d'après la définition de i_p et d'après (150), on a $C_i \subset G_p(v_0)$; d'après la définition de p, on a donc $C_i G_p(v_1) = 0$. On arrive ainsi à une contradiction et on voit bien que (150) entraîne (151). Il s'ensuit que

$$\Omega(q)\,\Omega(v_1) = 0, \tag{152}$$

donc

$$\Omega(q)\,\Omega(V_0) \subset \Omega(v_0). \tag{153}$$

$\Omega(q)$ étant héréditaire, il en résulte en tenant compte de **30** (C1) que l'on a $\Omega(q) \subset \Omega(v_0) \subset \Omega(V_0)$, donc finalement:

$$\Omega(W_q) \subset \Omega(V_0). \tag{154}$$

Il résulte de **103** (corollaire), de (154) et de **73** que

$$\Omega(W_0) = \Omega(V_0) = \Omega(W_q). \tag{155}$$

D'après **34**, les frontières W_0, V_0 et W_q sont donc identiques, c. q. f. d.

On voit que les bouts premiers topologiques peuvent être considérés comme une généralisation des bouts premiers de M. Carathéodory, aussi légitime que les bouts premiers de M. Kaufmann.

Warszawa, 24/III 1940.

Sur le paradoxe de MM. Banach et Tarski.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

MM. Banach et Tarski ont démontré (en utilisant un résultat de Hausdorff fondé sur l'axiome du choix) que toute sphère S (intérieur et surface) dans l'espace à 3 dimensions peut être décomposée en un *nombre fini* de parties disjointes dont on peut obtenir au moyen de mouvements convenables deux sphères disjointes de même rayon que la sphère S [1]). Or, le nombre fini en question n'a pas été précisé par ces auteurs.

En rapport avec ce résultat, M. von Neumann affirme qu'on peut décomposer toute sphère de rayon 1 en 9 parties disjointes dont on peut former par des mouvements convenables deux sphères disjointes de rayon 1, en prenant respectivement 5 et les 4 restantes de ces parties [2]). Je ne sais pas comment M. von Neumann a déduit cette proposition des résultats de MM. Banach et Tarski.

Le but de cette Note est de démontrer, dans le même ordre d'idées, le théorème suivant:

Toute sphère S peut être décomposée en 8 parties disjointes dont 5 et 3 donnent respectivement, après des mouvements convenables, deux sphères disjointes de même rayon que la sphère S.

On peut énoncer cette proposition sous une forme plus précise en introduisant la notation qui suit. X et Z étant deux ensembles de points dans l'espace à 3 dimensions et n étant un nombre naturel, nous écrirons

$$X \underset{n}{=} Z,$$

---

[1]) S. Banach et A. Tarski, Fund. Math. **6** (1924), p. 262 (Lemme 22). La connaissance de ce travail n'est pas nécessaire pour comprendre cette Note.

[2]) J. von Neumann, Fund. Math. **13** (1929), p. 77.

s'il existe des ensembles $X_1, X_2, \dots, X_n$ et $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ tels que

(1) $$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n,$$

(2) $$X_k X_l = Z_k Z_l = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k < l \leqslant n,$$

(3) $$X_k \simeq Z_k \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

($X_k \simeq Z_k$ désignant la congruence des ensembles X_k et Z_k).

Notre théorème s'exprime alors de la façon suivante:

Toute sphère S peut être décomposée en 2 parties disjointes, $S = N + (S - N)$, telles que $S \underset{5}{=} N$ et $S \underset{3}{=} S - N$.

Lemme 1 [3]. *Si $X \supset Y \supset Z$ et $X \underset{n}{=} Z$, on a $X \underset{n+1}{=} Y$.*

Démonstration. D'après $X \underset{n}{=} Z$, il existe des ensembles $X_1, X_2, \dots, X_n$ et $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ satisfaisant à (1), (2) et (3). D'après (3), il existe pour $k = 1, 2, \dots, n$ une transformation isométrique φ_k de X_k en

(4) $$Z_k = \varphi_k(X_k).$$

Posons

(5) $$\varphi(x) = \varphi_k(x) \quad \text{pour } x \in X_k \text{ et } k = 1, 2, \dots, n.$$

Evidemment, la fonction φ transforme d'une façon biunivoque l'ensemble X en l'ensemble $\varphi(X) = Z \subset Y$. Posons

(6) $$\psi(x) = x \qquad \text{pour } x \in Y.$$

La fonction ψ transforme donc d'une façon biunivoque l'ensemble Y en l'ensemble $\psi(Y) = Y \subset X$. D'après un théorème de M. Banach [4]), il existe des ensembles X', X'', Y' et Y'' tels que

(7) $$X = X' + X'', \quad Y = Y' + Y'', \quad X'X'' = Y'Y'' = 0, \\ \varphi(X') = Y', \quad \psi(Y'') = X''.$$

D'après (7), on a $X = X'X + X''$ et, d'après (1) et (2), on obtient la décomposition de l'ensemble X en $n+1$ ensembles disjoints:

(8) $$X = X'X_1 + X'X_2 + \dots + X'X_n + X''.$$

La fonction φ étant à valeurs distinctes dans X, on a d'après (7) et (4)

(9) $$\varphi(X'X_k) = \varphi(X')\varphi(X_k) = Y'Z_k \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, n.$$

Or, d'après (5), on a $\varphi(X'X_k) = \varphi_k(X'X_k)$. La fonction φ étant une transformation isométrique (de X_k en Z_k), on a donc $\varphi(X'X_k) \simeq X'X_k$, d'où selon (9)

(10) $$X'X_k \simeq Y'Z_k \qquad \text{pour } k = 1, \dots, n.$$

[3]) Cf. S. Banach et A. Tarski, l. c., p. 252 (Corollaire 9).

[4]) S. Banach, Fund. Math. **6** (1924), p. 236; voir aussi W. Sierpiński, *Leçons sur les nombres transfinis*, Paris 1928, p. 90.

D'après (2), les ensembles $Y'Z_k$ (où $k = 1, 2, \dots$) sont deux à deux disjoints. D'après (7), on a $X' \subset X$ et $Y' = \varphi(X') \subset \varphi(X) = Z$, donc $Y' = Y'Z$ et selon (1) et (7)

$$Y - Y'(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n) = Y - Y'Z = Y - Y' = Y'',$$

d'où

(11) $$Y = Y'Z_1 + Y'Z_2 + \dots + Y'Z_n + Y'',$$

les termes de cette décomposition étant d'après (1) et (7) des ensembles disjoints deux à deux.

Or, d'après (8), (11) et (10), et vu que l'on a $X'' = \psi(Y'') = Y''$ selon (7) et (6), on trouve $X \underset{n+1}{=} Y$, c. q. f. d.

Lemme 2 [5]). *Toute sphère S contient deux sous-ensembles disjoints M et N tels que*

(12) $$S \underset{2}{=} M \quad \text{et} \quad S \underset{5}{=} N.$$

Démonstration. Soit S' la surface de la sphère donnée. Hausdorff a démontré en utilisant l'axiome du choix [6]) que S' est somme de 4 ensembles disjoints, $S' = A' + B' + C' + D'$, dont D' est dénombrable et dont les 3 premiers satisfont à la condition suivante: il existe deux axes de la sphère S telles que φ désignant la rotation d'angle 180^0 autour du premier axe et ψ la rotation d'angle 120^0 autour du second, on a

(13) $$A'\varphi = B' + C', \quad A'\psi = B', \quad A'\psi^2 = C', \quad D'\varphi = D'\psi = D'$$

(en désignant d'une façon générale par $X\varrho$ l'ensemble en lequel se transforme X par la rotation ϱ).

Soit p le centre de la sphère S. Désignons par A, B, C et D les ensembles-sommes de tous les rayons de la sphère S, le centre p exclu, dont les extrémités appartiennent respectivement à A', B', C' et D'. On obtient évidemment de cette façon la décomposition de la sphère S en 5 parties disjointes:

(14) $$S = A + B + C + D + \{p\},$$

où on a d'après (13)

(15) $$A\varphi = B + C, \quad A\psi = B, \quad A\psi^2 = C, \quad D\varphi = D\psi = D.$$

Posons:

(16) $$M = A + D + \{p\},$$

(17) $$M_1 = B\psi\varphi, \quad M_2 = M\psi\varphi.$$

[5]) Cf. S. Banach et A. Tarski, l. c., p. 260 (Lemme 21).

[6]) F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 469.

Les termes de la somme (14) étant disjoints, on a d'après (16) $BM=0$, donc ($\psi\varphi$ étant une transformation biunivoque de la sphère S) aussi $B\psi\varphi M\psi\varphi=0$, c. à. d., en vertu de (17), $M_1M_2=0$. On a d'après (15) $(A+B)\psi\varphi=(A\psi+B\psi)\varphi=(B+C)\varphi=A$, donc, vu que $(D+\{p\})\psi\varphi=D+\{p\}$, on trouve d'après (16)

$$M_1+M_2=(B+M)\psi\varphi=(B+A+D+\{p\})\psi\varphi=A+D+\{p\}=M.$$

Comme on a $A\psi\varphi=(B+C)\varphi\psi\varphi$ et $(D+\{p\})\psi\varphi=(D+\{p\})\varphi\psi\varphi$ d'après (15), il vient d'après (17) et (16)

$$M_2=(A+D+\{p\})\psi\varphi=(B+C+D+\{p\})\varphi\psi\varphi,$$

donc $M_2\simeq B+C+D+\{p\}$ et, comme on a $M_1\simeq B\simeq A$ d'après (17) et (15), on conclut d'après (14) et (16) que $S\underset{2}{=}M$.

D étant l'ensemble-somme d'une infinité dénombrable de rayons de la sphère S, son centre p étant exclu, il existe évidemment un axe de la sphère S ne passant par aucun point de D. Si l'on tourne d'angle α la sphère S autour de cet axe et l'on désigne par $D\alpha$ l'ensemble en lequel se transforme l'ensemble D par cette rotation, on voit sans peine que l'ensemble de tous les angles α pour lesquels on a $D\cdot D\alpha\neq 0$ est dénombrable. Il existe donc un angle α tel que $D\cdot D\alpha=0$. Posons

$$E=D\alpha.$$

D'après (14) et vu que p non $\epsilon\, E$, nous aurons donc

$$E\subset A+B+C \quad \text{et} \quad E\simeq D. \tag{18}$$

Posons:

$$F_1=E\psi^2\varphi\psi\cdot C\varphi\psi, \quad F_2=E\varphi\psi\varphi\psi\cdot B\varphi\psi, \tag{19}$$

$$F=F_1+F_2. \tag{20}$$

On a d'après (19) $F_1\subset C\varphi\psi$ et $F_2\subset B\varphi\psi$, donc, vu que $CB=0$, il vient $F_1F_2=0$ et d'après (20) et (15) $F\subset(C+B)\varphi\psi=B$, donc $F\subset B$. Si l'on avait $F=B$, on aurait $B\subset E$ (puisque, d'après (19) et (20), on a $F\subset E$); d'après (18), l'ensemble B serait donc contenu dans l'ensemble-somme d'une infinité dénombrable de rayons de la sphère S et il en serait de-même, d'après (15), de A et C, donc, selon (14), aussi de $S-\{p\}$, ce qui est impossible. On a par conséquent $F\subset B$ et $F\neq B$, d'où l'existence d'un point q tel que

$$q\,\epsilon\, B-F. \tag{21}$$

Posons:

$$C_1=C\varphi\psi^2, \quad C_2=B\varphi\psi^2, \tag{22}$$

$$N=C_1+C_2+F_1+F_2+\{q\}. \tag{23}$$

Comme $CB=0$, on a d'après (22) $C_1C_2=0$ et d'après (15) $C_1+C_2=(C+B)\varphi\psi^2=A\psi^2=C$. Or, comme (20) et (21) entraînent $F_1+F_2\subset B$, $\{q\}\subset B$, $(F_1+F_2)\cdot\{q\}=0$ et $BC=0$, on trouve $(C_1+C_2)[F_1+F_2+\{q\}]=0$. Vu que $C_1C_2=0$ et $F_1F_2=0$, on constate donc que (23) est une décomposition de l'ensemble N en 5 parties disjointes.

D'après (22) et (15), on a $C_1=C\varphi\psi^2=A\psi^2\varphi\psi^2\simeq A$ et

$$C_2=B\varphi\psi^2=A\psi\varphi\psi^2=(B+C)\varphi\psi\varphi\psi^2\simeq B+C,$$

d'où

$$C_1\simeq A \quad \text{et} \quad C_2\simeq B+C. \tag{24}$$

Posons:

$$E_1=EA \quad \text{et} \quad E_2=E(B+C). \tag{25}$$

D'après (18), on a $E=E_1+E_2$ et, vu que $A(B+C)=0$, on trouve $E_1E_2=0$. D'après (18), il existe donc des ensembles D_1 et D_2 tels que

$$D=D_1+D_2, \quad D_1D_2=0, \quad D_1\simeq E_1, \quad D_2\simeq E_2. \tag{26}$$

Or, les transformations φ et ψ de la sphère S étant biunivoques, on a d'après (25), (15) et (19):

$$E_1\psi^2\varphi\psi=(EA)\psi^2\varphi\psi=E\psi^2\varphi\psi A\psi^2\varphi\psi=E\psi^2\varphi\psi C\varphi\psi=F_1,$$
$$E_2\varphi\psi\varphi\psi=[E(B+C)]\varphi\psi\varphi\psi=E\varphi\psi\varphi\psi(B+C)\varphi\psi\varphi\psi=E\varphi\psi\varphi\psi B\varphi\psi=F_2,$$

d'où $F_1\simeq E_1$ et $F_2\simeq E_2$, donc en vertu de (26)

$$F_1\simeq D_1 \quad \text{et} \quad F_2\simeq D_2. \tag{27}$$

On a d'après (14) et (26)

$$S=A+(B+C)+D_1+D_2+\{p\}. \tag{28}$$

Les formules (23) et (28) prouvent d'après (24) et (27) que $S\underset{5}{=}N$.

Reste à montrer que M et N sont disjoints. Or, d'après (23), on a $N\subset C+B$ (puisque, comme nous avons vu, $C_1+C_2=C$ et $F_1+F_2+\{q\}\subset B$); il en résulte selon (16) que $MN=0$, c. q. f. d.

Les lemmes 1 et 2 étant ainsi établis, reprenons le théorème. Vu que $M \subset S$ et $MN=0$, on a $M \subset S-N \subset S$ et, comme $S \underset{2}{=} M$ d'après (12), on trouve selon le lemme 1 que $S \underset{3}{=} S-N$; comme, d'autre part, $S \underset{5}{=} N$ d'après (12), notre théorème se trouve démontré.

Il est à remarquer que l'on trouve pareillement $N \subset S-M \subset S$, et comme $S \underset{5}{=} N$, d'où $S \underset{6}{=} S-M$, nous avons établi en même temps le théorème:

Toute sphère S se décompose en deux parties disjointes, $S=M+$ $+(S-M)$, où $S \underset{2}{=} M$ et $S \underset{6}{=} S-M$.

Remarquons enfin, que l'on a d'après (15)

$$A \simeq B+C, \quad B \simeq A \quad \text{et} \quad C \simeq A,$$

on peut donc poser

$$A=A_1+R_1 \quad \text{où} \quad A_1R_1=0, \quad A_1 \simeq A \quad \text{et} \quad R_1 \simeq A;$$

comme $R_1 \simeq A$, on peut poser encore

$$R_1=A_2+R_2 \quad \text{où} \quad A_2R_2=0, \quad A_2 \simeq A, \quad R_2 \simeq A$$

et ainsi de suite. On définit de cette manière par induction, pour $n=1,2,\ldots$, les ensembles A_n et R_n tels que

$$R_{n-1}=A_n+R_n, \quad A_nR_n=0, \quad A_n \simeq A, \quad R_n \simeq A, \tag{29}$$

et on trouve sans peine

$$A_k \subset A \quad \text{et} \quad A_kA_l=0 \qquad \text{pour} \quad k \neq l. \tag{30}$$

Comme $N \subset C+B \simeq A$, il existe d'après (29), pour tout n naturel, un ensemble $N_n \subset A_n$ tel que $N \simeq N_n$ et on a d'après (30) $N_kN_l=0$ pour $k \neq l$. Comme $S \supset N_1+N_2+\ldots$ et $N \underset{5}{=} S$, on arrive donc au théorème suivant:

Toute sphère S contient une infinité dénombrable de parties disjoints et deux à deux congruentes dont chacune est $\underset{5}{=} S$.

On peut aussi démontrer que toute sphère S contient une infinité indénombrable de parties disjointes dont chacune est équivalente par décomposition finie à la sphère S, mais la démonstration de cette proposition est moins simple[7].

[7] Cf. W. Sierpiński, ce volume, pp. 235-244.

Sur le paradoxe de la sphère.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

A et B étant deux ensembles de points dans l'espace à 3-dimensions, et n un nombre naturel, nous écrirons

$$A \underset{n}{=} B$$

s'il existe des ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et $B_1, B_2, \ldots, B_n$ tels que:

1º $A=A_1+A_2+\ldots+A_n$, $B=B_1+B_2+\ldots+B_n$,
2º $A_kA_l=B_kB_l=0$ pour $1 \leqslant k<l \leqslant n$,
3º $A_k \simeq B_k$ pour $k=1,2,\ldots,n$,

$A_k \simeq B_k$ désignant que les ensembles A_k et B_k sont congruents.

Nous dirons que les ensembles A et B sont *équivalents par décomposition finie* s'il existe un nombre naturel n tel que $A \underset{n}{=} B$.

En utilisant un résultat de M. F. Hausdorff (fondé sur l'axiome du choix), MM. Banach et Tarski ont démontré[1]) que toute sphère S (intérieur et surface) est une somme disjointe de 2 ensembles dont chacun est équivalent par décomposition finie avec la sphère S, et on en peut déduire sans peine qu'on peut y remplacer le nombre 2 par le nombre $\aleph_0$. Le but de ce travail est de démontrer qu'on peut aussi remplacer le nombre 2 par le nombre $2^{\aleph_0}$. Je démontre, en effet, ce

Théorème 1. *Toute sphère S* (dans l'espace à 3 dimensions) *contient $2^{\aleph_0}$ ensembles disjoints dont chacun est $\underset{9}{=} S$.*

J'utilise à ce but une méthode développée à un but différent, mais connexe, par M. von Neumann[2]). Je rédigerai d'ailleurs la démonstration de sorte que ni la connaissance du mémoire de M. von Neumann ni celle du travail de MM. Banach et Tarski ne soit nécessaire pour la comprendre. Je m'appuierai seulement sur le résultat suivant, trouvé par M. F. Hausdorff[3]):

[1]) S. Banach et A. Tarski, Fund. Math. **6** (1924), p. 262 (Lemme 22).
[2]) J. von Neumann, Fund. Math. **13** (1929), pp. 73-116, surtout pp. 109-111.
[3]) F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 470.