Sur la non-invariance topologique de la propriété λ'.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

1. Nous disons qu'un ensemble linéaire E *jouit de la propriété* λ' si, pour tout ensemble linéaire dénombrable D, il existe un ensemble linéaire Γ qui est un G_δ tel que $D \subset \Gamma$ et $\Gamma E \subset D$ [1]).

On voit sans peine que pour qu'un ensemble linéaire E jouisse de la propriété λ', il faut et il suffit que, pour tout ensemble linéaire dénombrable D, l'ensemble $E+D$ jouisse de la propriété λ [2]).

On démontre aisément que la propriété λ' est héréditaire. Or, comme j'ai démontré [3]) la propriété λ' est dénombrablement additive.

Le but de cette Note est de démontrer ce

Théorème. *Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe un ensemble linéaire ayant la propriété λ' qui est homéomorphe à un ensemble linéaire dépourvu de la propriété λ'.*

Nous dirons, d'après M. Besicovitch [4]), qu'un ensemble linéaire indénombrable E est *concentré* s'il existe un ensemble linéaire dénombrable D (pas nécessairement contenu dans E) tel que pour tout ensemble linéaire ouvert U contenant D l'ensemble $E-U$ est au plus dénombrable. Dans ce cas, nous dirons aussi que l'ensemble E est *concentré par rapport à l'ensemble* D.

[1]) Cf. W. Sierpiński, C. R. Soc. Sci. et Lett. Varsovie **30** (1937), p. 257.

[2]) Pour la définition de la propriété λ, voir C. Kuratowski, Fund. Math. **21** (1933), p. 127.

[3]) l. c. sub [1]), p. 258 (Théorème 1).

[4]) A. S. Besicovitch, Acta Math. **62** (1934), p. 289.

Lemme. *Pour qu'un ensemble linéaire E jouisse de la propriété λ', il faut, et si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il suffit, qu'il ne contienne aucun sous-ensemble indénombrable concentré.*

Démonstration. 1. Soient E un ensemble linéaire à propriété λ' et E_1 un sous-ensemble indénombrable de E, concentré par rapport à l'ensemble (linéaire) dénombrable D. Il existe donc un G_δ linéaire $\Gamma = G_1 G_2 G_3, \ldots$, où $G_1, G_2, G_3, \ldots$, sont des ensembles linéaires ouverts, tel que $D \subset \Gamma$ et $\Gamma E \subset D$. Comme $D \subset \Gamma$, on a $D \subset G_n$ pour $n=1,2,\ldots$ et, l'ensemble E_1 étant concentré par rapport à D, les ensembles $E_1 - G_n$ sont au plus dénombrables. Or, $E_1 - \Gamma = \sum_{n=1}^{\infty}(E_1 - G_n)$. L'ensemble $E_1 - \Gamma$ est donc au plus dénombrable, de même que l'ensemble $E_1 = (E_1 - \Gamma) + \Gamma E_1 \subset (E_1 - \Gamma) + \Gamma E \subset (E_1 - \Gamma) + D$, contrairement à l'hypothèse. L'ensemble E ne peut donc contenir aucun sous-ensemble indénombrable concentré.

2. Admettons que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ et soit E un ensemble linéaire dépourvu de la propriété λ'. Il existe donc un ensemble linéaire dénombrable D tel que, pour tout G_δ linéaire tel que $D \subset \Gamma$, on a $\Gamma E - D \neq 0$.

Or, ile résulte de $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ qu'il existe une suite transfinie $\{G_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ formée de tous les ensembles ouverts contenant D. Posons

$$\Gamma_\alpha = \prod_{\xi \leqslant \alpha} G_\xi \qquad \text{pour} \quad \alpha < \Omega.$$

Γ_α est donc (pour $\alpha<\Omega$) un G_δ contenant D et on a (d'après la définition de D) $\Gamma_\alpha E - D \neq 0$. Il existe donc un $x_\alpha \in \Gamma_\alpha E - D$. Posons

$$E_1 = \{x_\alpha\}_{\alpha<\Omega}.$$

E_1 est donc un sous-ensemble de E.

Soit $\alpha<\Omega$. L'ensemble de tous les nombres ordinaux $\xi<\alpha$ est donc au plus dénombrable. Comme $v_\xi \in \Gamma_\xi E - D$, on a x_ξ non $\in D$ et l'ensemble $X-(x_\xi)$ (où X désigne l'ensemble de tous les nombres réels) est ouvert et contient D: il existe donc un nombre ordinal $\mu_\xi < \Omega$ pour lequel $X-(x_\xi) = G_{\mu_\xi}$. On a ainsi x_ξ non $\in G_{\mu_\xi}$ pour $\xi<\alpha$, donc

$$\sum_{\xi<\alpha}(x_\xi)\prod_{\xi<\alpha} G_{\mu_\xi} = 0.$$

Comme $\alpha<\Omega$ et $\mu_\xi<\Omega$ pour $\xi<\alpha$, il existe un nombre ordinal $\mu<\Omega$ tel que $\mu_\xi<\mu$ pour $\xi<\alpha$. On a donc

$$\prod_{\xi<\alpha} G_{\mu_\xi} \subset \prod_{\xi\leqslant\mu} G_\xi = \Gamma_\mu, \qquad \sum_{\xi<\alpha}(x_\xi)\Gamma_\mu = 0,$$

d'où, vu que $x_\mu \in \Gamma_\mu$, on trouve $x_\xi \neq x_\mu$ pour $\xi < \alpha$. Cela prouve que l'ensemble E_1 est indénombrable.

Soit U un ensemble ouvert quelconque contenant D. Il existe donc un nombre ordinal $\alpha < \Omega$ tel que $U = G_\alpha$. D'après la définition de Γ_ξ, on a $\Gamma_\xi \subset G_\alpha$ pour $\alpha \leqslant \xi < \Omega$; comme $x_\xi \in \Gamma_\xi E - D$, on a donc $x_\xi \in G_\alpha$ pour $\alpha \leqslant \xi < \Omega$, d'où $E_1 - G_\alpha \subset \sum_{\xi<\alpha}(x_\xi)$, ce qui prouve que l'ensemble $E_1 - U = E_1 - G_\alpha$ est au plus dénombrable et par conséquent que l'ensemble E_1 est concentré.

Le lemme se trouve ainsi établi.

M. F. Rothberger a démontré récemment à l'aide de l'hypothèse du continu qu'il existe un ensemble linéaire concentré H formé de nombres irrationnels de l'intervalle $I = \langle 0, 1 \rangle$ et tel que l'intervalle (fermé) I est une image biunivoque et continue de l'ensemble H. Soit $f(x)$ la fonction continue à valeurs distinctes, définie dans H et telle que $f(H) = I$.

Comme j'ai démontré [5]), l'hypothèse du continu entraîne l'existence d'un ensemble indénombrable S formé des nombres irrationnels de I et ne contenant aucun sous-ensemble indénombrable de mesure nulle. Soit

(1) $$H_1 = \underset{x}{E}[x \in H,\ f(x) \in S].$$

H_1 est donc un sous-ensemble indénombrable de H, par conséquent un ensemble indénombrable concentré et, d'après le lemme, dépourvu de la propriété λ'.

La fonction $f(x)$ étant continue dans $H \supset H_1$, l'ensemble plan

(2) $$Q = \underset{x,y}{E}[x \in H_1, y = f(x)]$$

est évidemment homéomorphe à l'ensemble H_1.

On sait définir une „courbe“ continue de Peano

(3) $$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

remplissant le carré $K = \underset{x,y}{E}[0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1]$ de manière que les points (x, y) du carré K à deux coordonnées irrationnelles soient des points *simples* (et non pas multiples) de la courbe (3), c. à d. tels qu'il existe un nombre unique $t \in I$ satisfaisant aux équations $x = \varphi(t)$ et $y = \psi(t)$. En particulier, G. Peano et M. D. Hilbert ont défini des „courbes“ satisfaisant à cette condition.

[5]) Fund. Math. **5** (1924), p. 184.

Posons

(4) $$T = \underset{x}{E}\Big[0 \leqslant x \leqslant 1,\ \big(\varphi(x), \psi(x)\big) \in Q\Big].$$

Les points de l'ensemble Q étant des points simples de la courbe continue et bornée (3), on voit sans peine que les fonctions (3) établissent une homéomorphie entre l'ensemble (linéaire) T et l'ensemble (plan) Q. L'ensemble T est donc aussi homéomorphe à l'ensemble H_1.

Or, soit T_1 un sous-ensemble indénombrable concentré de T. Si $t \in T_1$, on a d'après (4) $\big(\varphi(t), \psi(t)\big) \in Q$, donc d'après (2) $\varphi(t) \in H_1$ et $\psi(t) = f\big(\varphi(t)\big)$, donc $\psi(t) \in f(H_1) = \varphi$. Cela prouve que $\psi(T_1) \subset \varphi$.

Je dis que la fonction $\psi(t)$ est à valeurs distinctes dans T (donc à plus forte raison dans T_1).

En effet, admettons que:

(5) $$t_1 \in T \quad \text{et} \quad t_2 \in T \quad \text{pour } t_1 \neq t_2,$$

(6) $$\psi(t_1) = \psi(t_2).$$

Les points de Q étant des points simples de la courbe (3), on conclut de (4) et (5) que $\big(\varphi(t_1), \psi(t_1)\big) \neq \big(\varphi(t_2), \psi(t_2)\big)$, d'où selon (6) $\psi(t_1) \neq \psi(t_2)$. Comme, d'après (4), (2) et (5) $\varphi(t_1) \in H_1$, $\varphi(t_2) \in H_1$, $\psi(t_1) = f\big(\psi(t)\big)$ et $\psi(t_2) = f\big(\varphi(t_2)\big)$, on aurait $f(x_1) = f(x_2)$ pour tout couple x_1, x_2 de points distincts de H_1, ce qui est impossible, la fonction f étant à valeurs distinctes dans $H \supset H_1$.

L'ensemble T_1 étant indénombrable, l'ensemble $\psi(T_1)$ est un sous-ensemble indénombrable de φ, donc un ensemble qui n'est pas de mesure nulle. Or, T_1 étant concentré et la fonction $\psi(t)$ étant continue dans T, l'ensemble $\psi(T_1)$ est, comme on voit sans peine, concentré lui aussi, donc de mesure nulle (et même jouissant de la propriété C). On a donc une contradiction.

Ainsi l'ensemble T n'admet aucun sous-ensemble indénombrable concentré et, d'après le lemme, jouit de la propriété λ'. Or, nous avons démontré plus haut, que T est homéomorphe à l'ensemble H_1, qui est dépourvu de la propriété λ'. Le théorème est ainsi démontré.

M. Kuratowski a démontré [6]) que si un ensemble linéaire E jouissant de la propriété λ est une image biunivoque et continue d'un ensemble linéaire H, l'ensemble H jouit également de la propriété λ. Le théorème qui vient d'être établi montre qu'une proposition analogue ne subsiste pas pour la propriété λ' (si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$).

[6]) C. Kuratowski, Fund. Math. **21** (1933), p. 128.

Cependant on a ce

Théorème [7]). *Si l'ensemble linéaire E jouissant de la propriété λ' par rapport à la droite est une projection biunivoque d'un ensemble plan H, l'ensemble H jouit de la propriété λ' relativement au plan.*

Démonstration. Soit D un ensemble plan dénombrable; soit D_1 sa projection sur l'axe X. L'ensemble E jouissant de la propriété λ', il existe un G_δ linéaire Γ tel que $D_1 \subset \Gamma$ et $\Gamma E \subset D_1$. Soit Q l'ensemble de tous les points (x,y) du plan pour lesquels $x \epsilon \Gamma$. L'ensemble Q est donc un G_δ plan et on a évidemment $D \subset Q$. Soit enfin R l'ensemble de tous les points (x,y) du plan pour lesquels $x \epsilon D$. L'ensemble R étant formé d'un ensemble au plus dénombrable de droites parallèles à l'axe Y, et E étant une projection biunivoque de H, l'ensemble HR est au plus dénombrable, de sorte que l'ensemble $Q_1 = Q - (HR - D)$ est encore un G_δ. Or, comme $D \subset Q$, on a $D \subset Q_1$. D'autre part, comme $\Gamma E \subset D_1$, on a évidemment $QH \subset R$. Par conséquent $Q_1 H \subset HR - (HR - D) \subset D$. L'ensemble H jouit donc de la propriété λ' relativement au plan, c. q. f. d.

[7]) énoncé par moi sans démonstration dans la note citée au renvoi [1]).

Sur deux conséquences d'un théorème de Hausdorff.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

F. Hausdorff a démontré [1]) en utilisant l'axiome du choix, mais sans faire appel à l'hypothèse du continu, que la droite est somme d'une série transfinie de type Ω d'ensembles G_δ croissants et distincts. Le but de cette Note est de tirer deux conséquences de ce théorème.

1. Existence d'un ensemble indénombrable à propriété λ'. On dit qu'un ensemble linéaire E jouit de la propriété λ' s'il existe pour tout ensemble linéaire dénombrable D un ensemble linéaire Γ qui est un G_δ tel que $D \subset \Gamma$ et $E\Gamma \subset D$ (en d'autres mots, si tout ensemble linéaire dénombrable D est un G_δ relativement à l'ensemble $E+D$ [2]). Les démonstrations connues d'existence des ensembles indénombrables à propriété λ' utilisent l'hypothèse du continu [3]). Or, je vais prouver que cette existence résulte sans peine du théorème de Hausdorff.

En effet, d'après ce théorème, il existe une suite transfinie de type Ω, $\{\Gamma_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$, d'ensembles G_δ linéaires telle que

$$(1) \qquad \Gamma_\xi \subset \Gamma_\eta \quad \text{et} \quad \Gamma_\xi \neq \Gamma_\eta \qquad \text{pour} \quad \xi < \eta < \Omega,$$

et qu'en désignant par X l'ensemble de tous les nombres réels, on a

$$(2) \qquad X = \sum_{\alpha<\Omega} \Gamma_\alpha.$$

[1]) F. Hausdorff, Fund. Math. **26** (1936), p. 248.

[2]) Une définition équivalente de la propiété λ' est la suivante: un ensemble linéaire E jouit de la propriété λ' si pour tout ensemble linéaire dénombrable D l'ensemble $E+D$ jouit de la propriété λ (introduite par M. C. Kuratowski, Fund. Math. **21**, (1933), p. 127).

[3]) Voir p. ex. ma note dans C. R. Soc. Sc. Varsovie **30** (1937), p. 259.