Les lemmes 1 et 2 étant ainsi établis, reprenons le théorème. Vu que $M \subset S$ et $MN = 0$, on a $M \subset S - N \subset S$ et, comme $S \underset{2}{=} M$ d'après (12), on trouve selon le lemme 1 que $S \underset{3}{=} S - N$; comme, d'autre part, $S \underset{5}{=} N$ d'après (12), notre théorème se trouve démontré.

Il est à remarquer que l'on trouve pareillement $N \subset S - M \subset S$, et comme $S \underset{5}{=} N$, d'où $S \underset{6}{=} S - M$, nous avons établi en même temps le théorème:

Toute sphère S se décompose en deux parties disjointes, $S = M + (S - M)$, où $S \underset{2}{=} M$ et $S \underset{6}{=} S - M$.

Remarquons enfin, que l'on a d'après (15)

$$A \simeq B + C, \quad B \simeq A \quad \text{et} \quad C \simeq A,$$

on peut donc poser

$$A = A_1 + R_1 \quad \text{où} \quad A_1 R_1 = 0, \quad A_1 \simeq A \quad \text{et} \quad R_1 \simeq A;$$

comme $R_1 \simeq A$, on peut poser encore

$$R_1 = A_2 + R_2 \quad \text{où} \quad A_2 R_2 = 0, \quad A_2 \simeq A, \quad R_2 \simeq A$$

et ainsi de suite. On définit de cette manière par induction, pour $n = 1, 2, \ldots$, les ensembles A_n et R_n tels que

$$(29) \qquad R_{n-1} = A_n + R_n, \quad A_n R_n = 0, \quad A_n \simeq A, \quad R_n \simeq A,$$

et on trouve sans peine

$$(30) \qquad A_k \subset A \quad \text{et} \quad A_k A_l = 0 \qquad \text{pour} \quad k \neq l.$$

Comme $N \subset C + B \simeq A$, il existe d'après (29), pour tout n naturel, un ensemble $N_n \subset A_n$ tel que $N \simeq N_n$ et on a d'après (30) $N_k N_l = 0$ pour $k \neq l$. Comme $S \supset N_1 + N_2 + \ldots$ et $N \underset{5}{=} S$, on arrive donc au théorème suivant:

Toute sphère S contient une infinité dénombrable de parties disjoints et deux à deux congruentes dont chacune est $\underset{5}{=} S$.

On peut aussi démontrer que toute sphère S contient une infinité indénombrable de parties disjointes dont chacune est équivalente par décomposition finie à la sphère S, mais la démonstration de cette proposition est moins simple[7]).

[7]) Cf. W. Sierpiński, ce volume, pp. 235-244.

Sur le paradoxe de la sphère.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

A et B étant deux ensembles de points dans l'espace à 3-dimensions, et n un nombre naturel, nous écrirons

$$A \underset{n}{=} B$$

s'il existe des ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et $B_1, B_2, \ldots, B_n$ tels que:

1⁰ $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$, $B = B_1 + B_2 + \ldots + B_n$,

2⁰ $A_k A_l = B_k B_l = 0$ pour $1 \leqslant k < l \leqslant n$,

3⁰ $A_k \simeq B_k$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$,

$A_k \simeq B_k$ désignant que les ensembles A_k et B_k sont congruents.

Nous dirons que les ensembles A et B sont *équivalents par décomposition finie* s'il existe un nombre naturel n tel que $A \underset{n}{=} B$.

En utilisant un résultat de M. F. Hausdorff (fondé sur l'axiome du choix), MM. Banach et Tarski ont démontré[1]) que toute sphère S (intérieur et surface) est une somme disjointe de 2 ensembles dont chacun est équivalent par décomposition finie avec la sphère S, et on en peut déduire sans peine qu'on peut y remplacer le nombre 2 par le nombre $\aleph_0$. Le but de ce travail est de démontrer qu'on peut aussi remplacer le nombre 2 par le nombre $2^{\aleph_0}$. Je démontre, en effet, ce

Théorème 1. *Toute sphère S* (dans l'espace à 3 dimensions) *contient $2^{\aleph_0}$ ensembles disjoints dont chacun est $\underset{9}{=} S$.*

J'utilise à ce but une méthode développée à un but différent, mais connexe, par M. von Neumann[2]). Je rédigerai d'ailleurs la démonstration de sorte que ni la connaissance du mémoire de M. von Neumann ni celle du travail de MM. Banach et Tarski ne soit nécessaire pour la comprendre. Je m'appuierai seulement sur le résultat suivant, trouvé par M. F. Hausdorff[3]):

[1]) S. Banach et A. Tarski, Fund. Math. **6** (1924), p. 262 (Lemme 22).

[2]) J. von Neumann, Fund. Math. **13** (1929), pp. 73-116, surtout pp. 109-111.

[3]) F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 470.

Soit φ la rotation de la sphère S d'angle π autour d'un axe Φ passant par son centre. Soit ψ la rotation de cette sphère d'angle $2\pi/3$ autour d'un axe Ψ passant aussi par le centre de la sphère S, l'angle ϑ entre les axes Φ et Ψ étant tel que $\cos\vartheta$ soit un nombre transcendant (ce qui a lieu p. ex. pour $\vartheta=2$). Si n est un nombre naturel et $m_1, m_2, \dots, m_n$ une suite formée de nombres 1 ou 2, on a

$$\psi^{m_1}\varphi\psi^{m_2}\varphi\dots\varphi\psi^{m_n} \neq 1$$

(où $\sigma\tau$ désigne la transformation qu'on obtient en effectuant d'abord la transformation τ et ensuite la transformation σ et où 1 désigne la transformation identique).

Posons $\chi=\psi\varphi\psi$. On vérifie sans peine par l'induction qu'on a pour m naturels $\chi^m=\psi(\varphi\psi^2)^{m-1}\varphi\psi$ et $\chi^{-m}=\psi^2\varphi(\psi\varphi)^{m-1}\psi^2$. Il en résulte tout de suite (vu la propriété des transformations φ et ψ démontrée par M. Hausdorff) qu'on a pour p naturel et $s_1, s_2, \dots, s_p$ entiers non nuls

$$\chi^{s_1}\varphi\chi^{s_2}\varphi\dots\varphi\chi^{s_p} \neq 1.$$

On en déduit sans peine que si l'on pose

$$\sigma_m=\chi^m\varphi\chi^m \qquad \text{pour} \quad m=1,2,\dots,$$

alors, pour m naturel, $k_1, k_2, \dots, k_m$ entiers non nuls et $p_1, p_2, \dots, p_m$ naturels tels que $p_1 \dotplus p_2 \dotplus p_3 \dotplus \dots \dotplus p_m$ [4]), on a

$$\sigma_{p_1}^{k_1}\sigma_{p_2}^{k_2}\dots\sigma_{p_m}^{k_m} \neq 1 \text{ [5]}). \tag{1}$$

Soit $OXYZ$ un système orthogonal fixe de coordonnées dont l'origine O est le centre de la sphère S. Toute rotation τ de la sphère S qui laisse son centre O fixe est, comme on voit sans peine, équivalente à une rotation d'un angle γ autour d'un axe passant par O et par un point $P=(x,y,z)$ tel que l'on a soit $y>0$, soit $y=0$ et $x>0$, soit $y=0$, $x=0$ et $z>0$. Soit α l'angle ZOP, $0\leqslant\alpha<\pi$, et β l'angle entre les plans ZOX et ZOP, $0\leqslant\beta<\pi$; enfin, soit $\tau=\tau_{\alpha,\beta,\gamma}$ la rotation autour de l'axe OP d'angle γ (où γ est un nombre réel quelconque).

Si $p=(x,y,z)$ est un point de l'espace, le point $\tau(p)=(x',y',z')$ (le transformé de p par la rotation τ) aura, comme on trouve sans peine, les coordonnées:

[4]) J'écris $p_1 \dotplus p_2 \dotplus p_3 \dotplus \dots \dotplus p_m$ au lieu de $p_1 \dotplus p_2,\ p_2 \dotplus p_3, \dots, p_{m-1} \dotplus p_m$.

[5]) Cf. J. von Neumann, l. c., p. 107 et 109.

$$x'=P_1x+P_2y+P_3z, \quad y'=P_4x+P_5y+P_6z, \quad z'=P_7x+P_8y+P_9z, \tag{2}$$

où

$$\begin{aligned}
P_1 &= (\cos^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\beta)\cos\gamma+\sin^2\alpha\cos^2\beta,\\
P_2 &= \sin^2\alpha\cos\beta\sin\beta(1-\cos\gamma)-\cos\alpha\sin\gamma,\\
P_3 &= \cos\alpha\sin\alpha\cos\beta(1-\cos\gamma)+\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,\\
P_4 &= \sin^2\alpha\cos\beta\sin\beta(1-\cos\gamma)+\cos\alpha\sin\gamma,\\
P_5 &= (\cos^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\beta)\cos\gamma+\sin^2\alpha\sin^2\beta,\\
P_3 &= \cos\alpha\sin\alpha\sin\beta(1-\cos\gamma)-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma,\\
P_7 &= \cos\alpha\sin\alpha\cos\beta(1-\cos\gamma)-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,\\
P_8 &= \cos\alpha\sin\alpha\sin\beta(1-\cos\gamma)+\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma,\\
P_9 &= \sin^2\alpha\cos\gamma+\cos^2\alpha.
\end{aligned}$$

On en déduit facilement que, $\tau_i=\tau_{\alpha_i,\beta_i,\gamma_i}$ $(i=1,2,\dots,m)$ étant des rotations données, $k_1, k_2, \dots, k_m$ des entiers non nuls et τ désignant la rotation $\tau=\tau_1^{k_1}\tau_2^{k_2}\dots\tau_m^{k_m}$, si $p=(x,y,z)$ est un point de l'espace, le point $\tau(p)=(x',y',z')$ a les coordonnées:

$$x'=Q_1x+Q_2y+Q_3z, \quad y'=Q_4x+Q_5y+Q_6z, \quad z'=Q_7x+Q_8y+Q_9z, \tag{3}$$

où Q_j $(j=1,2,\dots,9)$ sont des polynômes en $\cos\alpha_i$, $\sin\alpha_i$, $\cos\beta_i$, $\sin\beta_i$, $\cos\gamma_i$ et $\sin\gamma_i$ $(i=1,2,\dots,m)$ aux coefficients entiers. Vu que

$$\cos\vartheta=(1-tg^2\tfrac{1}{2}\vartheta)/(1+tg^2\tfrac{1}{2}\vartheta), \qquad \sin\vartheta=2\,tg\,\tfrac{1}{2}\vartheta/(1+tg^2\tfrac{1}{2}\vartheta),$$

nous concluons que

$$x'=R_1x+R_2y+R_3z, \quad y'=R_4x+R_5y+R_6z, \quad z'=R_7x+R_8y+R_9z, \tag{4}$$

où R_j $(j=1,2,\dots,9)$ sont des fonctions rationnelles aux coefficients rationnels de $3m$ variables $tg\,\frac{1}{2}\alpha_i$, $tg\,\frac{1}{2}\beta_i$ et $tg\,\frac{1}{2}\gamma_i$ $(i=1,2,\dots,m)$:

$$R_j=R_j(tg\,\tfrac{1}{2}\alpha_1,\ tg\,\tfrac{1}{2}\beta_1,\ tg\,\tfrac{1}{2}\gamma_1,\ tg\,\tfrac{1}{2}\alpha_2,\dots,tg\,\tfrac{1}{2}\gamma_m).$$

Il existe, comme on sait, un ensemble E de puissance du continu de nombres réels positifs algébriquement indépendants (c. à d. tels qu'il n'existe aucun polynôme $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ à n variables $(n=1,2,\dots)$ aux coefficients entiers qui ne soit identiquement nul et tel qu'il existe dans E n nombres distincts $a_1, a_2, \dots, a_n$ pour lesquels $f(a_1, a_2, \dots, a_n)=0$) [6]). Soit T l'ensemble de tous les nombres ϑ $(0<\vartheta<\pi)$ tels que $tg\,\frac{1}{2}\vartheta$ est un nombre de E. L'ensemble T est évidemment de puissance du continu. Nous allons démontrer ce

[6]) M. J. von Neumann a démontré (Math. Annalen **99**, p. 134-141) que si l'on pose $F(t)=\sum_{n=0}^{\infty}2^{2^{\mathrm{E}nt}-2^{n^2}}$, où $t>0$ et $\mathrm{E}x$ désigne le plus grand entier $\leqslant x$, les valeurs de la fonction $F(t)$ (qui est croissante pour $t>0$) sont indépendantes algébriquement.

Lemme 1. *Soient* $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i=1,2,\ldots)$ *des nombres distincts de* T *et* $\tau_i = \tau_{\alpha_i,\beta_i,\gamma_i}$ *pour* $i=1,2,\ldots$ *Si* m *est un nombre naturel,* $k_1, k_2, \ldots, k_m$ *des entiers non nuls et* $p_1, p_2, \ldots, p_m$ *des nombres naturels où* $p_1 \neq p_2 \neq \ldots \neq p_m$, *on a*

$$\tau_{p_1}^{k_1} \tau_{p_2}^{k_2} \ldots \tau_{p_m}^{k_m} \neq 1. \tag{5}$$

Démonstration. En supposant que $\tau_{p_1}^{k_1} \tau_{p_2}^{k_2} \ldots \tau_{p_m}^{k_m} = 1$, la transformation (4) serait pour

$$R_j = R_j(tg\, \tfrac{1}{2}\alpha_{p_1}, tg\, \tfrac{1}{2}\beta_{p_1}, tg\, \tfrac{1}{2}\gamma_{p_1}, tg\, \tfrac{1}{2}\alpha_{p_2}, \ldots, tg\, \tfrac{1}{2}\gamma_{p_m}) \qquad (j=1,2,\ldots,9)$$

une identité, c. à d. on aurait

$$R_1 = R_5 = R_9 = 1 \quad \text{et} \quad R_2 = R_3 = R_4 = R_6 = R_7 = R_8 = 0. \tag{*}$$

Or, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i=1,2,\ldots)$ étant des nombres distincts de T, les nombres $tg\, \frac{1}{2}\alpha_i$, $tg\, \frac{1}{2}\beta_i$, $tg\, \frac{1}{2}\gamma_i$ $(i=1,2,\ldots)$ sont des nombres distincts de E, donc des nombres algébriquement indépendants: les égalités (*) devraient donc être des identités en $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i=1,2,\ldots)$. On aurait donc $\varrho_{p_1}^{k_1} \varrho_{p_2}^{k_2} \ldots \varrho_{p_m}^{k_m} = 1$ quelles que soient les rotations $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ autour des axes passant par le centre de la sphère S, contrairement à (1). Le lemme 1 se trouve ainsi démontré.

Lemme 2. *Soit* $T = T' + T''$ *où* $T'T'' = 0$ *et les ensembles* T' *et* T'' *sont de puissance du continu. Soient* $\alpha_i', \beta_i', \gamma_i'$ $(i=1,2,\ldots)$ *des nombres distincts de* T' *et* $\alpha_i'', \beta_i'', \gamma_i''$ $(i=1,2,\ldots)$ *des nombres distincts de* T''. *Soient* $\tau_i = \tau_{\alpha_i',\beta_i',\gamma_i'}$ *et* $\bar{\tau}_i = \tau_{\alpha_i'',\beta_i'',\gamma_i''}$ *pour* $i=1,2,\ldots$ *Si* m *et* n *sont des nombres naturels,* $k_1, k_2, \ldots, k_m$ *et* $l_1, l_2, \ldots, l_n$ *des entiers non nuls,* $p_1, p_2, \ldots, p_m$ *et* $q_1, q_2, \ldots, q_n$ *des nombres naturels tels que* $p_1 \neq p_2 \neq p_3 \neq \ldots \neq p_m$ *et* $q_1 \neq q_2 \neq q_3 \neq \ldots \neq q_n$, *les rotations*

$$\tau = \tau_{p_1}^{k_1} \tau_{p_2}^{k_2} \ldots \tau_{p_m}^{k_m} \quad \textit{et} \quad \bar{\tau} = \bar{\tau}_{q_1}^{l_1} \bar{\tau}_{q_2}^{l_2} \ldots \bar{\tau}_{q_n}^{l_n} \tag{6}$$

ont des axes distincts.

Démonstration. Supposons que les rotations (6) aient le même axe. On a donc $\tau = \tau_{\alpha',\beta',\gamma'}$ et $\bar{\tau} = \tau_{\alpha'',\beta'',\gamma''}$ où $\alpha'' = \alpha'$ et $\beta'' = \beta'$, donc $\bar{\tau} = \tau_{\alpha',\beta',\gamma''}$. Il en résulte tout de suite que

$$\tau\bar{\tau}\tau^{-1}\bar{\tau}^{-1} = \tau_{\alpha',\beta',\gamma'}\, \tau_{\alpha',\beta',\gamma''}\, \tau_{\alpha',\beta',-\gamma'}\, \tau_{\alpha',\beta',-\gamma''} = \\ = \tau_{\alpha',\beta',\gamma'+\gamma''-\gamma'-\gamma''} = \tau_{\alpha',\beta',0} = 1. \tag{7}$$

Posons:

$$\varrho_{2i} = \tau_i, \qquad \varrho_{2i-1} = \bar{\tau}_i \qquad\qquad \text{pour} \quad i=1,2,\ldots$$

Nous aurons évidemment $\varrho_i = \tau_{\alpha_i,\beta_i,\gamma_i}$ $(i=1,2,\ldots)$, où $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i=1,2,\ldots)$ sont des nombres distincts de T. Or, d'après (7) et (6):

$$1 = \tau\bar{\tau}\tau^{-1}\bar{\tau}^{-1} = \\ = \varrho_{2p_1}^{k_2} \varrho_{2p_2}^{k_2} \ldots \varrho_{2p_m}^{k_m} \varrho_{2q_1-1}^{l_1} \varrho_{2q_2-1}^{l_2} \ldots \varrho_{2q_n-1}^{l_n} \varrho_{2p_m}^{-k_m} \varrho_{2p_{m-1}}^{-k_{m-1}} \ldots \varrho_{2p_1}^{-k_1} \varrho_{2q_n-1}^{-l_n} \ldots \varrho_{2q_1-1}^{l_1},$$

contrairement au lemme 1. Le lemme 2 est ainsi démontré.

L'ensemble T' (et T'') étant de puissance du continu, il existe une correspondance qui fait correspondre à tout nombre réel t un système $\alpha_t', \beta_t', \gamma_t'$ (un système $\alpha_t'', \beta_t'', \gamma_t''$) de trois nombres distincts de T' (de T'') de sorte que les ensembles $(\alpha_t', \beta_t', \gamma_t')$ et $(\alpha_{t'}', \beta_{t'}', \gamma_{t'}')$ (de même que $(\alpha_t'', \beta_t'', \gamma_t'')$ et $(\alpha_{t'}'', \beta_{t'}'', \gamma_{t'}'')$) sont disjoints pour $t' \neq t$. Posons pour t réels:

$$\xi_t = \tau_{\alpha_t',\beta_t',\gamma_t'}, \qquad \eta_t = \tau_{\alpha_t'',\beta_t'',\gamma_t''}$$

et désignons respectivement par H' et par H'' l'ensemble formé de la transformation identique $\tau = 1$ et de toutes les rotations de la forme

$$\xi_{t_1}^{k_1} \xi_{t_2}^{k_2} \ldots \xi_{t_m}^{k_m} \quad \text{et} \quad \eta_{t_1}^{k_1} \eta_{t_2}^{k_2} \ldots \eta_{t_m}^{k_m}, \tag{8}$$

où m est un nombre naturel, $k_1, k_2, \ldots, k_m$ sont des entiers non nuls et $t_1, t_2, \ldots, t_m$ sont des nombres réels tels que $t_1 \neq t_2 \neq t_3 \neq \ldots \neq t_m$. On voit sans peine que H' et H'' sont des groupes de rotations et il résulte du lemme 1 que

$$\xi_{t_1}^{k_1} \xi_{t_2}^{k_2} \ldots \xi_{t_m}^{k_m} \neq 1 \quad \text{et} \quad \eta_{t_1}^{k_1} \eta_{t_2}^{k_2} \ldots \eta_{t_m}^{k_m} \neq 1 \tag{9}$$

pour $k_1, k_2, \ldots, k_m$ entiers non nuls et $t_1, t_2, \ldots, t_m$ réels tels que $t_1 \neq t_2 \neq t_3 \neq \ldots \neq t_m$. Il résulte du lemme 2 que l'axe de chaque rotation de H' autre que $\tau = 1$ est distinct de l'axe de chaque rotation de H'' autre que $\tau = 1$.

D'après la définition de H' (de H''), chaque rotation τ de H' (de H'') peut être représentée d'après (9) d'une seule manière sous la forme (8), où $k_1, k_2, \ldots, k_m$ sont des entiers non nuls et $t_1, t_2, \ldots, t_m$ des nombres réels tels que $t_1 \neq t_2 \neq t_3 \neq \ldots \neq t_m$ (et où l'on doit poser $m = 0$ pour $\tau = 1$).

t étant un nombre réel donné, désignons par H_t' (par H_t'') l'ensemble de toutes les rotations (8) de H' (de H'') où $t_1 = t$. On voit sans peine que $H_t' H_{t'}' = 0$ $(H_t'' H_{t'}'' = 0)$ pour $t' \neq t$, que $H_t' H_{t'}'' = 0$ pour t et t' réels quelconques (égaux ou non) et que la somme de tous les H_t' (de tous les H_t'') pour t réels donne l'ensemble $H' - (1)$ (l'ensemble $H'' - (1)$).

Soient t et u deux nombres réels où $t \neq u$. On a:

$$\xi_t^{k_1}\xi_{t_2}^{k_2}\dots\xi_{t_m}^{k_m} = \xi_u\cdot\xi_u^{-1}\xi_t^{k_1}\xi_{t_2}^{k_2}\dots\xi_{t_m}^{k_m}$$

et (vu que $t \neq u$) il en résulte que toute rotation de H'_t est de la forme $\xi_u\tau$, où $\tau \in H'_u$. On a donc

(10) $$H'_t \subset \xi_u H'_u \qquad \text{pour } u \neq t \ (t \text{ et } u \text{ réels}).$$

Or, si $\tau \in H'-H'_t$, on a soit $\tau=1$, soit $\tau=\xi_{t_1}^{k_1}\xi_{t_2}^{k_2}\dots\xi_{t_m}^{k_m}$ où $t_1 \neq t$. On a donc soit $\tau=\xi_t^{-1}\xi_t$, soit $\tau=\xi_t^{-1}\xi_t\xi_{t_1}^{k_1}\xi_{t_2}^{k_2}\dots\xi_{t_m}^{k_m}$; τ est donc de la forme $\tau=\xi_t^{-1}\tau'$ où $\tau' \in H'_t$. On a donc

(11) $$H'-H'_t \subset \xi_t^{-1}H'_t \qquad \text{pour } t \text{ réel}.$$

Or, on a $\xi_t^2 \in H'_t$, donc $\xi_t=\xi_t^{-1}\xi_t^2 \in \xi_t^{-1}H'_t$ et, comme d'autre part ξ_t non $\in H'-H'_t$ (puisque $\xi_t \in H'_t$), on trouve

(12) $$H'-H'_t \neq \xi_t^{-1}H'_t \qquad \text{pour } t \text{ réel}.$$

Pareillement, on trouve

(13) $$H''_t \subset \eta_u H''_u \qquad \text{pour } u \neq t \ (t \text{ et } u \text{ réels})$$

et

(14) $$H''-H''_t \subset \eta_t^{-1}H''_t \qquad \text{pour } t \text{ réel}.$$

Soit F' (et F'') l'ensemble de tous les points de la sphère S qui n'appartiennent à aucun axe de rotation $\neq 1$ de H' (de H''). D'après ce que nous savons sur les axes de rotations de H' et de H'', on voit que $S-(0) \subset F'+F''$.

Je dis que $\tau F'=F'$ pour $\tau \in H'$. En effet, supposons que, pour un point $p \in F'$, on ait $\tau(p)$ non $\in F'$; $\tau(p)$ appartient donc à l'axe d'une rotation $\tau' \neq 1$ de H' et on a $\tau'\tau(p)=\tau(p)$, d'où $\tau^{-1}\tau'\tau(p)=p$, c. à d. p appartient à l'axe de la rotation $\tau^{-1}\tau'\tau$, qui appartient à H' (puisque H' est un groupe) et qui n'est pas $=1$, puisque de $\tau^{-1}\tau'\tau=1$ il résulte $\tau'=1$, contrairement à la définition de τ'. Or, c'est impossible si $p \in F'$. On a donc $\tau F' \subset F'$ pour $\tau \in H'$. D'autre part, H' étant un groupe, si $\tau \in H'$, on a $\tau^{-1} \in H'$, d'où, comme nous venons de montrer, $\tau^{-1}F' \subset F'$, ce qui donne $F'=\tau\tau^{-1}F' \subset \tau F'$.

On a donc $\tau F'=F'$ pour $\tau \in H'$ et, pareillement, $\tau F''=F''$ pour $\tau \in H''$.

Divisons maintenant tous les points de F' (de F'') en classes, en rangeant dans une même classe deux points de F' (de F'') dans ce cas et dans ce cas seulement s'il existe une rotation de H' (de H'') qui transforme l'un de ces points en l'autre. H' (et H'') étant un groupe, on voit sans peine que F' (et F'') se décompose ainsi en classes disjointes. D'après l'axiome du choix, il existe un ensemble K' (et K'') qui contient un et un seul point de chacune de ces classes; on voit sans peine que

(15) $$\sum_{\tau \in H'}\tau(K')=F', \qquad \sum_{\tau \in H''}\tau(K'')=F'',$$

(16) $$\tau(K')\tau'(K')=0 \qquad \text{pour } \tau \in H', \quad \tau' \in H' \quad \text{et} \quad \tau' \neq \tau,$$

(17) $$\tau(K'')\tau'(K'')=0 \qquad \text{pour } \tau \in H'', \quad \tau' \in H'' \quad \text{et} \quad \tau' \neq \tau.$$

En effet, si l'on avait $p \in K'$, $q \in K'$, $\tau \in H'$, $\tau' \in H'$, $\tau' \neq \tau$ et $\tau(p)=\tau'(q)$, on aurait $\tau^{-1}\tau' \in H'$, $\tau^{-1}\tau' \neq 1$ et $\tau^{-1}\tau'(q)=p$, d'où il résulte, vu la définition de K', que $q=p$; le point p appartiendrait donc à l'axe de la rotation $\tau^{-1}\tau' \neq 1$ de H', ce qui est impossible, puisque $p \in K' \subset F'$.

Désignons maintenant, pout t réel, par K'_t (et K''_t) l'ensemble-somme de tous les ensembles $\tau K'$ (des $\tau K''$) où $\tau \in H'_t$ ($\tau \in H''_t$). Comme $H'_t H'_{t'}=0$ ($H''_t H''_{t'}=0$) pour $t' \neq t$, on trouve d'après (16) et (17) respectivement

(18) $$K'_t K'_{t'}=0 \quad \text{et} \quad K''_t K''_{t'}=0 \qquad \text{pour } t' \neq t \ (t \text{ et } t' \text{ réels}).$$

Or, il résulte tout de suite de la définition des ensembles K'_t (et K''_t) et des formules (10) jusqu'à (17) que

(19) $$K'_t \subset \xi_u K'_u \qquad \text{pour } u \neq t \ (t \text{ et } u \text{ réels}),$$

(20) $$F'-K'_t \subset \xi_t^{-1}K'_t, \quad F'-K'_t \neq \xi_t^{-1}K'_t \qquad \text{pour } t \text{ réels},$$

(21) $$K''_t \subset \eta_u K''_u \qquad \text{pour } u \neq t \ (t \text{ et } u \text{ réels}),$$

(22) $$F''-K''_t \subset \eta_t^{-1}K''_t \qquad \text{pour } t \text{ réels}.$$

Soit maintenant t un nombre réel et $0<t<1$. D'après (20), on a $\xi_t(F'-K'_t) \subset K'_t$ et $\xi_t(F'-K'_t) \neq K'_t$, donc $K'_t-\xi_t(F'-K'_t) \neq 0$ et il existe un point

(23) $$p_t \in K'_t-\xi_t(F'-K'_t).$$

Posons:

$$(24)\quad \begin{cases} M_t^1=(p_t), \quad M_t^2=\xi_t(F'-K_t'), \quad M_t^3=\xi_{t+1}^{-1}K_t', \\ M_t^4=\xi_{t+2}\{F'\cdot\eta_t[F''-(F'+K_t'')]-K_{t+2}'\}, \\ M_t^5=\xi_{t+3}^{-1}\{K_{t+2}'\cdot\eta_t[F''-(F'+K_t'')]\}, \\ M_t^6=\xi_{t+4}[F'\cdot\eta_{t+1}^{-1}(K_t''-F')-K_{t+4}'], \quad M_t^7=\xi_{t+5}^{-1}[K_{t+4}'\cdot\eta_{t+1}^{-1}(K_t''-F')], \\ M_t^8=\eta_t[F''-(F'+K_t'')]-F', \quad M_t^9=\eta_{t+1}^{-1}(K_t''-F')-F'. \end{cases}$$

D'après les formules (19) jusqu'à (24), nous trouvons sans peine:

$$M_t^1+M_t^2\subset K_t', \qquad M_t^1M_t^2=0,$$
$$M_t^3\subset K_{t+1}', \quad M_t^4\subset K_{t+2}', \quad M_t^5\subset K_{t+3}', \quad M_t^6\subset K_{t+4}', \quad M_t^7\subset K_{t+5}'.$$

Nous en concluons d'après (18) que les ensembles $M_t^j (j=1,2,\ldots,7)$ sont disjoints et d'après la définition des ensembles K_t' en vertu de (15) que $\sum_{j=1}^{7}M_t^j\subset\sum_{i=0}^{5}K_{t+i}'\subset F'$. D'après (24), on a donc $(M_t^8+M_t^9)\cdot\sum_{j=1}^{7}M_t^j=0$. Or, d'après (24), (21) et (22), on a $M_t^8\subset K_t''$ et $M_t^9\subset K_{t+1}''$, d'où selon (18) $M_t^8M_t^9=0$. Les ensembles (24) sont donc tous disjoints.

Posons pour $0<t<1$:

$$(25)\qquad M_t=\sum_{j=1}^{9}M_t^j.$$

M_t est donc une somme de 9 ensembles disjoints $M_t^j (j=1,2,\ldots,9)$. Soit t' un nombre réel $\neq t$ et $0<t'<1$. Comme $\sum_{j=1}^{7}M_t^j\subset\sum_{i=0}^{5}K_{t+i}'$ et $\sum_{j=1}^{7}M_{t'}^j\subset\sum_{i=0}^{5}K_{t'+i}'$, et comme $t+1\neq t'+j$ pour $i=0,1,\ldots,5$ et $j=0,1,\ldots,5$, il résulte de (18) que $\sum_{j=1}^{7}M_t^j\cdot\sum_{i=1}^{7}M_{t'}^i=0$. Or, on a $M_t^8+M_t^9\subset K_t''+K_{t+1}''$ et $M_{t'}^8+M_{t'}^9\subset K_{t'}''+K_{t'+1}''$, d'où d'après (18) $(M_t^8+M_t^9)(M_{t'}^8+M_{t'}^9)=0$. Enfin, il résulte de $\sum_{j=1}^{7}M_t^j\subset F'$, $\sum_{j=1}^{7}M_{t'}^j\subset F'$, $(M_t^8+M_t^9)F'=0$ et $(M_{t'}^8+M_{t'}^9)F'=0$ (d'après (24)) que

$$(M_{t'}^8+M_{t'}^9)\sum_{j=1}^{7}M_t^j=0 \qquad \text{et} \qquad (M_t^8+M_t^9)\sum_{j=1}^{7}M_{t'}^j=0.$$

On a ainsi

$$(26)\qquad M_tM_{t'}=0 \qquad \text{pour } t'\neq t,\ 0<t<1 \text{ et } 0<t'<1.$$

Posons maintenant pour $0<t<1$:

$$(27)\quad \begin{cases} N_t^1=(0), \quad N_t^2=F'-K_t', \quad N_t^3=K_t', \\ N_t^4=[F''-(F'+K_t'')]\eta_t^{-1}(F'-K_{t+2}'), \\ N_t^5=[F''-(F'+K_t'')]\eta_t^{-1}K_{t+2}', \\ N_t^6=(K_t''-F')\eta_{t+1}(F'-K_{t+4}'), \\ N_t^7=(K_t''-F')\eta_{t+1}K_{t+4}', \\ N_t^8=[F''-(F'+K_t'')]-\eta_t^{-1}F', \\ N_t^9=(K_t''-F')-\eta_{t+1}F'. \end{cases}$$

D'après (27), on trouve tout de suite (vu que $K_{t+4}'\subset F'$)

$$N_t^2+N_t^3=F' \quad \text{et} \quad N_t^6+N_t^7+N_t^9=K_t''-F'.$$

Or, vu que $\eta_t^{-1}(F'-K_{t+2}')=\eta_t^{-1}F'-\eta_t^{-1}K_{t+2}'$ et $K_{t+2}'\subset F'$, d'où $\eta_t^{-1}K_{t+2}'\subset\eta_t^{-1}F'$, on trouve d'après (27) $N_t^4+N_t^5=[F''-(F'+K_t'')]\eta_t^{-1}F'$, d'où $N_t^4+N_t^5+N_t^8=F''-(F'+K_t'')$, donc

$$(28)\qquad N_t=\sum_{j=1}^{9}N_t^j=(O)+F'+F''=S,$$

et les ensembles N_t^1, $N_t^2+N_t^3$, $N_t^4+N_t^5+N_t^8$ et $N_t^6+N_t^7+N_t^9$ sont évidemment disjoints, de même que les ensembles N_t^2 et N_t^3, et pareillement les ensembles N_t^6, N_t^7 et N_t^9 (puisque $K_{t+4}'\subset F'$), enfin, aussi les ensembles N_t^4, N_t^5 et N_t^8 (puisque $K_{t+2}'\subset F'$). L'ensemble $N_t=S$ est donc somme de 9 ensembles disjoints $N_t^j (j=1,2,\ldots,9)$.

Vu que, τ étant une transformation biunivoque quelconque de la sphère S en elle-même, on a

$$\tau(AB)=\tau(A)\tau(B) \quad \text{et} \quad \tau(A-B)=\tau(A)-\tau(B),$$

on déduit sans peine des formules (24) et (27) que:

$$M_t^2=\xi_tN_t^2, \quad M_t^3=\xi_{t+1}^{-1}N_t^3, \quad M_t^4=\xi_{t+2}\eta_tN_t^4, \quad M_t^5=\xi_{t+3}^{-1}\eta_tN_t^5,$$
$$M_t^6=\xi_{t+4}\eta_{t+1}^{-1}N_t^6, \quad M_t^7=\xi_{t+5}^{-1}\eta_{t+1}^{-1}N_t^7, \quad M_t^8=\eta_tN_t^8, \quad M_t^9=\eta_{t+1}^{-1}N_t^9,$$

et il en résulte tout de suite que, pour $j=2,3,\ldots,9$, l'ensemble M_t est superposable par rotation avec l'ensemble N_t^j. Or, les ensembles M_t^1 et N_t^1 étant évidemment superposables (par translation), il résulte de (25) et (28) et de la définition du symbole $\underset{n}{=}$ que

$$M_t\underset{9}{=}S \qquad \text{pour } 0<t<1.$$

D'après (26), nous en concluons donc que la sphère S contient $2^{\aleph_0}$ ensembles disjoints dont chacun est $\underset{9}{=}S$, c. q. f. d.

Il est à remarquer qu'on peut démontrer ce

Théorème 2. *Toute sphère S est une somme de $2^{\aleph_0}$ ensembles disjoints dont chacun est $\underset{9}{=}S$.*

Démonstration. Soient respectivement M_0 et N_0 les ensembles M_t et N_t pour $t=0$ et soit M_0' l'ensemble qu'on obtient de M_0 en remplaçant son point p_0 (qui forme l'ensemble M_0^1) par le point O. On voit sans peine que $(O)+M_0^2=\xi_0(N_0^1+N_0^2)$ et on en déduit facilement que $M_0^1\underset{8}{=}N_0=S$.

On a en outre le

Lemme 3[7]). *A, B et C étant trois ensembles tels que $A\supset B\supset C$ et $A\underset{n}{=}C$, on a $A\underset{n+1}{=}B$.*

Ceci étant, posons $R=S-\sum\limits_{0<t<1}M_t$. Comme $M_0'M_t=0$ pour $0<t<1$, on a $S\supset R\supset M_0'$. Il résulte de $M_0'\underset{8}{=}S$ et du lemme 3 que $S\underset{9}{=}R$. La sphère S est donc somme de $2^{\aleph_0}$ ensembles disjoints, à savoir R et M_t $(0<t<1)$, dont chacun est $\underset{9}{=}S$. Le théorème 2 se trouve ainsi démontré.

---

[7]) Voir ma Note *Sur le paradoxe de MM. Banach et Tarski*, ce volume, p. 230, Lemme 1; cf. S. Banach et A. Tarski, Fund. Math. **6** (1924), p. 252, Corollaire 9.

Sur la division des ensembles de l'espace par les plans et des ensembles plans par les cercles.

Par

Hugo Steinhaus (Lwów).

1. Les ensembles $A,B,C,\dots,E,\dots$, dont nous aurons à parler dans la première partie de cette étude, seront des ensembles de l'espace, pourvus d'une mesure finie de Lebesgue; ils seront bornés sauf avis contraire. Leurs mesures respectives $|A|,|B|,|C|,\dots$ seront désignées par des minuscules correspondantes:

$$|A|=a,\quad |B|=b,\quad |C|=c,\quad \dots$$

Nous dirons qu'un plan Π *sépare* un ensemble E d'un autre ensemble F si presque tout point de E est situé d'un côté de Π et presque tout point de F du côté opposé.

Séparabilité de A,B,C ou condition S: il existe un plan qui sépare A de $B+C$, un qui sépare B de $C+A$ et de même un, séparant C de $A+B$.

En supposant que l'on ait choisi un côté d'un plan Π, la locution abrégée: *Π découpe η de E* signifie que celle des deux parties de E, séparées par Π, qui se trouve du côté choisi, a la mesure η. En disant que *Π découpe α,β,γ* de A,B,C, nous entendons que Π découpe α de A, β de B et γ de C, le côté choisi étant le même. Nous désignerons un tel plan par $\Pi(\alpha,\beta,\gamma)$.

Théorème 1. *La séparabilité de A,B,C est nécessaire et suffisante pour que le plan $\Pi(\alpha,\beta,\gamma)$ existe, quel que soit le triple (α,β,γ) assujetti aux inégalités*

$$0\leqslant\alpha\leqslant a,\quad 0\leqslant\beta\leqslant b,\quad 0\leqslant\gamma\leqslant c. \tag{1}$$

La thèse impliquant l'existence des plans $\Pi(a,0,0)$, $\Pi(0,b,0)$ et $\Pi(0,0,c)$, la nécessité de la condition S est immédiate. L'objet principal de cette étude est la démonstration que la condition S est suffisante.