Cependant on a ce

Théorème[7]). *Si l'ensemble linéaire E jouissant de la propriété λ' par rapport à la droite est une projection biunivoque d'un ensemble plan H, l'ensemble H jouit de la propriété λ' relativement au plan.*

Démonstration. Soit D un ensemble plan dénombrable; soit D_1 sa projection sur l'axe X. L'ensemble E jouissant de la propriété λ', il existe un G_δ linéaire Γ tel que $D_1 \subset \Gamma$ et $\Gamma E \subset D_1$. Soit Q l'ensemble de tous les points (x,y) du plan pour lesquels $x \epsilon \Gamma$. L'ensemble Q est donc un G_δ plan et on a évidemment $D \subset Q$. Soit enfin R l'ensemble de tous les points (x,y) du plan pour lesquels $x \epsilon D$. L'ensemble R étant formé d'un ensemble au plus dénombrable de droites parallèles à l'axe Y, et E étant une projection biunivoque de H, l'ensemble HR est au plus dénombrable, de sorte que l'ensemble $Q_1 = Q - (HR - D)$ est encore un G_δ. Or, comme $D \subset Q$, on a $D \subset Q_1$. D'autre part, comme $\Gamma E \subset D_1$, on a évidemment $QH \subset R$. Par conséquent $Q_1 H \subset HR - (HR - D) \subset D$. L'ensemble H jouit donc de la propriété λ' relativement au plan, c. q. f. d.

[7]) énoncé par moi sans démonstration dans la note citée au renvoi [1]).

Sur deux conséquences d'un théorème de Hausdorff.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

F. Hausdorff a démontré[1]) en utilisant l'axiome du choix, mais sans faire appel à l'hypothèse du continu, que la droite est somme d'une série transfinie de type Ω d'ensembles G_δ croissants et distincts. Le but de cette Note est de tirer deux conséquences de ce théorème.

1. Existence d'un ensemble indénombrable à propriété λ'. On dit qu'un ensemble linéaire E jouit de la propriété λ' s'il existe pour tout ensemble linéaire dénombrable D un ensemble linéaire Γ qui est un G_δ tel que $D \subset \Gamma$ et $E\Gamma \subset D$ (en d'autres mots, si tout ensemble linéaire dénombrable D est un G_δ relativement à l'ensemble $E+D$ [2]). Les démonstrations connues d'existence des ensembles indénombrables à propriété λ' utilisent l'hypothèse du continu [3]). Or, je vais prouver que cette existence résulte sans peine du théorème de Hausdorff.

En effet, d'après ce théorème, il existe une suite transfinie de type Ω, $\{\Gamma_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$, d'ensembles G_δ linéaires telle que

$$(1) \qquad \Gamma_\xi \subset \Gamma_\eta \quad \text{et} \quad \Gamma_\xi \neq \Gamma_\eta \qquad \text{pour} \quad \xi < \eta < \Omega,$$

et qu'en désignant par X l'ensemble de tous les nombres réels, on a

$$(2) \qquad X = \sum_{\alpha<\Omega} \Gamma_\alpha.$$

[1]) F. Hausdorff, Fund. Math. **26** (1936), p. 248.

[2]) Une définition équivalente de la propiété λ' est la suivante: un ensemble linéaire E jouit de la propriété λ' si pour tout ensemble linéaire dénombrable D l'ensemble $E+D$ jouit de la propriété λ (introduite par M. C. Kuratowski, Fund. Math. **21**, (1933), p. 127).

[3]) Voir p. ex. ma note dans C. R. Soc. Sc. Varsovie **30** (1937), p. 259.

D'après (1), on a

(2a) $$\Xi_\alpha = \Gamma_\alpha - \sum_{\xi<\alpha} \Gamma_\xi \neq 0 \qquad \text{pour} \quad \alpha<\Omega,$$

et il existe pour tout nombre ordinal $\alpha<\Omega$ un nombre réel x_α tel que

(3) $$x_\alpha \in \Gamma_\alpha - \sum_{\xi<\alpha} \Gamma_\xi.$$

Posons

(4) $$E = \{x_\alpha\}_{\alpha<\Omega}.$$

Il résulte tout de suite de (3) que $x_\xi \neq x_\eta$ pour $\xi<\eta<\Omega$ (puisque si $\xi<\eta<\Omega$, on a $x_\eta \in \Gamma_\eta$, et d'après (3) $x_\eta \operatorname{non} \in \Gamma_\xi$ et $x_\xi \in \Gamma_\xi$). L'ensemble E est donc indénombrable.

Or, soit $D=(p_1, p_2, \ldots)$ un ensemble linéaire dénombrable quelconque. D'après (2), il existe pour tout n naturel un nombre ordinal $\alpha_n<\Omega$ tel que

(5) $$p_n \in \Gamma_{\alpha_n}.$$

Vu la propriété connue de nombres ordinaux $<\Omega$, il existe un nombre ordinal $\alpha<\Omega$ tel que

$$\alpha_n < \alpha \qquad \text{pour} \quad n=1,2,\ldots$$

D'après (1), on aura donc $\Gamma_{\alpha_n} \subset \Gamma_\alpha$ pour $n=1,2,\ldots$, donc, d'après (5):

(6) $$D \subset \Gamma_\alpha.$$

Posons

(7) $$E_\alpha = \{x_\xi\}_{\xi<\alpha}.$$

Vu que $\alpha<\Omega$, c'est un ensemble au plus dénombrable, de même que l'ensemble $E_\alpha - D$, et l'ensemble

(8) $$\Gamma = \Gamma_\alpha - (E_\alpha - D)$$

est un G_δ. D'après (6) et (8), on a

(9) $$D \subset \Gamma.$$

Or, d'après (3), on a

$$x_\eta \operatorname{non} \in \Gamma_\alpha \qquad \text{pour} \quad \alpha<\eta<\Omega,$$

donc, d'après (4) et (7):

$$E\Gamma_\alpha \subset E_\alpha,$$

donc, d'après (8):

$$E\Gamma = E\Gamma_\alpha - (E_\alpha - D) \subset D,$$

donc:

(10) $$E\Gamma \subset D.$$

L'ensemble Γ étant un G_δ, les formules (9) et (10) prouvent que l'ensemble E jouit de la propriété λ'.

Ainsi *l'existence d'un ensemble linéaire indénombrable à propriété λ' est démontrée sans faire appel à l'hypothèse du continu.*

2. Décomposition de la droite en $\aleph_1$ ensembles $F_{\sigma\delta}$ non vides et disjoints. Les ensembles $\Gamma_\xi (\xi<\Omega)$ étant des G_δ, les ensembles $\sum_{\xi<\alpha} \Gamma_\xi$ sont, pour $\alpha<\Omega$, des $G_{\delta\sigma}$ et, par suite, les ensembles (2a) sont des $F_{\sigma\delta}$. Or, les ensembles (2a) sont évidemment deux à deux disjoints et, d'après (2) et (2a), on a

(11) $$X = \sum_{\alpha<\Omega} \Xi_\alpha.$$

Donc:

Il existe une décomposition de la droite en $\aleph_1$ ensembles $F_{\sigma\delta}$ non vides et disjoints.

Il est ainsi établi sans faire appel à l'hypothèse du continu [4]) qu'il existe une décomposition de la droite en $\aleph_1$ ensembles disjoints non vides mesurables (B) dont les classes sont bornées (cf. „*la forme encore plus affaiblie du problème du continu*" d'après M. N. Lusin [5])). Il est cependant à remarquer que notre démonstration, comme basée sur le théorème de Hausdorff, utilise l'axiome du choix, et la décomposition (11) est non effective. Or, il existe des décompositions effectives de la droite en $\aleph_1$, ensembles non vides disjoints mesurables (B) dont les classes ne sont pas bornées [6]).

---

[4]) En admettant l'hypothèse du continu on a évidemment une décomposition de la droite en $\aleph_1$ ensembles fermés non vides et disjoints (formés chacun d'un élément).

[5]) N. Lusin, Annali Reale Scuola Norm. Super. **2** (1933), p. 271. „Et enfin — écrit M. Lusin, l. c., p. 282 — le problème de reconnaître s'il existe un développement dont les constituantes ne soient pas nulles et dont les classes ne tendent pas vers Ω avec le numéro α présente des graves difficultés dans l'état actuel de la Science. Il est assez probable que l'ordre même des difficultés de ce dernier problème est celui du problème du continu".

[6]) Voir p. ex. N. Lusin et W. Sierpiński, C. R. Paris (1922).

Le problème s'impose si l'on peut tirer du théorème de Hausdorff une décomposition de la droite en $\aleph_1$ ensembles G_δ non vides et disjoints.

Vu que tout ensemble $G_{\delta\sigma}$ linéaire est somme de $\aleph_0$ ensembles G_δ disjoints[7]), ce serait évidemment le cas si tous les ensembles (2a) seraient des $G_{\delta\sigma}$. Comme d'après (2a) et (1) $\sum_{\xi<\alpha}\Gamma_\xi=\Gamma_\alpha-\Xi_\alpha$ pour $\alpha<\Omega$, les ensembles $\sum_{\xi<\alpha}\Gamma_\xi$ devraient être (pour $\alpha<\Omega$) des ensembles $F_{\delta\sigma}$. Or, d'après un théorème que j'ai démontré en généralisant un théorème de M. Lusin[8]), la suite transfinie $\{\Gamma_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ serait alors stationnaire, ce qui est impossible, les ensembles $\Gamma_\alpha(\alpha<\Omega)$ étant tous distincts.

Le problème de démontrer sans faire appel à l'hypothèse du continu que la droite est somme de $\aleph_1$ ensembles G_δ non vides et disjoints reste donc ouvert.

---

[7]) W. Sierpiński, Fund. Math. **10** (1927), p. 324 (Lemme 4).

[8]) W. Sierpiński, Fund. Math. **24**, (1935), p. 309 (Théorème II, dans lequel il faut passer aux complémentaires).

On the decomposition of manifolds into products of curves and surfaces.

By

Karol Borsuk (Warszawa).

1. The sets $E_1, E_2, \dots, E_n$ constitute a product-decomposition of a space E, if the product $E_1\times E_2\times\dots E_n$ [1]) is a homeomorph of E. We then call the sets E_i *topological divisors of* E. A topological divisor of E containing more than one point and not homeomorphic to E is called a *real topological divisor of* E. A space which has no real topological divisor is called *topologically first*.

Two decompositions $E_1, E_2, \dots, E_n$ and $E_1', E_2', \dots, E_{n'}'$ of E will be considered as *identical*, if after cancelling their one-puncting terms, they may differ only by their order[2]). It is easy to notice[3]) that every compact space of finite dimension and finite number of components is decomposable into a product of topological first sets. The problem whether this decomposition is possible in one manner only is, in the general case, unsolved. Except some trivial cases[4]), so far as I know, only one partial result concerning this problem has been obtained. We mean the theorem that no polyhedron

---

[1]) That is the space whose elements are all ordered n-tuples $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ with $x_i \in E_i$ for $i=1,2,\dots,n$, and whose metric is given by the formula:

$$\varrho[(x_1,x_2,\dots,x_n),(y_1,y_2,\dots,y_n)]=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}[\varrho(x_i,y_i)]^2}.$$

[2]) Compare my paper *Sur la décomposition des polyèdres en produits cartésiens*, Fund. Math. **31** (1938), p. 138.

[3]) l. c., pp. 138 and 139.

[4]) In many simple cases the fact that E is topologically first is an immediate consequence of its simplest topological properties. So it is, for example, for a continuum containing points in which it is 1-dimensional, or for E consisting of two non homeomorphic components.