

Il est à remarquer qu'on peut démontrer ce

Théorème 2. Toute sphère S est une somme de 2^{\aleph_0} ensembles disjoints dont chacun est $\frac{1}{3}S$.

Démonstration. Soient respectivement M_0 et N_0 les ensembles M_t et N_t pour $t=0$ et soit M'_0 l'ensemble qu'on obtient de M_0 en remplaçant son point p_0 (qui forme l'ensemble M_0^1) par le point O . On voit sans peine que $(O)+M_0^2 = \xi_0(N_0^1+N_0^2)$ et on en déduit facilement que $M_0^1 \frac{1}{3} N_0 = S$.

On a en outre le

Lemme 3⁷⁾. A, B et C étant trois ensembles tels que $A \supset B \supset C$ et $A \frac{1}{n} C$, on a $A \frac{1}{n+1} B$.

Ceci étant, posons $R = S - \sum_{0 < t < 1} M_t$. Comme $M'_0 M_t = 0$ pour $0 < t < 1$, on a $S \supset R \supset M'_0$. Il résulte de $M'_0 \frac{1}{3} S$ et du lemme 3 que $S \frac{1}{3} R$. La sphère S est donc somme de 2^{\aleph_0} ensembles disjoints, à savoir R et M_t ($0 < t < 1$), dont chacun est $\frac{1}{3}S$. Le théorème 2 se trouve ainsi démontré.

⁷⁾ Voir ma Note Sur le paradoxe de MM. Banach et Tarski, ce volume, p. 230, Lemme 1; cf. S. Banach et A. Tarski, Fund. Math. 6 (1924), p. 252, Corollaire 9.

Sur la division des ensembles de l'espace par les plans et des ensembles plans par les cercles.

Par

Hugo Steinhaus (Lwów).

1. Les ensembles A, B, C, \dots, E, \dots , dont nous aurons à parler dans la première partie de cette étude, seront des ensembles de l'espace, pourvus d'une mesure finie de Lebesgue; ils seront bornés sauf avis contraire. Leurs mesures respectives $|A|, |B|, |C|, \dots$ seront désignées par des minuscules correspondantes:

$$|A| = a, \quad |B| = b, \quad |C| = c, \quad \dots$$

Nous dirons qu'un plan Π sépare un ensemble E d'un autre ensemble F si presque tout point de E est situé d'un côté de Π et presque tout point de F du côté opposé.

Séparabilité de A, B, C ou condition S: il existe un plan qui sépare A de $B+C$, un qui sépare B de $C+A$ et de même un, séparant C de $A+B$.

En supposant que l'on ait choisi un côté d'un plan Π , la locution abrégée: Π découpe η de E signifie que celle des deux parties de E , séparées par Π , qui se trouve du côté choisi, a la mesure η . En disant que Π découpe α, β, γ de A, B, C , nous entendons que Π découpe α de A , β de B et γ de C , le côté choisi étant le même. Nous désignerons un tel plan par $\Pi(\alpha, \beta, \gamma)$.

Théorème 1. La séparabilité de A, B, C est nécessaire et suffisante pour que le plan $\Pi(\alpha, \beta, \gamma)$ existe, quel que soit le triple (α, β, γ) assujéti aux inégalités

$$(1) \quad 0 \leq \alpha \leq a, \quad 0 \leq \beta \leq b, \quad 0 \leq \gamma \leq c.$$

La thèse impliquant l'existence des plans $\Pi(a, 0, 0)$, $\Pi(0, b, 0)$ et $\Pi(0, 0, c)$, la nécessité de la condition S est immédiate. L'objet principal de cette étude est la démonstration que la condition S est suffisante.

2. Définitions et remarques préliminaires. En désignant par $K(\varrho, X)$ l'intérieur de la sphère de centre X et de rayon $\varrho > 0$, tout point X tel que

$$(2) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{|E \cdot K(\varrho, X)|}{4/3 \cdot \pi \varrho^3} = 1$$

est appelé *point de densité* de E . Nous désignons dans la suite l'ensemble des points de densité de E par E^* . La théorie de la mesure enseigne que les relations

$$(3) \quad |E - E^*| = 0 \quad |E^* - E| = 0, \quad E^{**} = E^*$$

sont vraies pour chaque E mesurable au sens de Lebesgue.

Appelons *le moindre ensemble convexe contenant E* le produit de tous les ensembles convexes contenant E ; désignons cet ensemble par $\psi(E)$. Or, on peut définir $\psi(E)$ d'une autre manière: en désignant par $\varphi(E)$ l'ensemble formé de tous les points des segments rectilignes dont les extrémités appartiennent à E , on peut écrire

$$(4) \quad \psi(E) = \varphi^3(E) = \varphi(\varphi(\varphi(E))).$$

Nous convenons de désigner les ensembles $\psi(A^*), \psi(B^*), \psi(C^*), \dots$ par les lettres correspondantes A, B, C, \dots

Remarquons qu'un ensemble E ne contient que des points intérieurs. En effet, F étant la frontière de E , un point X de F n'est jamais un point de densité de E , car la fraction (2) ne surpasse pas $1/2$ en ce cas. Or, $E \supset E^*$, donc $E^* \supset E^{**} = E^*$; il s'ensuit que F et E^* n'ont pas de points communs; par conséquent $E - F$ est un ensemble convexe qui contient E^* ; E étant, par définition, le moindre ensemble convexe contenant E^* , on a nécessairement $E = E - F$, donc $EF = 0$. Il s'ensuit que A, B, C, \dots, E, \dots sont des *domaines* convexes.

Deuxième remarque bien simple: il y a équivalence [entre la séparabilité de A, B, C et celle de A, B, C].

La troisième remarque à faire porte sur les *plans d'appui* d'un ensemble de type E ; la théorie classique des corps convexes enseigne qu'à tout plan Π correspondent deux plans d'appui de E parallèles à Π ; ces plans sont d'ailleurs confondus quand E est vide, ce qui se présente seulement pour $|E| = 0$. Par une droite extérieure à E on peut mener deux plans d'appui de E , qui sont distincts, sauf le cas signalé tout à l'heure.

On peut donner à la condition S une forme équivalente, mais plus simple: il n'y a pas de droite qui passe à la fois par A, B et C .

Pour démontrer cette équivalence, il suffit, d'après la deuxième remarque, d'établir l'équivalence entre la séparabilité de A, B, C et la non-existence de la droite en question. Supposons d'abord que la droite Δ passe par les points P_1, P_2, P_3 appartenant respectivement à A, B, C ; or, la première remarque, jointe à la séparabilité de A, B, C , implique que ces ensembles sont sans points communs deux à deux; les points P_1, P_2, P_3 sont donc distincts et on peut supposer que P_2 est situé entre P_1 et P_3 . Le plan Π qui sépare B de $A + C$ n'a pas de points communs avec ces domaines; ainsi P_1 et P_3 ce trouvent séparés de P_2 par Π , ce qui est en contradiction avec l'ordre de ces points sur Δ .

Supposons maintenant qu'il n'y ait pas de droite qui traverse A, B et C . Alors pour $P \in A$ et $Q \in B$, le segment PQ serait entièrement extérieur à C et l'ensemble $\varphi(A+B)$ n'aurait pas de points communs avec C . Or A et B étant des domaines convexes, $\varphi(A+B)$ l'est aussi. Dès lors, il est évident que l'on peut séparer C de $\varphi(A+B)$ par un plan; ce plan sépare C de $A+B$; l'existence des deux autres plans séparateurs se déduit de la même manière.

Il est ainsi démontré que la condition S pour A, B, C équivaut à la non-existence d'une droite traversant A, B et C .

Le symbole $E(\varrho)$. Désignons par $\varkappa E$ l'ensemble obtenu par la contraction de E vers son barycentre, \varkappa étant le coefficient de contraction. Soient $0 < \varrho < 1$ et

$$(5) \quad E(\varrho) = E - (1-\varrho)E, \quad E(\varrho) = E + E(\varrho)$$

par définition. Il est évident que l'on a

$$(6) \quad E \subset E(\varrho) \subset E$$

et que l'on obtient $E(\varrho)$ en ajoutant à E un certain ensemble dont la mesure tend vers 0 avec ϱ .

La relation (6) montre aussi que la séparabilité de A, B, C est équivalente à celle de $A, B, C(\varrho)$.

Il est important pour la suite de savoir qu'un ensemble tel que $E(\varrho)$ jouit d'une propriété que nous appellerons *cohérence*: soit Π un plan extérieur à E ; après avoir choisi le côté de Π , opposé à E , on peut considérer Π comme un plan mobile et le déplacer de manière qu'il reste parallèle à sa position primitive; quand Π passe de la position Π_1 , où il est un plan d'appui de E , à la position Π_2 , où il en est le second plan d'appui, la partie de E découpée par Π ne décroît pas; or, la cohérence exige qu'elle soit *croissante*; de même,

quand Π tourne autour d'une droite extérieure à E , en passant d'une position d'appui Π_1 à l'autre Π_2 par l'angle dièdre qui contient E , on exige que la monotonie de la partie découpée de E par Π soit stricte.

Il est évident que $E(\varrho)$ est cohérent, donc $E(\varrho)$ l'est aussi, car $E(\varrho)$ contient $E(\varrho)$ selon (5).

Unicité. Supposons que C soit cohérent; alors il n'y a qu'un seul plan orthogonal à une direction donnée et découpant γ de C du côté indiqué par cette direction. De même, une droite extérieure à C étant donnée et un sens de rotation autour de cette droite étant choisi, il n'y a qu'un seul demiplan délimité par cette droite et découpant γ de C du côté indiqué par la rotation; quand on parle d'un plan tout entier passant par la droite, le côté choisi est déterminé par le demiplan qui coupe C . Cette unicité est en défaut pour $\gamma=0$ et $\gamma=c$; dans ces cas, nous la rétablissons en demandant que les plans cherchés soient les plans d'appui de C ; pour un plan passant par une droite extérieure, le côté choisi est déterminé par le demiplan tangent.

Cette convention sera toujours sous-entendue dans la suite, quand il y aura question d'unicité.

La relation $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_n = \Pi_\infty$ signifie que pour tout point \mathcal{P} de l'espace les projections orthogonales \mathcal{P}_i de \mathcal{P} sur Π_i ($i=1, 2, \dots, \infty$) remplissent la relation $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_n = \mathcal{P}_\infty$; en disant que Π_0 est un plan d'accumulation de $\Pi(\varrho)$ pour $\varrho \rightarrow 0$, nous affirmons l'existence d'une suite $\{\varrho_n\}$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi(\varrho_n) = \Pi_0$. Si l'ensemble des distances entre $\Pi(\varrho)$ et un point fixe est borné, il existe au moins un plan d'accumulation de $\Pi(\varrho)$ situé au fini.

Les démonstrations des théorèmes 1, 2, 4 et 5 comportent plusieurs lemmes géométriques très simples; elles tirent parti, en outre, de deux propositions de topologie, relevant d'un principe classique que voici:

$P=g(Q)$ étant une transformation continue définie pour une courbe de Jordan J du plan (Q) et pour son intérieur I , et P_0P étant un vecteur issu d'un point fixe P_0 du plan (P), on suppose que l'angle de ce vecteur avec une droite fixe du plan (P) éprouve une variation non nulle, quand le point Q a fait le tour de J dans un sens donné et d'un mouvement continu; alors, il existe un Q_0 dans I tel que $P_0=g(Q_0)$.

La démonstration du principe en question utilise le fait qu'en niant l'existence d'un Q_0 tel que $P_0=g(Q_0)$ et en remplaçant J par une courbe très proche, située dans I , on change peu la variation de l'angle; cette variation étant un multiple de 2π , elle ne change donc pas du tout. En réduisant J de plus en plus, on obtient une courbe J' voisine d'un point Q' ; son image $g(J')$ est donc voisine de $P'=g(Q')$ où $P' \neq P_0$. Mais alors la variation est nulle, car P_0 est extérieur à la courbe J_0 ; comme elle n'était pas nulle au début, elle a dû changer, contrairement à ce qui vient d'être constaté.

Proposition I. $P=g(Q)$ étant une transformation continue, définie pour $J+I$ comme tout à l'heure, on suppose que $R=g(J)$ est aussi une courbe de Jordan parcourue sans réculs par P , quand J est parcourue de la même manière par Q . Alors tout point P_0 intérieur à R est l'image d'un au moins Q_0 de I :

$$P_0=g(Q_0) \quad \text{où} \quad Q_0 \in I.$$

Cette proposition est une application immédiate du principe envisagé.

Proposition II. $P=g(Q)$ étant une transformation continue, définie pour Q appartenant à $J+I$, où J est un cercle et I son intérieur, on la suppose telle que les images $P_1=g(Q_1)$ et $P_2=g(Q_2)$ de deux points Q_1 et Q_2 diamétralement opposés sur J soient toujours symétriques par rapport à un point fixe P_0 . Alors P_0 est l'image d'un au moins Q_0 de $J+I$.

Pour établir cette proposition, il suffit de remarquer que l'angle du vecteur P_0P avec une droite fixe subit une variation égale à $k\pi$, k étant impair, quand Q fait un demitour de J ; en effet la position finale P_2 de P est symétrique, par rapport à P_0 , à sa position initiale P_1 . Quand Q continue son chemin en faisant le second demitour, P passe de P_2 à P_1 en parcourant un chemin congruent avec P_1P_2 ; son chemin P_2P_1 s'obtient en tournant P_2P_1 d'angle π autour du point P_0 . La variation de l'angle est donc la même pour les deux chemins et la variation totale est égale à $2k\pi$, donc non-nulle, car k est impair. Ainsi, la proposition II se réduit au principe général.

Nos raisonnements seront facilités par l'emploi des figures, à savoir par des projections orthogonales sur un plan orthogonal aux plans qui y seront représentés. Les droites du dessin seront donc des images de plans, et les points des images de droites, les

ensembles de l'espace étant remplacés par leurs projections. En disant p. ex. que la droite Π découpe γ de C , nous exprimerons le fait que le plan désigné par la même lettre découpe γ de C . Ce langage, approprié aux figures, ne prêtera donc à aucun malentendu.

3. Démonstration du théorème 1. Supposons C cohérent et a, b, c positifs; ces restrictions seront supprimées à la fin.

Dans ces conditions, on a avant tout les conséquences suivantes de S:

Lemme 1. Il existe un plan $\Pi^1 = \Pi(a, 0, 0)$.

Lemme 2. Il existe un plan $\Pi^2 = \Pi(a, 0, c)$.

Les deux lemmes résultent immédiatement de S.

Lemme 3. Pour $0 \leq \gamma \leq c$, il existe un plan $\Pi^3 = \Pi(a, 0, \gamma)$.

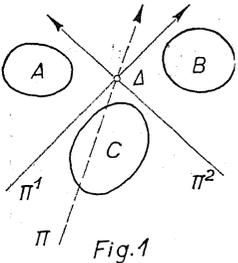
Examinons d'abord le cas où Π^1 coupe Π^2 suivant une droite Δ et choisissons un plan orthogonal à Δ comme plan de projections. Les droites Π^1 et Π^2 de la fig. 1 représentent ces plans et la droite Π y désigne un plan mobile qui tourne autour de Δ . Quand Π passe de la position Π^1 à la position Π^2 en balayant l'angle qui contient C et son angle opposé, la partie de C découpée par Π change d'une manière continue; si l'on convient que le côté choisi soit toujours à gauche en regardant vers les pointes des flèches, la partie en question est nulle au début et c à la fin; elle est donc égale à γ pour une position intermédiaire Π^3 de la droite Π ; Π^3 est bien un $\Pi(a, 0, \gamma)$, car la droite mobile Π ne cesse d'avoir A à sa gauche et B à sa droite.

Le cas où Π^1 et Π^2 sont parallèles exige le choix d'un plan de projection orthogonal à Π^1 et Π^2 , et d'un plan mobile Π parallèle à Π^1 et Π^2 qui balaye le domaine compris entre eux; la fig. 1 éprouve alors une modification, Δ étant à l'infini, mais le raisonnement reste le même.

Le cas où Π^1 et Π^2 sont parallèles exige le choix d'un plan de projection orthogonal à Π^1 et Π^2 , et d'un plan mobile Π parallèle à Π^1 et Π^2 qui balaye le domaine compris entre eux; la fig. 1 éprouve alors une modification, Δ étant à l'infini, mais le raisonnement reste le même.

Lemme 4. Il existe un plan $\Pi' = \Pi(a, b, 0)$ et un plan $\Pi'' = \Pi(a, b, \gamma)$ parallèle à Π' .

L'existence du plan $\Pi' = \Pi(a, b, 0)$ résulte immédiatement de S. L'ensemble C étant borné, il existe un plan $\Pi'' = \Pi(a, b, c)$ parallèle à Π' .



Les droites Π' et Π'' de la fig. 2 en indiquent la situation, le plan de projection étant orthogonal à Π' et Π'' . Le dessin montre une droite mobile Π se déplaçant parallèlement à Π' de Π' à Π'' ; la continuité de la partie de C découpée par Π implique l'existence d'une position intermédiaire de Π , à savoir $\Pi^4 = \Pi(a, b, \gamma)$.

Lemme 5. Il existe un plan $\Pi^5 = \Pi(0, b, \gamma)$.

Ce lemme résulte du lemme 3 par le changement de lettres.

Lemme 6. Il existe un plan $\Pi^6 = \Pi(0, 0, \gamma)$.

Posons $c - \gamma = \gamma'$; le lemme 4 fournit un plan $\Pi(a, b, \gamma')$, que l'on peut désigner par $\Pi(0, 0, \gamma)$ en fixant convenablement son côté choisi.

Lemme 7. Le plan Π^3 du lemme 3 coupe le plan Π^4 du lemme 4.

En effet, ces deux plans ne sont pas identiques, car Π^3 sépare A de B et Π^4 ne le fait pas; ils ne sont non plus parallèles, car le côté choisi de Π^3 et de Π^4 est celui où se trouve A ; la partie découpée de C étant la même pour Π^3 et Π^4 , la parallélité serait incompatible avec la cohérence de C .

La fig. 3 montre les droites Π^3 , Π^4 et Π^5 des lemmes 3 et 4; le plan de projections est orthogonal à l'intersection Γ de Π^3 et Π^4 .

Lemme 8. En désignant par δ_3 l'angle entre les directions positives des droites Π^3 et Π^5 , par δ l'angle entre les directions positives d'une droite mobile Π et de la droite fixe Π' , il y a pour tout δ donné entre 0 et δ_3 ($0 \leq \delta \leq \delta_3$) une et une seule droite Π découpant γ de C^1 .

Ce lemme résulte de la cohérence de C ; pour $\delta = 0$ et $\delta = \delta_3$, Π se confond avec Π' et Π^5 respectivement.

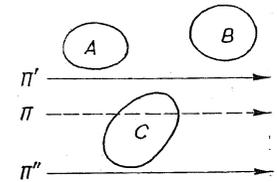


Fig. 2

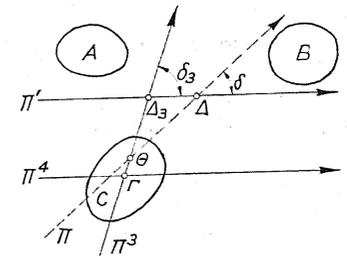


Fig. 3

¹⁾ En tenant compte des conventions antérieures.

Lemme 9. Pour tout δ assujéti aux inégalités $0 < \delta < \delta_3$, le point Δ , intersection de Π avec Π' , est situé sur Π' à droite du point Δ_3 en lequel Π' est coupé par Π^3 .

En effet, si Δ était à gauche de Δ_3 ou sur Δ_3 , l'intersection Θ de Π avec Π^3 serait située à gauche de Π' ou sur Π' ; on aurait alors deux droites, Π et Π^3 , dirigées vers le côté gauche de Π' et passant par un point Θ situé à gauche de Π' ou sur Π' , chacune d'elles découpant γ de C ; or, C est entièrement à droite de Π' ; on aurait donc une contradiction avec l'unicité garantie par la cohérence de C .

Lemme 10. Quand δ diminue de δ_3 à 0 sans atteindre la valeur 0 ($\delta_3 \geq \delta > 0$), le point Δ se meut vers le positif sur Π' en partant de Δ_3 .

Ce lemme peut être démontré par le même raisonnement que le lemme 9.

Lemme 11. La distance $\Delta_3\Delta$ est une fonction continue de δ pour $\delta_3 \geq \delta > 0$.

La monotonie de la fonction en question ayant été établie dans le lemme 10, une discontinuité serait nécessairement un saut; en ce cas, on aurait pour un $\delta = \delta_0$ deux positions-limites distinctes du point Δ , à savoir Δ_1 pour $\delta_0 + 0$ et Δ_2 pour $\delta_0 - 0$; $\Delta_1 \neq \Delta_2$. En menant par Δ_1 et par Δ_2 des droites faisant avec Π' l'angle δ_0 , on obtiendrait deux droites découpant γ de C , car chacune d'elles est une limite de telles droites; on aurait ainsi une contradiction avec l'unicité exprimée dans le lemme 8.

Lemme 12. Le mouvement de la droite Π est continu pour δ variant de δ_3 à 0 ($\delta_3 \geq \delta \geq 0$).

En vertu du lemme 11, on n'a qu'à étudier le déplacement de $\Pi(\delta)$ pour δ tendant vers 0. L'ensemble des distances entre $\Pi(\delta)$ ($\delta_3 \geq \delta > 0$) et le point Γ , est borné, car chaque droite $\Pi(\delta)$ coupe C ; il y a donc des droites d'accumulation au fini de $\Pi(\delta)$ pour $\delta \rightarrow 0$; la discontinuité exigerait qu'il y ait au moins deux droites d'accumulation distinctes; ces droites, dont chacune découperait γ de C , seraient parallèles à Π' et dirigées comme Π' ; il y aurait donc contradiction avec le lemme 8.

Lemme 13. Pour $0 \leq \delta \leq \delta_3$, A reste entièrement à gauche de $\Pi(\delta)$.

Ce lemme résulte de ce que A est à gauche de Π' et de Π^3 , de la remarque terminant la page 251 et du lemme 9.

Lemme 14. La partie de B découpée par $\Pi(\delta)$ varie de 0 à b d'une manière continue et non décroissante avec δ variant de δ_3 à 0.

La continuité résulte du lemme 12; quant à la monotonie, remarquons que B est situé sur le plan de projections entièrement à gauche de Π' et à droite de Π^3 ; en vertu du lemme 10, cette partie du plan est balayée par $\Pi(\delta)$ de manière que si $\delta_3 \geq \delta_2 \geq \delta_1 \geq 0$, la portion balayée pour $\delta_3 \geq \delta \geq \delta_1$ contient celle balayée pour $\delta_3 \geq \delta \geq \delta_2$.

En désignant par $\Pi(\xi, \eta, \gamma)$ le plan $\Pi(\delta)$, dont il est question dans les lemmes 13 et 14, le résultat démontré est donc le suivant: pour δ variant de δ_3 à 0, ce plan se meut d'une manière continue en restant orthogonal à un plan fixe et, au cours de ce mouvement, ξ reste égal à a , tandis que η varie d'une manière continue et monotone de 0 à b .

Ceci établi, reprenons la démonstration du théorème. Introduisons un plan cartésien auxiliaire (P) , les points $P(\xi, \eta)$ de ce plan ayant ξ, η pour coordonnées rectangulaires. A tout plan $\Pi(\xi, \eta, \gamma)$, on peut faire correspondre le point $P(\xi, \eta)$ comme image. Les lemmes 3, 4, 5, 6 établissent l'existence de quatre plans $\Pi^3, \Pi^4, \Pi^5, \Pi^6$ dont les images sur (P) sont respectivement les points $P(a, 0), P(a, b), P(b, 0)$ et $P(0, 0)$; nous les désignerons par P_3, P_4, P_5 et P_6 . Ils sont les sommets d'un rectangle R du plan (P) .

Quand $\Pi(\xi, \eta, \gamma)$ passe de la position Π^3 à la position Π^4 en effectuant le mouvement continu examiné tout à l'heure, son image $P(\xi, \eta)$ décrit le côté P_3P_4 de R d'un mouvement continu et sans réculs. Il est évident que l'on peut trouver d'une manière analogue un mouvement continu de $\Pi(\xi, \eta, \gamma)$, qui relie ainsi les positions Π^4 et Π^5 , puis un autre qui relie Π^5 et Π^6 , et finalement encore un de Π^6 à Π^3 . Nous obtenons un mouvement continu de $\Pi(\xi, \eta, \gamma)$ pendant lequel $P(\xi, \eta)$ fait le tour de R , continu et sans réculs.

Considérons une sphère Σ . A tout point Q de Σ , on peut faire correspondre un plan unique $\Pi(Q) = \Pi(\xi, \eta, \gamma)$ parallèle au plan tangent à Σ en Q et dont le côté choisi soit celui qui correspond au côté du plan tangent occupé par le centre de Σ . Cette correspondance est biunivoque. Elle est continue; en effet la discontinuité impliquerait l'existence de deux limites distinctes pour $\Pi(Q)$ au voisinage de $Q = Q_0$; il y aurait alors deux plans distincts remplissant les mêmes conditions que $\Pi(Q_0)$, contrairement à l'unicité.

La correspondance entre Q et $\Pi(\xi, \eta, \gamma) = \Pi(Q)$ définit un couple de fonctions continues $\xi = \xi(Q)$, $\eta = \eta(Q)$ de Q et attribuée à tout

point Q de Σ un point $P(\xi, \eta)$ sur (P) . D'autre part, le mouvement envisagé $\Pi^3 \rightarrow \Pi^4 \rightarrow \Pi^5 \rightarrow \Pi^6 \rightarrow \Pi^3$ du plan $\Pi(\xi, \eta, \gamma)$ fournit un mouvement continu du point correspondant Q sur Σ ; la trajectoire de Q est donc composée de quatre arcs des grands cercles, car $\Pi(\xi, \eta, \gamma)$ passe d'une position $\Pi^{(i)}$ à la suivante en restant orthogonal à un plan fixe Π_i ($i=3, 4, 5, 6$). Il existe donc sur Σ un quadrilatère sphérique dont les sommets Q_3, Q_4, Q_5, Q_6 sont liés par des arcs de grands cercles et dont les images données par le couple de fonctions $\xi = \xi(Q)$, $\eta = \eta(Q)$ sont les sommets P_3, P_4, P_5, P_6 de R . Quand Q parcourt le circuit de J , $g(Q) = P(\xi(Q), \eta(Q))$ fait le tour de R , continu et sans réculs. Or, J n'est pas entrecroisé; en effet, si p. ex. les côtés Q_3Q_4 et Q_5Q_6 avaient un point commun Q_0 , l'image P_0 de ce point appartiendrait à la fois aux côtés opposés P_3P_4 et P_5P_6 de R , ce qui est impossible.

J est donc une courbe de Jordan, puisque $R = g(J)$. Dès lors la proposition I s'applique à la transformation $P = g(Q)$; donc, tout point P intérieur à R est l'image d'un (au moins) point Q du domaine sphérique I que J délimite sur Σ . Or, R tout entier est l'image de J ; donc, tout point P du domaine fermé rectangulaire composé de R et de son intérieur est image d'un point Q de Σ ; en particulier, le point $P(a, \beta)$ ($0 \leq a \leq a, 0 \leq \beta \leq b$) en est une d'un certain point Q_0 ; le plan $\Pi(Q_0)$ est donc bien le plan $\Pi(a, \beta, \gamma)$, dont l'existence est affirmée par le théorème 1.

Restent à supprimer les hypothèses supplémentaires, faites au début de la démonstration.

Pour nous débarrasser de la restriction que C soit cohérent, admettons que C ne l'est plus et désignons par $\Pi_\varrho(a, \beta, \gamma)$ le plan relatif aux ensembles $A, B, C(\varrho)$; rappelons que pour $0 < \varrho < 1$, $C(\varrho)$ est par définition toujours cohérent et diffère peu de C . Par conséquent, d'une part le plan $\Pi_\varrho(a, \beta, \gamma)$ existe pour $0 < \varrho < 1$, comme nous venons de le montrer, et d'autre part, ce plan coupe l'ensemble C ou en est tout au moins un plan d'appui; il est donc à la distance bornée d'un point fixe de l'espace; le plan d'accumulation de $\Pi_\varrho(a, \beta, \gamma)$ pour $\varrho \rightarrow 0$ est par suite un plan au fini, qui est le $\Pi(a, \beta, \gamma)$ cherché pour A, B, C .

L'autre restriction était celle que $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$. Or, admettons que certains de ces nombres soient égaux à 0. Remplaçons les ensembles A, B, C relatifs à ces nombres par des sphères $A_\varrho, B_\varrho, C_\varrho$ de rayon ϱ ($0 < \varrho < 1$), placées de manière que les plans de séparation de A, B, C ne cessent pas séparer les ensembles ainsi mo-

difiés. Il existe évidemment pour tout ϱ ($0 < \varrho < 1$) un plan $\Pi_\varrho(a, \beta, \gamma)$ relatif à $A_\varrho, B_\varrho, C_\varrho$. Il y a deux cas à distinguer: ou bien $C_\varrho = C$, alors le plan Π_ϱ coupe où touche C , ou bien C_ϱ est une sphère, alors Π_ϱ est à la distance ne dépassant pas 1 du centre de C_ϱ . En tout cas, il existe donc dans le fini un plan d'accumulation de $\Pi_\varrho(a, \beta, \gamma)$ pour $\varrho \rightarrow 0$.

Ainsi le théorème 1 se trouve établi en toute généralité.

4. Le théorème suivant ne suppose pas la séparabilité de A, B, C :

Théorème 2. *Le plan $\Pi(a/2, b/2, c/2)$ existe toujours, même dans le cas où A, B, C ont des points communs²⁾.*

Démonstration. Supposons d'abord que les ensembles A, B, C soient bornés, restriction qui sera supprimée à la fin.

Le théorème étant évident pour $a = b = c = 0$, nous pouvons admettre que $c > 0$. Remplaçons C par l'ensemble cohérent $C(\varrho)$. Considérons le plan auxiliaire (P) et la sphère Σ , employés dans la démonstration du théorème 1. Posons $\gamma = c/2$; à tout point Q de Σ , vient correspondre un plan unique $\Pi(Q) = \Pi(\xi, \eta, c/2)$ et un point $P(\xi, \eta)$ de (P) . Cette correspondance est univoque et continue. Considérons sur Σ deux antipodes Q_1 et Q_2 ; les deux plans $\Pi(Q_1)$ et $\Pi(Q_2)$ sont identiques, comme parallèles et découpant $c/2$ de $C(\varrho)$; mais le côté choisi de $\Pi(Q_1)$ est opposé à celui choisi de $\Pi(Q_2)$, conformément aux conventions du début. Il s'ensuit qu'en écrivant

$$\Pi(Q_1) = \Pi(\xi_1, \eta_1, c/2) \quad \text{et} \quad \Pi(Q_2) = \Pi(\xi_2, \eta_2, c/2),$$

on obtient

$$(7) \quad \xi_1 + \xi_2 = a \quad \text{et} \quad \eta_1 + \eta_2 = b,$$

et les points $P_1 = g(Q_1) = P(\xi_1, \eta_1)$, $P_2 = g(Q_2) = P(\xi_2, \eta_2)$, c. à d. images respectives de Q_1 et Q_2 sur (P) , sont symétriques par rapport au point $P_0 = P(a/2, b/2)$. En prenant pour J l'équateur de Σ et pour I l'hémisphère délimitée par J , on peut appliquer immédiatement à $g(Q)$ la proposition II, qui assure l'existence d'un point Q_0 sur Σ tel que $P_0 = g(Q_0)$. Or, les coordonnées de P_0 sont $\xi_0 = a/2$ et $\eta_0 = b/2$; on aura donc

$$\Pi(Q_0) = \Pi(a/2, b/2, c/2),$$

²⁾ Ce problème, proposé par l'auteur, a été résolu d'abord par M. Banach à l'aide du théorème de MM. Borsuk et Ulam (voir K. Borsuk, *Fundam. Math.* 20 (1933), p. 177 et suivantes, Satz II); la solution a été publiée dans une Note due à la collaboration de plusieurs auteurs (*Z topologii, Mathesis Polska* 1933, en polonais).

ce qui prouve l'existence du plan en question pour $A, B, C(\varrho)$. En le désignant par $\Pi(\varrho)$, on n'a qu'à répéter le raisonnement employé p. 254, qui assure l'existence d'un plan d'accumulation de $\Pi(\varrho)$ pour $\varrho \rightarrow 0$ dans le fini; ce plan est précisément le plan $\Pi(a/2, b/2, c/2)$ dont il s'agit pour établir le théorème 2.

Reste à supprimer la restriction que A, B et C soient bornés. Constatons d'abord que la démonstration s'applique sans changements aux cas où A , ou B , ou tous les deux, ne sont pas bornés; par contre, l'hypothèse que C est borné y intervient d'une façon essentielle. Or, si C n'est pas borné, on peut admettre que $c > 0$, car, pour $c = 0$, on peut remplacer C par un ensemble borné quelque sans changer le problème. En désignant par C_r la partie de C contenue à l'intérieur d'une sphère S_r de centre fixe F et de rayon r , et en écrivant c_r pour $|C_r|$, on se trouve dans le cas où l'existence du plan $\Pi_r = \Pi(a/2, b/2, c_r/2)$ relatif à A, B, C_r vient d'être démontrée.

Il suffit donc de montrer que la distance entre Π_r et F ne surpasse pas une borne finie quand $r \rightarrow \infty$. Déterminons r_0 par la condition

$$|C_{r_0}| = 3c/4;$$

pour $r > r_0$, on aura $c_r \geq 3c/4$, d'où $c_r/2 \geq 3c/8$. D'autre part, la partie de C extérieure à S_{r_0} est de mesure $c/4$, donc la partie de C_r ($r > r_0$) extérieure à S_{r_0} a une mesure qui ne surpasse pas $c/4$; or, on a

$$c/4 < 3c/8 \leq c_r/2;$$

il est donc impossible que le plan Π_r , qui divise C_r en deux parties de mesure égale, soit extérieur à S_{r_0} ; il s'ensuit que la distance entre Π_r et F ne dépasse pas r_0 , quel que soit $r > r_0$.

Le plan $\Pi_r = \Pi(a/2, b/2, c_r/2)$ possède donc, pour $r \rightarrow \infty$, un plan d'accumulation $\Pi(a/2, b/2, c/2)$ au fini, ce qui achève la démonstration du théorème 2.

Théorème 3. Les mesures positives a, b, c de A, B, C et les nombres α, β, γ étant donnés d'avance, on peut trouver toujours 3 ensembles A, B, C bornés, sans points communs deux à deux et tels que le plan $\Pi(\alpha, \beta, \gamma)$ n'existe pas, sauf pour chacun des 3 triples (α, β, γ) exceptionnels:

$$(8) \quad 1^0 (0, 0, 0), \quad 2^0 (a, b, c), \quad 3^0 (a/2, b/2, c/2),$$

pour lesquels le plan $\Pi(\alpha, \beta, \gamma)$ existe toujours.

Démonstration. L'existence de $\Pi(\alpha, \beta, \gamma)$ pour les triples 1^0 et 2^0 résulte immédiatement de ce que A, B, C sont bornés; pour le triple 3^0 , elle est garantie par le théorème 2; reste à montrer que les triples (8) sont les seuls exceptionnels.

Considérons d'abord le cas $0 < \gamma < c$. Soient: C une sphère fixe de volume c et B une couche sphérique concentrique avec C dont les rayons sont liés par la condition que le volume de B soit égal à b . Quand les rayons de B croissent, $\Pi(\alpha, \beta, \gamma)$ ne cesse pas couper la sphère invariable C ; il s'ensuit que la partie découpée par Π de B s'approche indéfiniment de $b/2$; si β était choisi différent de $b/2$, le plan $\Pi(\alpha, \beta, \gamma)$ n'existerait pas pour une couche sphérique B d'un rayon suffisamment grand. On a par conséquent $\beta = b/2$, et de même $\alpha = a/2$; le même raisonnement conduit maintenant à $\gamma = c/2$. Evidemment, l'hypothèse $0 < \alpha < a$ ou $0 < \beta < b$ fournit encore la même conclusion.

La question se réduit ainsi à 8 triples que l'on obtient en donnant respectivement à α, β, γ leurs valeurs extrêmes: 0 ou a , 0 ou b et 0 ou c . Deux de ces triples sont identiques à 1^0 et 2^0 ; chacun des 6 qui restent contient un 0 et un nombre positif.

Considérons p. ex. le triple $(\alpha, 0, c)$; si l'on prend pour B et C les solides définis tout à l'heure, on voit aussitôt que $\Pi(\alpha, \beta, \gamma)$ n'existe pas. Les 5 autres triples peuvent être traités de la même manière. Le théorème 3 se trouve ainsi établi.

* * *

5. La deuxième partie de cette étude porte sur des ensembles plans A, B, C, \dots . Les notations et les moyens employés seront analogues à ceux de la première partie, mais le problème ne s'en obtient pas par la simple réduction du nombre des dimensions; il y aura ici encore trois ensembles A, B, C que l'on cherchera de diviser par un cercle, en convenant de considérer la droite comme un cercle avec centre à l'infini; il faudra donc entendre le mot „cercle“ dans ce sens étendu, sauf avis contraire. Le cercle $K(\alpha, \beta, \gamma)$ découpe, par définition, α de A , β de B et γ de C , les parties découpées étant intérieures au cercle; quand le centre de K est à l'infini, les parties découpées sont toujours du côté du centre.

La séparabilité de A, B, C signifie l'existence d'une droite qui sépare A de $B + C$, d'une autre qui sépare B de $C + A$ et d'une troisième séparant C de $A + B$. Ici encore, la séparabilité équivaut à la non-existence d'une droite qui passe à la fois par A, B et C .

La définition de l'ensemble plan cohérent $C(\varrho)$ est tout à fait analogue à celle adoptée pour l'espace. Si E est un ensemble cohérent, Q un point donné et η un nombre assujéti aux inégalités $0 < \eta < |E|$, il y a toujours un seul cercle de centre Q qui découpe η de E ; pour $\eta=0$ et pour $\eta=|E|$, cette unicité subsiste quand on convient de choisir le cercle maximum qui laisse E à l'extérieur, ou bien le cercle minimum qui contient E . L'unicité s'étend aussi au cas où Q est à l'infini, en tenant compte du sens attribué au terme cercle; Q étant défini alors par une demidroite, le cercle cherché devient une droite orthogonale à la demidroite Q et découpant η de E du côté indiqué par Q ; pour les valeurs extrêmes de η , la droite en question est, par définition, une droite d'appui de E .

La relation $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = K_\infty$ est facile à définir pour les cercles de rayons finis: elle signifie que les centres et les rayons des K_n tendent respectivement vers ceux de K_∞ . Dans le cas où il y a parmi les $K_i (i=1, 2, \dots, \infty)$ des cercles de rayon infini, la relation $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = K_\infty$ est à définir par $\lim_{n \rightarrow \infty} K'_n = K'_\infty$, en désignant par $K'_i (i=1, 2, \dots, \infty)$ le cercle obtenu de K_i par l'inversion, le centre d'inversion étant choisi en dehors de tous les K_i . La notion de cercle d'accumulation de $K(\varrho)$ pour $\varrho \rightarrow 0$ est analogue à celle du plan d'accumulation. Si l'ensemble des distances entre $K(\varrho)$ et un point fixe est borné, il existe au moins un cercle d'accumulation.

Nous appelons cercle infini l'ensemble de points à l'infini; deux points diamétralement opposés sur ce cercle sont, par définition, donnés par deux demidroites de directions opposées.

Théorème 4. *La séparabilité de A, B, C est nécessaire et suffisante pour que le cercle $K(\alpha, \beta, \gamma)$ existe, quel que soit le triple (α, β, γ) assujéti aux inégalités (1).*

Démontrons-en la nécessité. En supposant que la séparabilité est en défaut, il existe une droite L passant par A, B et C ; désignons par L, M, N trois points sur L appartenant respectivement à A, B, C ; soit p. ex. M situé entre L et N . Le cercle $K(\alpha, 0, \varrho)$ n'est pas une droite, car il sépare L et N de M ; d'autre part, il contient A et C dans son intérieur en laissant B à l'extérieur; il contiendrait donc L et N à l'intérieur et M à l'extérieur, ce qui est impossible. La nécessité de la condition est ainsi établie.

La démonstration de sa suffisance se réduit aux considérations analogues à celles qui ont servi pour démontrer le théorème 1. En supposant que C est cohérent, on utilise les lemmes 8-14, donnant cette fois aux termes droite et point leur sens ordinaires. On obtient ainsi le résultat suivant:

A toute direction du plan, définie par son angle δ avec une direction fixe, correspond une droite unique, ayant cette direction et découpant à sa gauche γ de C .

En employant les notations du lemme 8 et de la fig. 3, on peut prendre Π' pour la direction fixe; Π représente alors la droite unique. Quand δ décroît de δ_3 à $\delta_3 - 2\pi$, Π tourne d'une manière continue et revient à sa position initiale.

On a maintenant une difficulté de moins: on peut tracer les droites Π^3, Π^4, Π^5 et Π^6 sur le même plan, ce qui n'était pas possible dans le cas de l'espace, car les projections des ensembles séparables ne le sont pas toujours.

La fig. 4 montre les droites en question; δ_5 est l'angle entre Π' et Π^5 . Quand δ décroît de δ_3 à 0, la partie de A découpée par Π reste égale à a , la partie de B découpée par Π varie de 0 à b ; pour $0 \geq \delta \geq \delta_5$, la partie de A varie de a à 0, celle de B restant égale à b , pour $\delta_5 \geq \delta \geq -\pi$ la partie de A reste égale à 0, celle de B variant de b à 0; enfin, pour $-\pi \geq \delta \geq \delta_3 - 2\pi$ la partie de A varie de 0 à a , tandis que celle de B reste égale à 0; chacune des variations énumérées est monotone.

Désignons par $K(\xi, \eta, \gamma)$ le cercle de centre Q , qui contient dans son intérieur γ de C . Le rayon $r(Q)$ de ce cercle est une fonction continue de Q ; en effet, une discontinuité de $r(Q)$ pour $Q=Q_0$ impliquerait l'existence de deux rayons-limites r_1 et r_2 au voisinage de Q_0 ; on aurait alors deux cercles concentriques découpant γ de C , contrairement à l'unicité. Cette continuité subsiste pour les Q infinis, quand on lui donne le sens suivant: pour Q tendant vers Q_0 à l'infini

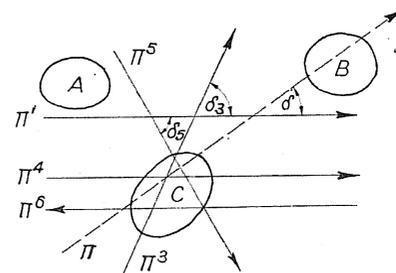


Fig. 4

le cercle $K(Q)$ tend vers la droite $K(Q_0)$. En effet, si la convergence était en défaut, on aurait deux droites-limites parallèles et de même sens, découpant γ de C , contrairement à unicité.

Les deux derniers résultats prouvent que, $K(Q)$ désignant le cercle de centre Q découpant γ de C , la relation

$$(9) \quad K(\xi, \eta, \gamma) = K(Q)$$

définit deux fonctions $\xi(Q)$, $\eta(Q)$ continues sur le plan (Q) , γ compris le cercle infini, et telles que, Q effectuant le tour de J , le point $P(\xi, \eta)$ aux coordonnées $\xi = \xi(Q)$ et $\eta = \eta(Q)$, qui est l'image de Q sur le plan cartésien (P) , fait le tour continu et sans reculs sur le rectangle R à sommets $(a, 0)$, (a, b) , $(b, 0)$, $(0, 0)$. La transformation $P = g(Q) = P(\xi(Q), \eta(Q))$ obéit donc à la proposition I, ce qui entraîne immédiatement l'existence de $K(a, \beta, \gamma)$. La restriction concernant la cohérence de C peut être enlevée comme dans le cas de l'espace, ce qui achève la démonstration du théorème 4 en toute généralité.

Théorème 5. *Le cercle $K(a/2, b/2, c/2)$ existe toujours, même dans le cas où A, B et C ont des points communs.*

Démonstration. Pour appliquer les raisonnements qui ont servi à la démonstration du théorème 2, il suffit de montrer que la transformation $P = g(Q)$, définie dans la démonstration du théorème 4, jouit dans le cas où $\gamma = c/2$ de la propriété de symétrie: à savoir, Q_1, Q_2 désignant deux points opposés du cercle J et $P_1 = g(Q_1) = P(\xi_1, \eta_1)$, $P_2 = g(Q_2) = P(\xi_2, \eta_2)$ leurs images respectives, on a les relations (7). En effet, il est bien évident que les cercles $K(Q_1)$, $K(Q_2)$, dont les centres Q_1, Q_2 sont des points à l'infini déterminés par deux demidroites opposées, sont des droites orthogonales à ces demidroites, donc parallèles; elles découpent $c/2$ de C de part et d'autre; elles sont donc identiques, sauf en ce qui concerne leur côté choisi, qui est pour $K(Q_i)$ celui de Q_i ($i=1, 2$). On a en vertu de (9)

$$K(Q_1) = K(\xi_1, \eta_1, c/2), \quad K(Q_2) = K(\xi_2, \eta_2, c/2),$$

d'où les égalités (7).

Dès lors l'analogie avec la démonstration du théorème 2 est complète et le théorème 5 peut être considéré comme établi. L'extension au cas où A, B, C ne sont pas bornés n'exige que la répétition du raisonnement employé pour le théorème 2; on n'a qu'à remplacer la sphère S_r par un cercle S_r .

Théorème 6. *Les mesures positives a, b, c de A, B, C et les nombres α, β, γ étant donnés d'avance, on peut trouver toujours 3 ensembles plans A, B, C bornés et sans points communs deux à deux, tels que le cercle $K(a, \beta, \gamma)$ n'existe pas, sauf pour chacun des 3 triples exceptionnels (8), pour lesquels le cercle $K(a, \beta, \gamma)$ existe toujours.*

Démonstration. L'existence de $K(a, \beta, \gamma)$ pour les triples (8) résulte du théorème 5 et de ce que les ensembles A, B, C sont bornés. Pour montrer que les triples (8) sont les seuls exceptionnels, considérons d'abord le cas où $0 < \beta < b$ et $0 < \gamma < c$. Soient B et C des disques circulaires, et A un anneau circulaire concentrique avec B . Admettons que le rayon intérieur de A croît indéfiniment et que la distance entre le centre de C et celui de B est égale au carré de ce rayon; on voit facilement qu'un cercle $K(a, \beta, \gamma)$ qui passe par B et C découpe de A une partie aussi proche de $a/2$ que l'on veut. On a par suite $a = a/2$; le même raisonnement fournit $\beta = b/2$ et $\gamma = c/2$.

Restent 4 cas:

- 1) $\beta = b$, $\gamma = 0$, 2) $\beta = b$, $\gamma = c$,
- 3) $\beta = 0$, $\gamma = 0$, 4) $\beta = 0$, $\gamma = c$.

L'exemple d'un disque circulaire C entouré d'un anneau concentrique B prouve que le cas 1) est impossible; il faut de même rejeter 4). L'exemple d'un disque A entouré d'un anneau B montre que $\beta = b$ implique $a = a$; donc, le cas 2) conduit à $a = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$, c. à d. à (8)^o. L'exemple de trois anneaux concentriques A, B, C disposés de manière que A soit entre B et C , la distance entre B et C étant fixe et tous les rayons tendant vers l'infini, montre que le cas 3) implique un a arbitrairement petit, donc $a = 0$; c'est le triple (8)^{1o}. Ainsi le théorème 6 est établi.

6. Problèmes et remarques. Dans le même ordre d'idées, on est conduit à plusieurs problèmes, ainsi qu'aux résultats, dont la démonstration ne comporte pas de nouvelles difficultés.

1. Soient A, B, C des domaines convexes de l'espace, bornés, non vides et séparables, Le théorème 1 établit l'existence du plan $\Pi(\varrho, \varrho, \varrho)$ relatif à A, B, C ; le plan d'accumulation de $\Pi(\varrho, \varrho, \varrho)$ pour $\varrho \rightarrow 0$ est un plan d'appui commun à A, B, C . Les plans $\Pi(a - \varrho, \varrho, \varrho)$, $\Pi(\varrho, b - \varrho, \varrho)$, $\Pi(\varrho, \varrho, c - \varrho)$ fournissent trois autres plans de ce genre. Ainsi on a 4 plans d'appui communs; il serait intéressant de démontrer qu'il y en a 8.

2. On peut étendre le théorème 2 à une mesure généralisée; on peut p. ex. considérer une fonction $\varphi(x, y, z)$ définie en tout point de A , non-négative et intégrable; une autre $\psi(x, y, z)$ pour B , et une troisième $\chi(x, y, z)$ pour C . En posant

$$\int_A \int \int \varphi(x, y, z) dx dy dz = a, \quad \int_B \int \int \psi(x, y, z) dx dy dz = b,$$

$$\int_C \int \int \chi(x, y, z) dx dy dz = c,$$

on obtient l'existence d'un plan qui divise A en deux parties A_1 et A_2 , B en B_1 et B_2 , C en C_1 et C_2 , telles que

$$\int_{A_1} \int \int \varphi(x, y, z) dx dy dz = a/2, \quad \int_{B_1} \int \int \psi(x, y, z) dx dy dz = b/2,$$

$$\int_{C_1} \int \int \chi(x, y, z) dx dy dz = c/2.$$

Signalons une conséquence de cette remarque: on peut, pour un solide donné, trouver un plan qui divise en deux parties égales simultanément p. ex. son volume, sa masse et l'aire de sa surface.

3. On peut démontrer par le théorème 4 l'existence de 8 cercles tangents communs à trois domaines du plan convexes, bornés, non vides et séparables. On obtient les cercles en question comme ceux d'accumulation de $K(\alpha, \beta, \gamma)$ en posant:

$$a = \varrho \text{ ou } a - \varrho, \quad \beta = \varrho \text{ ou } b - \varrho, \quad \gamma = \varrho \text{ ou } c - \varrho$$

et laissant tendre ϱ vers 0.

4. Pour étendre le théorème 5 aux ensembles A, B, C situés sur une sphère Ω , on remarquera d'abord qu'à tout point Q de Ω correspond un cercle $K(Q)$ de centre Q qui divise C en deux moitiés. Ce cercle comprend dans son intérieur, c. à d. dans celui des deux domaines sphériques qui contient Q , une partie ξ de A et η de B . La transformation $P = g(Q)$, définie en faisant correspondre à Q le point $P(\xi, \eta)$ du plan (P) , constitue une représentation continue de Ω sur le plan (P) . Il est évident qu'en désignant par Q_1, Q_2 deux antipodes et par $P(\xi_1, \eta_1), P(\xi_2, \eta_2)$ leurs images $g(Q_1), g(Q_2)$, on obtient les relations (7). D'autre part, un théorème de MM. Ulam et Borsuk concernant la représentation continue d'une sphère sur un plan, garantit l'existence d'une paire d'antipodes Q_1, Q_2

telle que $g(Q_1) = g(Q_2)^3$; il s'ensuit immédiatement que $\xi_1 = a/2$ et $\eta_1 = b/2$, de sorte que le cercle $K(Q_1)$ divise A, B et C en moitiés.

5. En prenant pour C la sphère Ω toute entière, on tire de 4. le corollaire suivant:

Il y a sur le globe terrestre un grand cercle qui divise en moitiés le Vieux et le Nouveau Monde.

³⁾ Ce théorème a été appliqué à la démonstration du théorème 2; sa démonstration a été simplifiée par M. H. Auerbach, un des auteurs de la Note citée au renvoi¹⁾.

On peut réduire ce théorème à la proposition II. En effet soit $P = h(Q)$ la représentation continue de Ω sur (P) . Convenons d'écrire en abrégé

$$P = P_1 - P_2$$

si $P = (\xi_1 - \eta_1, \xi_2 - \eta_2)$, $P_1 = (\xi_1, \eta_1)$, et $P_2 = (\xi_2, \eta_2)$; définissons une transformation continue $P = g(Q)$ en posant

$$g(Q) = h(Q) - h(Q'),$$

où Q' désigne l'antipode de Q sur Ω . On voit immédiatement que l'image P' de Q' est $(-\xi, -\eta)$ si l'image $P = g(Q)$ de Q était (ξ, η) . En prenant pour J l'équateur de Ω , pour I une hémisphère délimitée par J et pour P_0 le point $(0, 0)$, on tire de la proposition II l'existence d'un Q_0 tel que $g(Q_0) = (0, 0)$, d'où $h(Q_0) = h(Q'_0)$, c. q. f. d.