété* (s)], *les classes* $\boldsymbol{P}$ *et* $\boldsymbol{Q}$ *la possèdent également.*

Soit $0 \neq E \in \boldsymbol{P}$. La classe $(E)\dot{\times}\boldsymbol{Q}$ est contenue dans $\boldsymbol{P}\dot{\times}\boldsymbol{Q}$ et elle possède par conséquent la propriété (k) [la propriété (s)] en vertu de 2 (i). La relation de disjonction dans $\boldsymbol{Q}$ et celle dans $(E)\dot{\times}\boldsymbol{Q}$ étant semblables, la classe $\boldsymbol{Q}$ jouit également de cette propriété en vertu de 2 (ii). Evidemment, la classe $\boldsymbol{P}$ la possède aussi.

(iii) *Si* $\boldsymbol{P}$ *et* $\boldsymbol{Q}$ *possèdent la propriété* (k), *la classe* $\boldsymbol{P}\dot{\times}\boldsymbol{Q}$ *la possède également.*

Soit, en effet, $\{A_\xi \times B_\xi\}$ une suite de type Ω d'ensembles non vides appartenant à $\boldsymbol{P}\dot{\times}\boldsymbol{Q}$. D'après 2 (v), il existe une suite $\{A_{\beta_\xi}\}$ ($\xi < \Omega$) telle que $A_{\beta_\eta} \cdot A_{\beta_\zeta} \neq 0$ pour $\eta < \zeta < \Omega$ et une suite $\{B_{\beta_{\gamma_\xi}}\}$ ($\xi < \Omega$) telle que $B_{\beta_{\gamma_\eta}} \cdot B_{\beta_{\gamma_\zeta}} \neq 0$ pour $\eta < \zeta < \Omega$. En posant $\alpha_\xi = \beta_{\gamma_\xi}$, nous obtenons $A_{\alpha_\eta} \cdot A_{\alpha_\zeta} \neq 0$ et $B_{\alpha_\eta} \cdot B_{\alpha_\zeta} \neq 0$ pour $\eta < \zeta < \Omega$. Il en résulte que

$$(A_{\alpha_\eta} \times B_{\alpha_\eta}) \cdot (A_{\alpha_\zeta} \times B_{\alpha_\zeta}) \neq 0 \qquad \text{pour } \eta < \zeta < \Omega;$$

donc, d'après 2 (v), la classe $\boldsymbol{P}\dot{\times}\boldsymbol{Q}$ jouit de la propriété (k).

(iv) *Si les classes* $\boldsymbol{P}$ *et* $\boldsymbol{Q}$ *sont indénombrables et réciproquement semblables, la classe* $\boldsymbol{P}\dot{\times}\boldsymbol{Q}$ *ne jouit pas de la propriété* (s).

En effet, en rangeant $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ en suites $\boldsymbol{P} = \{A_\xi\}$ et $\boldsymbol{Q} = \{B_\xi\}$ telles que les relations $A_\eta \cdot A_\zeta = 0$ et $B_\eta \cdot B_\zeta \neq 0$ soient équivalentes, et en posant $\boldsymbol{R} = \{A_\xi \times B_\xi\}$, on obtient une classe indénombrable $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{P}\dot{\times}\boldsymbol{Q}$ d'ensembles disjoints deux à deux.

7. Démonstration du théorème. Nous allons établir maintenant le théorème énoncé dans le n° 1.

Nécessité. Il est à démontrer que $\boldsymbol{P}$ étant une classe à propriété (k) et $\boldsymbol{Q}$ une classe à propriété (s), la classe $\boldsymbol{P}\dot{\times}\boldsymbol{Q}$ possède la propriété (s)[8]. Supposons, par contre, qu'il existe une suite $\{A_\xi \times B_\xi\}$ de type Ω d'ensembles disjoints non vides appartenant à $\boldsymbol{P}\dot{\times}\boldsymbol{Q}$. D'après 2 (v), il existe une suite $\{A_{\alpha_\xi}\}$ où $\xi < \Omega$, telle que $A_{\alpha_\eta} \cdot A_{\alpha_\zeta} \neq 0$ pour $\eta < \zeta < \Omega$. Il résulte donc de la relation

$$(A_{\alpha_\eta} \times B_{\alpha_\eta}) \cdot (A_{\alpha_\zeta} \times B_{\alpha_\zeta}) = 0$$

que $B_{\alpha_\eta} \cdot B_{\alpha_\zeta} = 0$. Par conséquent, la suite $\{B_{\alpha_\xi}\}$ constitue une classe indénombrable d'ensembles disjoints non vides appartenant à $\boldsymbol{Q}$, ce qui est incompatible avec hypothèse sur la propriété (s) de $\boldsymbol{Q}$.

Suffisance. $\boldsymbol{P}\dot{\times}\boldsymbol{Q}$ jouissant de la propriété (s), il en résulte d'après 6 (ii) que la classe $\boldsymbol{P}$ en jouit également. Par conséquent, il reste à montrer que, pour chaque $\boldsymbol{P}$ ayant la propriété (s), mais dépourvu de la propriété (k), il existe une classe $\boldsymbol{Q}$ ayant la propriété (s) et telle que la classe $\boldsymbol{P}\dot{\times}\boldsymbol{Q}$ n'en jouit pas.

D'après 2 (iv), il existe une classe $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{P}$ ayant la propriété (t) et, d'après 5 (i), il existe une classe $\boldsymbol{Q}$ r'ciproquement semblable à $\boldsymbol{R}$, donc jouissant aussi de cette propriété en vertu de 5 (ii). Il résulte de 6 (iv) que $\boldsymbol{R}\dot{\times}\boldsymbol{Q}$ ne jouit pas de la propriété (s); donc, d'après 2 (i), la classe $\boldsymbol{P}\dot{\times}\boldsymbol{Q}$ n'en jouit non plus.

[8]) Je dois cette proposition à MM. Lance et Wichik.

Varsovie, en janvier 1942.