isomorphic to the direct product of the 1-dimensional groups of torsion of the divisors of M. But, as we have already shown, the product $M_0=\prod_{i=1}^{\delta} M_i \times \prod_{j=1}^{\eta} N_j$ is determined by M, hence his 1-dimensional group of torsion $T_1(M_0)$ is also determined. We have at once[46]: $T_1(S)=0$, $T_1(P)=T_1(K)=G_2$, where G_2 denotes the group of the rest modulo 2, containing two elements 0, and 1. Therefore

$$T_1(M)=[G_2]^{\beta+\gamma}\times T_1(M_0). \tag{33}$$

Let us denote by μ the number of elements in the (finite) group $T_1(M)$ and by μ_0 the number of elements in $T_1(M_0)$. By (33), we have $\mu=2^{\beta+\gamma}\cdot\mu_0$, and consequently

$$\beta+\gamma=c_3, \tag{34}$$

where the number $c_3=\dfrac{\lg\mu-\lg\mu_0}{\lg 2}$ is determined by the manifold M. Thus we have established three linear equations, (31), (32) and (34), involving the numbers α, β, γ. Since the determinant of these equations is equal to 1, the numbers α, β, γ are determined. Thus the theorem is completely proved.

We have determined all topological divisors of M using only homological properties of M: the Betti numbers $p_k(M)$ and the 1-dimensional group of torsion $T_1(M)$. Consequently, we may state the following

Corollary. *Every n-dimensional manifold M decomposable into product of sets of dimension $\leqslant 2$ is topologically determined by his Betti numbers $p_k(M)$ and his 1-dimensional group of torsion $T_1(M)$.*

[46]) l. c., p. 208, (2′) and p. 265, (4b).

Sur un problème de la théorie générale des ensembles.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

1. A et B étant deux ensembles, désignons par $A\times B$ l'ensemble de tous les couples ordonnés (a,b) où $a\in A$ et $b\in B$.

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ étant deux familles d'ensembles, désignons par $\mathcal{A}\dot{\times}\mathcal{B}$ la famille de tous les ensembles $A\times B$ où $A\in\mathcal{A}$ et $B\in\mathcal{B}$.

Nous dirons qu'une famille d'ensembles *jouit de la propriété de Souslin* [1]) si elle ne contient aucune sous-famille indénombrable d'ensembles disjoints (non-vides). M. E. Szpilrajn a posé récemment le problème suivant:

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ étant deux familles d'ensembles jouissant chacune de la propriété de Souslin, la famille $\mathcal{A}\dot{\times}\mathcal{B}$ jouit-elle toujours de ladite propriété?

En utilisant l'axiome du choix, je vais démontrer que *la réponse à ce problème est négative.*

En résolvant un problème de M. B. Knaster, j'ai démontré à l'aide de l'axiome du choix [2]) qu'il existe une relation symétrique R dont le champ E est indénombrable et telle que tout sous-ensemble indénombrable de E admet deux éléments différents a et b pour lesquels on a aRb, et deux éléments différents a_1 et b_1 pour lesquels on a a_1 non Rb_1 [3]).

[1]) D'après la dénomination de M. E. Szpilrajn; cf. le problème de M. Souslin, Fund. Math. **1**, (1920), p. 223 (problème 3).

[2]) W. Sierpiński, Ann. Ec. Norm. Sup. Pisa **2** (1933), p. 285.

[3]) Il résulte de l'axiome du choix l'existence d'une suite transfinie $E=\{x_\xi\}_{\xi<\Omega}$ de type Ω formée de nombres réels différents. Soit R la relation définie dans E comme il suit: $x_\alpha R x_\beta$ signifie que $\alpha<\beta$ et $x_\alpha<x_\beta$ ou bien que $\alpha>\beta$ et $x_\alpha>x_\beta$. On démontre que la relation R satisfait aux conditions requises.

Désignons, pour $a \in E$, par A_a l'ensemble de tous les ensembles (formés de deux éléments) (a,t) où $t \in E$, $t \neq a$ et tRa, et par B_a l'ensemble de tous les ensembles (a,t) où $t \in E$, $t \neq a$ et t non Ra.

Soient $\mathcal{A} = \{A_a\}_{a \in E}$ et $\mathcal{B} = \{B_a\}_{a \in E}$.

Considérons une sous-famille indénombrable quelconque $\mathcal{A}_1$ de $\mathcal{A}$. Il existe donc un sous-ensemble indénombrable E_1 de E tel que $\mathcal{A}_1 = \{A_a\}_{a \in E_1}$. D'après la propriété de la relation R, il existe deux éléments a et b de E_1 tels que $a \neq b$ et aRb, donc aussi bRa, la relation R étant symétrique. D'après la définition des ensembles A_a, on a donc $(a,b) \in A_a$ et $(a,b) \in A_b$, d'où $A_a A_b \neq 0$. La famille $\mathcal{A}$ jouit donc de la propriété de Souslin. Pareillement, on démontre que la famille $\mathcal{B}$ jouit de la-même propriété.

Or, soit $\mathcal{F}$ la famille de tous les ensembles $A_a \times B_a$ où $a \in E$. On a évidemment $\mathcal{F} \subset \mathcal{A} \dot{\times} \mathcal{B}$. Soient $a \in E$ et $b \in E$, $a \neq b$. Si aRb, on a $B_a B_b = 0$, puisque, vu la définition de B_a et l'inégalité $a \neq b$, les formules $(t,u) \in B_a$ et $(t,u) = B_b$ donnent $t=a$ et $u=b$, ou bien $u=a$ et $t=b$, donc toujours a non Rb, contrairement à l'hypothèse. Si a non Rb, on a $A_a B_b = 0$, puisque, vu la définition de A_a et l'inégalité $a \neq b$, les formules $(t,u) \in A_a$ et $(t,u) \in A_b$ donnent $t=a$ et $u=b$, ou bien $u=a$ et $t=b$, donc toujours aRb, contrairement à l'hypothèse.

On a ainsi soit $B_a B_b = 0$, soit $A_a A_b = 0$, donc toujours $(A_a \times B_a)(A_b \times B_b) = 0$. Les ensembles $A_a \times B_a$ où $a \in E$, qui constituent la famille $\mathcal{F}$, sont donc disjoints deux à deux. L'ensemble E étant indénombrable, il en résulte que la famille $\mathcal{A} \dot{\times} \mathcal{B}$ ne jouit pas de la propriété de Souslin, c. q. f. d.

2. Convenons maintenant de dire qu'une famille d'ensembles *jouit de la propriété* S_1 si elle ne contient aucune sous-famille infinie d'ensembles disjoints (non vides). On a alors ce

Théorème. *$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ étant deux familles infinies d'ensembles jouissant de la propriété S_1, la famille $\mathcal{A} \dot{\times} \mathcal{B}$ jouit également de la propriété S_1.*

Démonstration. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux familles d'ensembles jouissant de la propriété S_1. Supposons que la famille $\mathcal{A} \dot{\times} \mathcal{B}$ n'en jouisse pas. Il existe donc une sous-famille infinie $\mathcal{F}$ de la famille $\mathcal{A} \dot{\times} \mathcal{B}$ formée d'ensembles non-vides disjoints. Soit $A \times B$ un ensemble donné de la famille $\mathcal{F}$.

Je dis que la famille de tous les ensembles différents $A' \times B'$ de $\mathcal{F}$ avec $A' = A$ est finie. En effet, si $A \times B' \in \mathcal{F}$, $A \times B'' \in \mathcal{F}$ et $B' \neq B''$, on a $A \times B' \neq A \times B''$, donc, les ensembles distincts de $\mathcal{F}$ étant disjoints, $(A \times B')(A \times B'') = 0$, ce qui donne tout de suite $B'B'' = 0$. Donc, si la famille de tous les ensembles distincts $A' \times B'$ de $\mathcal{F}$ avec $A' = A$ était infinie, il existerait (d'après $\mathcal{F} \subset \mathcal{A} \dot{\times} \mathcal{B}$) une infinité d'ensembles distincts et disjoints, appartenant à $\mathcal{B}$, ce qui est impossible, la famille $\mathcal{B}$ jouissant de la propriété S_1. Si l'on divise donc tous les ensembles $A \times B$ de $\mathcal{F}$ en classes, en rangeant dans une même classe deux ensembles différents $A \times B$ et $A' \times B'$ de $\mathcal{F}$, lorsque $A = A'$, chaque classe est finie et (la famille $\mathcal{F}$ étant supposée infinie) il existerait une sous-famille infinie $\mathcal{F}_1$ de $\mathcal{F}$ contenant un seul ensemble de chacune de ces classes. Donc, si $A \times B$ et $A' \times B'$ sont deux ensembles distincts de $\mathcal{F}_1$, on a $A \neq A'$.

Or, soit $A \times B$ un ensemble donné de $\mathcal{F}_1$. La famille $\mathcal{A}$ jouissant de la propriété S_1, on montre comme plus haut que la famille de tous les ensembles différents $A' \times B'$ de $\mathcal{F}_1$ avec $B' = B$ est finie, et on en déduit l'existence d'une sous-famille infinie $\mathcal{F}_2$ de $\mathcal{F}_1$ telle que, $A \times B$ et $A' \times B'$ étant deux ensembles distincts de $\mathcal{F}_2$, on a $B \neq B'$ et $A \neq A'$ (puisque $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$).

Nous pouvons donc poser $\mathcal{F}_2 = (A_1 \times B_1, A_2 \times B_2, \ldots)$ où $A_k \neq A_l$ et $B_k \neq B_l$ pour $k = 1, 2, \ldots$, $l = 1, 2, \ldots$ et $k \neq l$.

Distinguons maintenant deux cas:

1° Tout ensemble infini X de nombres naturels contient au moins un nombre m tel que l'ensemble $\underset{n}{E}[n \in X, A_m A_n \neq 0]$ est infini.

Nous définirons par l'induction une suite infinie de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots$ et une suite infinie $E_1, E_2, \ldots$ d'ensembles infinis de nombres naturels comme il suit. Soit N l'ensemble de tous les nombres naturels. D'après 1°, il existe un nombre naturel n_1 tel que l'ensemble $E_1 = \underset{n}{E}[n \in N, A_{n_1} A_n \neq 0]$ est infini. Soit maintenant p un nombre naturel et supposons que nous ayons défini le nombre naturel n_p et l'ensemble infini de nombres naturels E_p tel que $A_{n_p} A_n \neq 0$ pour $n \in E_p$ (ce qui était vrai pour $p=1$). L'ensemble $E_p - \underset{n}{E}[n \in N, n \leqslant n_p]$ étant infini, il existe d'après 1° un nombre naturel $n_{p+1} \in E_p - \underset{n}{E}[n \in N, n \leqslant n_p]$ tel que l'ensemble $E_{p+1} = \underset{n}{E}[n \in E_p, n > n_p, A_{n_{p+1}} A_n \neq 0]$ est infini.

Les suites infinies $n_1, n_2, \dots$ et $E_1, E_2, \dots$ étant ainsi définies par l'induction, on voit sans peine que $n_1 < n_2 < \dots$ et que $n_{p+k} \in E_{p+k-1} \subset E_p$, donc $A_{n_p} A_{n_{p+k}} \neq 0$ pour p et k naturels.

Comme $(A_{n_p} \times B_{n_p})(A_{n_{p+k}} \times B_{n_{p+k}}) = 0$ (puisque $A_{n_p} \times B_{n_p}$ et $A_{n_{p+k}} \times B_{n_{p+k}}$ sont des ensembles distincts de la famille $\mathcal{F}_2$), on a donc $B_{n_p} B_{n_{p+k}} = 0$, ce qui est impossible (pour p et k naturels), la famille $\mathcal{B}$ jouissant de la propriété S_1.

2° Le cas 1° n'a pas lieu. Il existe alors une suite infinie $m_1, m_2, \dots$ de nombres naturels telle que, pour tout k naturel, il existe un nombre naturel $q_k > k$ satisfaisant à l'égalité $A_{m_k} A_{m_l} = 0$ pour $l \geqslant q_k$. En posant $s_1 = 1$ et $s_k = q_{s_{k-1}}$ pour $k > 1$, nous aurons $s_1 < s_2 < \dots$ En posant ensuite $n_k = m_{s_k}$ pour $k = 1, 2, \dots$, nous aurons $n_1 < n_2 < \dots$ et $n_{k+1} = m_{s_{k+1}} = m_{q_{s_k}}$, donc $A_{n_k} A_{n_{k+1}} = A_{m_{s_k}} A_{m_{q_{s_k}}} = 0$ pour $k = 1, 2, \dots$, ce qui est impossible, la famille $\mathcal{A}$ jouissant de la propriété S_1. Le théorème est ainsi démontré.

Varsovie, le 24. XII. 1941.

Sur deux propriétés des classes d'ensembles.

Par

Edward Szpilrajn-Marczewski (Wrocław).

1. Problèmes et résultats. $\boldsymbol{K}$ étant une classe arbitraire d'ensembles, considérons les propriétés suivantes de $\boldsymbol{K}$:

Propriété (s). Chaque sous-classe de $\boldsymbol{K}$ d'ensembles disjoints deux à deux est au plus dénombrable.

Propriété (k). Chaque sous-classe indénombrable de $\boldsymbol{K}$ contient une sous-classe indénombrable d'ensembles ayant des points communs deux à deux.

Ces propriétés se présentent p. ex. dans l'étude du problème bien connu de Souslin et dans diverses recherches de la théorie des ensembles, de la topologie etc [1]).

Évidemment:

(i) Chaque classe jouissant de la propriété (k) jouit de la propriété (s).

D'autre part, on démontre aisément à l'aide d'une relation définie par M. W. Sierpiński (voir plus loin n° 4) que:

(ii) Il existe une classe d'ensembles jouissant de la propriété (s), mais pas de la propriété (k).

Le but de cette Note est d'étudier les propriétés (s) et (k) au point de vue de la *multiplication cartésienne*. Quant à la propriété (k), le problème ne présente aucune difficulté (voir 6(i) et 6(iii)); quant à la propriété (s), M. Sierpiński a démontré tout récemment [2]) que:

---

[1]) Voir p. ex. B. Knaster, *Sur une propriété caractéristique de l'ensemble des nombres réels*, Recueil Math. Moscou (à paraître), et ma Note *Séparabilité et multiplication cartésienne d'espaces topologiques*, Fund. Math. **34** (à paraître) avec la littérature qui y est citée.

[2]) W. Sierpiński, *Sur un problème de la théorie générale des ensembles*, ce volume, p. 299—302.