Il existe ainsi, dans les espaces (V), une certaine dualité entre les ensembles ouverts et les ensembles denses en soi.

Or, il en existe une autre.

K étant un espace (V), un ensemble $E \subset K$ est dit *ensemble frontière* dans K si, pour tout élément a de E et tout ensemble $V \in \mathcal{V}(a)$, on a $V - E \neq 0$. L'ensemble $E \subset K$ est dit *isolé* dans K s'il existe, pour tout élément $a \in E$, un ensemble $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $VE - \{a\} = 0$.

On démontre sans peine que le théorème qui vient d'être établi peut être complété par le suivant:

K étant un espace (V) dense en soi, il existe un espace (V), soit K^*, satisfaisant à la thèse du théorème qui précède et tel que la famille de tous les ensembles frontières de K coïncide avec celle de tous les ensembles isolés de K^*, en même temps que la famille de tous les ensembles isolés de K coïncide avec celle de tous les ensembles frontières de K^*.

Il existe donc aussi une dualité entre les ensembles frontières et les ensembles isolés dans les espaces (V).

Recherches sur la théorie des bouts premiers

Par

Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).

TABLE DES MATIÈRES

Introduction.

La notion de *bout premier* („Primende") d'un domaine borné et simplement connexe du plan est due à M. Carathéodory[1]). M. Kaufmann[2]) l'a généralisée et développée en introduisant les bouts premiers d'un domaine borné de l'espace euclidien n-dimensionnel. Dans ce mémoire, j'expose une théorie des bouts premiers

[1]) C. Carathéodory, Math. Ann. **73** (1913).

[2]) B. Kaufmann, Math. Ann. **103** (1930), p. 70-144 (c'est le mémoire principal, qui sera désigné dans la suite par „Kaufmann 1") et Math. Ann. **106** (1932), p. 308-342. M. Kaufmann considère les domaines bornés de R_2 et R_3, mais sa théorie s'applique sans aucune modification aux domaines de R_n. Comp. aussi: S. Mazurkiewicz, Fund. Math. **26** (1936), p. 272-279.

qui, tout en se rattachant à celle de M. Kaufmann par l'emploi des idées et des méthodes introduites par cet auteur, en diffère en plusieurs points. Notamment: 1⁰ au lieu d'un domaine de l'espace euclidien, je considère une variété topologique μ-dimensionnelle; 2⁰ à coté de bouts premiers de M. Kaufmann, j'introduis les bouts premiers que j'appelle *topologiques*; 3⁰ j'évite entièrement l'emploi des nombres transfinis; 4⁰ j'arrive à une définition axiomatique des bouts premiers.

Chapitre premier: Recherches préliminaires.

I. L'espace R.

1. Nous allons considérer une variété topologique μ-dimensionnelle R, c. à d. un *espace topologique R séparable, connexe et localement euclidien de dimension μ*. Un tel espace est *métrisable* et *semi-compact*.

Nous supposerons que R *n'est pas compact.*

Les points de R seront désignés par les lettres x, y, z, t.

2. La métrique dans R. Etant donnée une métrique conforme à la topologie de R, et $\varrho(x,y)$ désignant la *distance*, nous désignerons, pour $A\subset R$ et $\beta>0$, par $S(A,\beta)$ l'ensemble des $x\in R$ tels que $\varrho(x,A)<\beta$, et par $\delta(A)$ le diamètre de A.

Posons $\varrho^*(x,y)=\operatorname{Inf}\delta(C)$, où C parcourt les continus contenus dans R et contenant x et y. La fonction $\varrho^*(x,y)$ est la distance dans une nouvelle métrique qui est encore conforme à la topologie de R [3]).

Définition. Nous appelons *naturelle* toute métrique ϱ de R telle que $\varrho(x,y)=\varrho^*(x,y)$.

Quel que soit la métrique ϱ, la métrique ϱ^* est naturelle.

Si la métrique ϱ est naturelle et l'ensemble $A\subset R$ connexe, $S(A,\beta)$ est un *domaine* (c. à d. ensemble ouvert et connexe).

Nous supposerons que l'on a fixé pour R une métrique naturelle ϱ.

3. $G\subset R$ étant un ensemble ouvert, nous désignerons sa *frontière* par $F(G)$. On a $F(G)=\bar{G}-G$.

---

[3]) Comp. S. Mazurkiewicz, Fund. Math. **1** (1920), p. 167-169, où j'appelle $\varrho^*(x,y)$ „distance relative".

4. Arcs simples. Les arcs simples à extrémités x et y situés dans R seront désignés par $J(x,y)$ avec des indices. On supposera les points de $J(x,y)$ ordonnés de manière que le point x en est le premier. $J_1(x,y)$ étant un arc déterminé et $z\in J_1(x,y)$, nous désignerons par $J_1(x,z)$ la partie de $J_1(x,y)$ à extrémités x et z.

II. Les systèmes recouvrants [4]).

5. R étant séparable et localement euclidien, *il existe une base de R* [5]) *dont les éléments sont des domaines à fermeture compacte.* R étant semi-compact, il résulte facilement d'un théorème de Menger [6]) que, pour tout k naturel, il existe un *système recouvrant* de R:

(1) $$\{G_{i,k}\} \qquad i=1,2,\ldots,$$

possédant les propriétés suivantes:

(2) $G_{i,k}$ *est un domaine à fermeture compacte,*

(3) $$\delta(G_{i,k})<1/k,$$

(4) $$\operatorname*{Ls}_{i\to\infty}\bar{G}_{i,k}=0 \text{ [7])}.$$

Il résulte de (4) que, $A\subset R$ étant compact, l'ensemble des $G_{i,k}$ (avec k constant) tels que $A\bar{G}_{i,k}\neq 0$ est fini.

Nous supposerons qu'*un système* (1) *a été fixé pour* $k=1,2,\ldots$

6. Posons pour $i=1,2,\ldots$:

(5) $$G^*_{i,k}=\sum_j G_{j,k} \quad \text{où} \quad G_{j,k}S(G_{i,k},1/k)\neq 0$$

(6) $$G^{**}_{i,k}=\sum_j G_{j,k} \quad \text{où} \quad G_{j,k}S(G^*_{i,k},2/k)\neq 0$$

(7) $$G^{***}_{i,k}=\sum_j G^{**}_{j,k} \quad \text{où} \quad G^{**}_{j,k}G^*_{i,k}\neq 0.$$

---

[4]) *Système recouvrant* („Überdeckungssystem") de R est une suite d'ensembles ouverts dont la somme contient R. Ces systèmes remplacent les décompositions en cubes et les „Auflösungsgebiete" de M. Kaufmann (Kaufmann 1, p. 98-99).

[5]) *Base* de R est une suite d'ensembles ouverts telle que chaque ensemble ouvert de R est une somme de certains termes de cette suite (comp. C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografje Matematyczne, 1933, p 101).

[6]) K. Menger, *Dimensionstheorie,* Leipzig 1928, p. 46.

[7]) $\operatorname*{Ls}_{n\to\infty}A_n$ désigne la limite supérieure de la suite d'ensembles $A_1, A_2\ldots$ (voir C. Kuratowski, op. cit., p. 152-153).

On obtient trois nouveaux systèmes recouvrants de R et on vérifie sans peine que:

(8) $G^*_{i,k}$, $G^{**}_{i,k}$ *et* $G^{***}_{i,k}$ *sont des domaines;*

(9) $\delta(G^*_{i,k}) < 6/k, \quad \delta(G^{**}_{i,k}) < 10/k, \quad \delta(G^{***}_{i,k}) < 26/k;$

(10) $S(G_{i,k}, 1/k) \subset G^*_{i,k};$

(11) $S(G_{i,k}, 2/k) \subset S(G^*_{i,k}, 2/k) \subset G^{**}_{i,k}.$

7. ***Lemme 1.*** *Soit j un nombre naturel fixe. Parmi les ensembles*

(12) $F(G_{j,k}) F(G^*_{i,k})$ *où* $i=1,2,\ldots$

tels que $G_{j,k} \subset G^*_{i,k}$, il n'y a qu'un nombre fini d'ensembles différents.

On a en effet:

(13) $F(G_{j,k}) F(G^*_{i,k}) = F(G_{j,k}) - \sum_l F(G_{j,k}) G_{l,k}$ où $G_{l,k} \subset G^*_{i,k}$.

D'après **5** (2), l'ensemble $F(G_{j,k})$ est compact; il n'existe donc qu'un nombre fini de domaines $G_{l,k}$ satisfaisant à $F(G_{j,k}) G_{l,k} \neq 0$; désignons-les par $K_1, K_2, \ldots, K_r$. On aura:

(14) $F(G_{j,k}) F(G^*_{i,k}) = F(G_{j,k}) - \sum_l F(G_{j,k}) K_l$ où $K_l \subset G^*_{i,k}$.

Le membre droit de (14) ne peut représenter que 2^{r+1} ensembles différents, ce qui démontre le lemme.

Un lemme analogue subsiste si l'on remplace les $G^*_{i,k}$ par les $G^{**}_{i,k}$.

8. ***Lemme 2.*** *$\{H_m\}$ étant une suite partielle de la suite $\{G^*_{i,k}\}$ ou de la suite $\{G^{**}_{i,k}\}$, l'ensemble $\sum_{m=1}^{\infty} F(H_m)$ est fermé.*

En effet, supposons le contraire, et soit $x \in \sum_{m=1}^{\infty} \bar{F}(H_m) - \sum_{m=1}^{\infty} F(H_m)$. On peut déterminer une suite de points $\{x_n\}$ et une suite d'indices $\{m_n\}$ de manière que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ et $x_n \in F(H_{m_n})$. Il résulte de **5** (4) que $F(H_m) \subset \sum_i F(G_{i,k})$ et $G_{i,k} \subset H_m$; à chaque n on peut donc faire correspondre un i_n tel que $G_{i_n,k} \subset H_{m_n}$ et $x_n \in F(H_{m_n}) F(G_{i_n,k})$. Si la suite $\{i_n\}$ n'était pas bornée, on aurait $x_n \in \operatorname{Ls}_{i\to\infty} F(G_{i,k})$ en contradiction avec **5** (4). Donc, cette suite est bornée et il existe par conséquent un indice j tel que, pour une infinité d'indices n, on a les relations:

$x_n \in F(H_{m_n}) F(G_{j,k})$ et $G_{j,k} \subset H_{m_n}$. Mais d'après **7** (lemme 1), parmi les ensembles $F(H_{m_n}) F(G_{j,k})$ tels que $G_{j,k} \subset H_{m_n}$, il n'y a qu'un nombre fini d'ensembles différents. Donc, la suite $\{m_n\}$ contient un indice p tel que $F(H_{m_n}) F(G_{j,k}) = F(H_p) F(G_{j,k})$ pour une infinité d'indices n, d'où $x_n \in F(H_p)$, donc $x \in F(H_p)$, contrairement à la supposition. Le lemme est ainsi démontré.

Corollaire. *Les ensembles $\sum_{i=1}^{\infty} F(G^*_{i,k})$ et $\sum_{i=1}^{\infty} F(G^{**}_{i,k})$ sont fermés.*

10. Posons [8]):

(15) $M_n = G_{i_n,k_n}, \quad M^*_n = G^*_{i_n,k_n}, \quad M^{**}_n = G^{**}_{i_n,k_n},$

les indices i_n et k_n étant déterminés par la relation:

(16) $$n = \frac{(i_n + k_n - 1)(i_n + k_n - 2)}{2} + i_n.$$

Les trois suites: $\{M_n\}$, $\{M^*_n\}$, $\{M^{**}_n\}$ sont des bases de R.

III. Les suites.

11. Classification des suites. Les suites de points de R seront désignées par les lettres Y, X, Z, T.

Une suite $Y = \{x_i\}$ sera appelée [9]):

suite γ, si elle converge vers un point de R;

suite asymptotique, si elle ne contient aucune suite partielle γ;

suite α, si elle est asymptotique et satisfait à la condition $\lim_{i,j\to\infty} \varrho(x_i, x_j) = 0$;

suite β, si elle est asymptotique et ne contient aucune suite partielle α;

suite (α,γ) si elle est une suite α ou γ; *suite (α,β)* si elle est une suite α ou β, enfin *suite (α,β,γ)* si elle est une suite α, β ou γ.

Désignons par Ω_0 l'ensemble de toutes les suites de points de R, par Ω celui de ses suites asymptotiques; enfin, les ensembles des suites $\alpha, \beta, \gamma, (\alpha,\gamma), (\alpha,\beta)$ et (α,β,γ) par $\Omega_\alpha, \Omega_\beta, \Omega_\gamma, \Omega_{\alpha,\gamma}, \Omega_{\alpha,\beta}$ et $\Omega_{\alpha,\beta,\gamma}$ respectivement.

[8]) Comp. Kaufmann 1, p. 105-106.

[9]) Comp. Kaufmann 1, p. 81-82; je modifie ici un peu la terminologie de M. Kaufmann.

12. Les ensembles de suites seront désignés par des majuscules grecques.

Définition 1. J'appelle *héréditaire* un ensemble $\Phi \subset \Omega_0$ si les conditions: $X \epsilon \Phi$ et *X_1 est une suite partielle de X* entraînent $X_1 \epsilon \Phi$.

Définition 2. Soit $X=\{x_i\} \epsilon \Omega_0$; j'appelle *faisceau de suites* [10]) $\varphi(X)$ tout ensemble de suites $\{y_i\}$ tel que $\lim\limits_{i\to\infty} \varrho(x_i, y_i)=0$.

Si $Y \epsilon \varphi(X)$, on a $\varphi(X)=\varphi(Y)$; donc, deux faisceaux sont identiques ou disjoints.

Définition 3. J'appelle *régulier* un ensemble $\Phi \subset \Omega_0$ si $X \epsilon \Phi$ entraîne $\varphi(X) \subset \Phi$.

Définition 4. Soient $\Phi_1 \subset \Omega_0$ et $\Phi_2 \subset \Omega_0$; je dis que Φ_1 *recouvre* Φ_2 si chaque suite $X \epsilon \Phi_2$ contient une suite partielle $X_1 \epsilon \Phi_1$.

Définition 5. Soit $\Phi \subset \Omega_0$; j'appelle *enveloppe de Φ* et je désigne par Φ^* le plus grand sous-ensemble *héréditaire* de Ω_0 qui est recouvert par Φ. Cet ensemble peut être vide. S'il existe des ensembles héréditaires recouverts par Φ, alors Φ^* est évidemment leur somme.

On vérifie sans peine les résultats suivants:

(I) Si Φ_1 recouvre Φ_2 et Φ_2 recouvre Φ_3, alors Φ_1 recouvre Φ_3.

(II) Si Φ est héréditaire, on a $\Phi \subset \Phi^*$.

(III) Si Φ est régulier, alors Φ^* est régulier.

(IV) Si $\Phi_1\Phi_2=0$ et l'un des ensembles Φ_1, Φ_2 est héréditaire, alors $\Phi_1^*\Phi_2^*=0$.

(V) On a $(\Phi^*)^*=\Phi^*$.

Définition 6. J'appelle *clos* un ensemble héréditaire si $\Phi=\Phi^*$.

13. L'ensemble Ω est héréditaire, régulier et clos. Les ensembles Ω_α, Ω_β, Ω_γ sont héréditaires et réguliers. On a les relations:

$$\Omega^*_{\alpha,\beta}=\Omega, \quad \Omega^*_{\alpha,\beta,\gamma}=\Omega_0. \tag{17}$$

14. Chaînes. G étant un ensemble ouvert, nous dirons que la suite $X=\{x_i\}$ est *essentiellement contenue dans* G [11]) si G contient presque tous les points de X, c. à d. s'il existe un i_1 tel que $i \geqslant i_1$ entraîne $x_i \epsilon G$.

L'ensemble des suites essentiellement contenues dans G sera designé par $\Theta(G)$. C'est un ensemble héréditaire et clos.

Nous dirons que l'ensemble de suites Φ est *essentiellement contenu dans l'ensemble ouvert* G si $\Phi \subset \Theta(G)$.

[10]) Comp. Kaufmann 1, p. 82; $\varphi(X)$ est sa „unbewallte f-Gesamtheit".
[11]) Comp. Kaufmann 1, p. 76.

Définition. Nous appelons *chaîne* une suite de domaines $\{G_i\}$ telle que $G_{i+1} \subset G_i$. Nous dirons que la suite X est *essentiellement contenue dans la chaîne* $\{G_i\}$ si elle est essentiellement contenue dans tout domaine G_i. L'ensemble des suites essentiellement contenues dans la chaîne $\{G_i\}$ sera designé par $\Theta(\{G_i\})$; on a par suite:

$$\Theta(\{G_i\})=\prod_{i=1}^{\infty} \Theta(G_i). \tag{18}$$

C'est un ensemble héréditaire et clos. S'il est régulier, nous dirons que *la chaîne $\{G_i\}$ est régulière*. S'il ne contient que des suites asymptotiques, nous dirons que *la chaîne $\{G_i\}$ est asymptotique*. Enfin, nous dirons que $\Phi \subset \Omega_0$ est *essentiellement contenu dans la chaîne* $\{G_i\}$ si $\Phi \subset \Theta(\{G_i\})$.

15. ***Lemme 3.*** *$\{K_i\}$ désignant un système recouvrant de R, λ un nombre positif et $X=\{x_j\}$ une suite (α,γ), il existe un i_1 tel que X est essentiellement contenue dans $S(K_{i_1}, \lambda)$.*

On peut, en effet, déterminer j_1 de manière que, pour $j \geqslant j_1$, on ait $\varrho(x_j, x_{j_1})<\lambda$. Comme $\{K_i\}$ est un système recouvrant de R, il existe un i_1 tel que $x_{j_1} \epsilon K_{i_1}$. Il en résulte que $j \geqslant j_1$ entraîne $x_{j_1} \epsilon S(x_{j_1}, \lambda) \subset S(K_{i_1}, \lambda)$, c. q. f. d.

Corollaire 1. *Si $X \epsilon \Omega_{\alpha,\gamma}$, il existe pour tout k naturel un i_k tel que X est essentiellement contenue dans $G_{i_k,k}$* [12]).

Corollaire 2. *Si $X \epsilon \Omega_{\alpha,\gamma}$, il existe une suite d'indices $\{n_p\}$ telle que X est essentiellement contenue dans $M^*_{n_p}$ et que* $\lim\limits_{p\to\infty} \delta(M^{**}_{n_p})=0$.

IV. La topologie de l'espace Ω_0.

16. ***Définition.*** Nous appelons une suite $X=\{x_i\}$ *suite d'accumulation* [13]) *d'un ensemble* $\Phi \subset \Omega_0$ s'il existe une suite de suites $\{Y_i\}=\{\{y_j^{(i)}\}\}$ telle que $Y_i \epsilon \Phi$ et que

$$\lim_{i\to\infty} \limsup_{j\to\infty} \varrho(x_i, y_j^{(i)})=0. \tag{19}$$

Nous désignerons par Φ' l'ensemble des suites d'accumulation de Φ.

[12]) Si $X \epsilon \Omega_\gamma$, alors X est essentiellement contenue dans un $G_{i,k}$ (il suffit que $G_{i,k}$ contienne le point-limite de X); la même remarque s'applique au corollaire suivant.
[13]) Cette notion fondamentale est due à M. Kaufmann („unbewallte Grenzfolge"), qui ne considère d'ailleurs que les suites (α,β) et suppose X non $\epsilon\, \Phi$ (comp. Kaufmann 1, p. 83).

17. ***Définition.*** Nous appelons *fermeture* d'un ensemble $\Phi \subset \Omega_0$ l'ensemble $\overline{\Phi} = \Phi + \Phi'$.

18. ***Théorème 1.*** *Ω_0 est un espace satisfaisant aux axiomes* I *et* III *de Kuratowski* [14]):

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & \overline{\Phi + \Phi_1} = \overline{\Phi} + \overline{\Phi}_1 \\ \text{III.} & \overline{\overline{\Phi}} = \overline{\Phi} \end{array}\right\} \text{ pour } \Phi \subset \Omega_0 \text{ et } \Phi_1 \subset \Omega_0.$$

Il suffit évidemment de démontrer III. Soit $X = \{x_i\} \epsilon \overline{\overline{\Phi}}$; supposons que $X \epsilon (\overline{\Phi})'$; il existe alors une suite $\{Y_i\} = \{\{y_j^{(i)}\}\}$ telle que $Y_i \epsilon \overline{\Phi}$ et $\lim\limits_{i\to\infty} \limsup\limits_{j\to\infty} \varrho(x_i, y_j^{(i)}) = 0$. Si l'on a $Y_i \epsilon \Phi$ pour une infinité d'indices i, alors $X \epsilon \Phi' \subset \overline{\Phi}$. Dans le cas contraire, il existe un i_0 tel que $i \geqslant i_0$ entraîne $Y_i \epsilon \Phi'$; on peut supposer que $i_0 = 1$. Alors on a pour tout couple i, j une suite $Y_{i,j} = \{y_k^{(i,j)}\}$ telle que $Y_{i,j} \epsilon \Phi$ et $\lim\limits_{j\to\infty} \limsup\limits_{k\to\infty} \varrho(y_j^{(i)}, y_k^{(i,j)}) = 0$ pour $i = 1, 2 \ldots$ Donc, à tout i on peut faire correspondre un j_i tel que $j_i \geqslant i$ et que l'on ait:

$$\lim_{i\to\infty} \varrho(x_i, y_{j_i}^{(i)}) = 0, \tag{20}$$

$$\limsup_{k\to\infty} \varrho(y_{j_i}^{(i)}, y_k^{(i,j_i)}) \leqslant 1/i, \tag{21}$$

Par conséquent, $\limsup\limits_{k\to\infty} \varrho(x_i, y_k^{(i,j_i)}) \leqslant \varrho(x_i, y_{j_i}^{(i)}) + 1/i$ et finalement:

$$\lim_{i\to\infty} \limsup_{k\to\infty} \varrho(x_i, y_k^{(i,j_i)}) = 0, \tag{22}$$

donc $Y \epsilon \Phi' \subset \overline{\Phi}$.

Ainsi la relation $X \epsilon (\overline{\Phi})'$ entraîne $X \epsilon \overline{\Phi}$, ce qui démontre III.

19. ***Lemme 4.*** *L'ensemble Φ' est régulier et héréditaire.*

Supposons, en effet, que l'on a la relation (19) et de plus que $X^{(0)} = \{x_i^{(0)}\} \epsilon \varphi(X)$. Il vient:

$$\lim_{i\to\infty} \limsup_{j\to\infty} \varrho(x_i^{(0)}, y_j^{(i)}) \leqslant \lim_{i\to\infty} \varrho(x_i^{(0)}, x_i) + \lim_{i\to\infty} \limsup_{j\to\infty} \varrho(x_i, y_j^{(i)}) = 0, \tag{23}$$

donc $X^{(0)} \epsilon \Phi'$. Soit d'autre part $X_1 = \{x_{i_k}\}$. On aura d'après (19) *a fortiori*:

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{j\to\infty} \varrho(x_{i_k}, y_j^{(i_k)}) = 0, \tag{24}$$

donc $X_1 \epsilon \Phi'$, c. q. f. d.

[14]) C. Kuratowski, op. cit., p. 15.

20. L'axiome II de M. Kuratowski (à savoir: si Φ est vide ou ne contient qu'un seul élément, alors $\overline{\Phi} = \Phi$) n'est pas satisfait dans Ω_0. En effet, si Φ se réduit à une suite $X \epsilon \Omega_{\alpha,\gamma}$, alors $\overline{\Phi} = \varphi(X)$. Par contre, on a le

Lemme 5. *Si Φ est vide ou se réduit à un faisceau, on a $\overline{\Phi} = \Phi$.*

La démonstration se réduit à celle de la relation $\varphi(X)' \epsilon \varphi(X)$. Soit $X^0 = \{x_i^{(0)}\} \epsilon \varphi(X)'$ où $X = \{x_i\}$. On a $\lim\limits_{i\to\infty} \limsup\limits_{j\to\infty} \varrho(x_i^{(0)}, x_j) = 0$. Soit $\eta > 0$. Nous pouvons déterminer un entier p et, pour $i \geqslant p$, un entier m_i de manière que les relations $i \geqslant p$ et $j \geqslant m_i$ entraînent la relation $\varrho(x_i^{(0)}, x_j) < \frac{1}{3}\eta$. Pour $i \geqslant \max(p, m_p)$ et $j \geqslant \max(m_p, m_i)$, on aura

$$\varrho(x_p^{(0)}, x_i) < \tfrac{1}{3}\eta, \quad \varrho(x_p^{(0)}, x_j) < \tfrac{1}{3}\eta \quad \text{et} \quad \varrho(x_i^{(0)}, x_j) < \tfrac{1}{3}\eta,$$

donc $\varrho(x_i^{(0)}, x_j) < \eta$, donc $\lim\limits_{i\to\infty} \varrho(x_i^{(0)}, x_i) = 0$, donc $X^{(0)} \epsilon \varphi(X)$, c. q. f. d.

D'après ce lemme, on obtient de Ω_0 un *espace topologique*, c. à d. un espace satisfaisant aux trois axiomes I, II et III de M. Kuratowski, en identifiant les suites qui font partie d'un même faisceau ou — ce qui revient au même — en se bornant aux ensembles réguliers et en les considérant non plus comme ensembles de suites, mais comme ensembles de faisceaux.

On vérifie sans peine que l'espace topologique Ω_0 ainsi conçu est *séparable*. En effet, $A \subset R$ étant un ensemble dénombrable dense dans R, attachons à chaque $x_0 \epsilon A$ une suite γ convergente vers x_0; on constate aisément que l'ensemble dénombrable de ces suites est dense dans Ω_0.

Par contre, Ω_0 ne satisfait pas en général à l'axiome dit „de régularité" [15]); il s'ensuit qu'en général Ω_0 n'est pas métrisable.

21. ***Lemme 6.*** *L'ensemble Ω des suites asymptotiques est fermé.*

Soit, en effet, $X \epsilon \Omega'$ et supposons que X ne soit pas une suite asymptotique. Alors X contient une suite partielle $X_1 \epsilon \Omega_\gamma$. D'après **19**, lemme 4, on a $X_1 \epsilon \Omega'$. Soit $X_1 = \{x_i\}$ et $x_0 = \lim\limits_{i\to\infty} x_i$. R étant localement euclidien, x_0 est contenu dans un domaine G à fermeture compacte et il existe un $\lambda > 0$ tel que $S(x_0, \lambda) \subset G$. D'autre part, il existe une suite $\{Y_i\} = \{\{Y_j^{(i)}\}\}$ telle que $Y_i \epsilon \Omega$ et $\lim\limits_{i\to\infty} \limsup\limits_{j\to\infty} \varrho(x_i, y_j^{(i)}) = 0$. Donc, il existe un i_1 tel que $\varrho(x_0, x_{i_1}) < \lambda/2$ et $\limsup\limits_{j\to\infty} \varrho(x_{i_1}, y_j^{(i_1)}) < \lambda/2$.

[15]) Voir C. Kuratowski, op. cit., p. 65.

Donc, $\limsup_{j\to\infty} \varrho(x_0, y_j^{(i_1)}) < \lambda$, donc $Y_{i_1} \in \Theta\left(S(x_0, \lambda)\right) \subset \Theta(G)$. $\bar{G}$ étant compact, il s'ensuit que Y_{i_1} contient une suite partielle γ, donc Y_{i_1} non $\in \Omega$. On arrive ainsi à la contradiction, ce qui démontre le lemme.

22. ***Lemme 7.*** *Si la chaîne $\{G_i\}$ est régulière, l'ensemble $\Theta(\{G_i\})$ est fermé.*

Soit, en effet, $X = \{x_j\} \in \Theta(\{G_i\})'$. Il existe une suite $\{Y_j\} = \{\{y_k^{(j)}\}\}$ telle que $Y_j \in \Theta(\{G_i\})$ et $\lim_{j\to\infty} \limsup_{k\to\infty} \varrho(x_j, y_k^{(j)}) = 0$. Donc, on peut faire correspondre à tout j un k_j tel que:

$$\varrho(x_j, y_{k_j}^{(j)}) < 1/j + \limsup_{k\to\infty} \varrho(x_j, y_k^{(j)}), \tag{25}$$

$$y_{k_j}^{(j)} \in G_j. \tag{26}$$

Posons $Y_0 = \{y_{k_j}^{(j)}\}$. D'après (25), on a $\lim_{j\to\infty} \varrho(x_j, y_{k_j}^{(j)}) = 0$, donc $X \in \varphi(Y_0)$. Mais d'après (26), Y_0 est essentiellement contenu dan tout G_j, donc

$$Y_0 \in \Theta(\{G_i\}). \tag{27}$$

Or, la chaîne étant supposée régulière, il résulte de (27) que $X \in \Theta(\{G_i\})$, c. q. f. d. [16]).

23. ***Lemme 8.*** *Si Φ_2 recouvre Φ_1, on a $\Phi_1' \subset \Phi_2'$.*

Soit, en effet, $X = \{x_i\} \in \Phi_1'$; il existe une suite $\{Y_i\} = \{\{y_j^{(i)}\}\}$ telle que $Y_i \in \Phi_1$ et que l'on ait (19). Par l'hypothèse, Y_i contient une suite partielle $\{z_k^{(i)}\} \in \Phi_2$. Or, on a évidemment

$$\limsup_{k\to\infty} \varrho(x_i, z_k^{(i)}) \leqslant \limsup_{\to\infty} \varrho(x_i, y_j^{(i)}),$$

donc (19) entraîne $\lim_{i\to\infty} \limsup_{k\to\infty} \varrho(x_i, z_k^{(i)}) = 0$, donc $X \in \Phi_2'$, c. q. f. d.

Corollaire 1. *On a $(\Phi^*)' \subset \Phi'$.*

Corollaire 2. *Si l'ensemble Φ est héréditaire et fermé, l'ensemble Φ^* est fermé.*

En effet, d'après le corollaire 1, on a $(\Phi^*)' \subset \Phi' \subset \overline{\Phi} = \Phi$, et d'autre part, d'après 12 (II), on a $\Phi \subset \Phi^*$. Donc $(\Phi^*)' \subset \Phi^*$, c. q. f. d.

---

[16]) Un raisonnement analogue permet d'établir ce lemme dans la forme suivante, un peu plus générale: *si Φ est fermé et $\Phi\,\Theta(\{G_i\})$ régulier, alors $\Phi\,\Theta(\{G_i\})$ est fermé.*

V. Suites conjuguées.

24. ***Définition*** [17]). Une suite $\{J_i\}$ d'arcs simples sera appelée respectivement *suite spéciale de type α, de type β, de type γ*, si toute suite $\{x_i\}$ telle que $x_i \in J_i$ est respectivement une suite α, une suite β, une suite γ.

25. ***Définition*** [18]). Deux suites $X = \{x_i\}$ et $Y = \{y_i\}$ sont dites *conjuguées* s'il existe une suite spéciale d'arcs simples $\{Y(x_i, y_i)\}$. L'ensemble de toutes les suites conjuguées avec une suite X sera désigné par $\Delta(X)$.

On vérifie immédiatement les résultats suivants:

(I) Si $\Delta(X) \neq 0$, alors $\Delta(X) \subset \Omega_{\alpha,\beta,\gamma}$;

(II) Si $Y \in \Delta(X)$, alors $\Delta(X) = \Delta(Y)$;

(III) Si $X \in \Omega_{\alpha,\beta,\gamma}$, alors $\varphi(X) \subset \Delta(X)$, donc $\Delta(X)$ est régulier;

(IV) Si $X \in \Omega_{\alpha,\gamma}$, alors $\Delta(X) = \varphi(X)$;

(V) Si $X \in \Omega_{\alpha,\beta,\gamma}$ et X_1 est une suite partielle de X, alors $\Delta(X_1)$ recouvre $\Delta(X)$.

26. ***Lemme 9*** [19]). *Soit $X_j \in \Omega_{\alpha,\beta,\gamma}$ et X_{j+1} conjuguée avec une suite partielle de X_j, $j = 1, 2, \ldots$ Alors X_1 contient une suite partielle Y dont toute suite partielle est pour tout j conjuguée avec une suite partielle convenable de X_j.*

Pour la démonstration, qui est fort simple, je renvois au mémoire de M. Kaufmann.

27. ***Lemme fondamental 10*** [20]). *Soient $H_1, \ldots, H_r$ des ensembles connexes, $\lambda > 0$ et $X \in \Omega_{\alpha,\beta,\gamma}$. Supposons qu'aucune composante de $R - \sum_{i=1}^{r} \overline{H_i}$ ne contienne de suite partielle de X. Alors l'un des domaines $S(H_i, \lambda)$ où $i = 1, \ldots, r$ contient une suite conjuguée avec une suite partielle de X.*

Le lemme est vrai si $\sum_{i=1}^{r} S(H_i, \lambda)$ contient une suite partielle de X. Supposons que ce n'est pas le cas. Nous pouvons déterminer alors une suite partielle $X_1 = \{x_k^{(1)}\}$ de X telle que

$$x_k^{(1)} \text{ non} \in \sum_{i=1}^{r} \overline{S(H_i, \lambda/2)} \qquad \text{pour } k = 1, 2, \ldots \tag{28}$$

---

[17]) Comp. Kaufmann 1, p. 84 („ausgezeichnetes Streckensystem").

[18]) Kaufmann 1, p. 84-86.

[19]) Kaufmann 1, p. 103-104.

[20]) Kaufmann 1, p. 101-103 (Hilfssatz 7); comp. aussi Math. Ann. **106** (1932), p. 314-316.

et que deux éléments différents de X_1 soient contenus dans des composantes différentes de $R-\sum_{i=1}^{r}\overline{H}_i$. Soit L_k la composante de $R-\sum_{i=1}^{r}\overline{H}_i$ contenant $x_k^{(1)}$. Unissons $x_k^{(1)}$ avec un point $y \in \sum_{i+1}^{r} H_i$ par un arc simple $J_1(x_k^{(1)}, y)$ et soit y_k le premier point de cet arc qui appartienne à $\sum_{i=1}^{r}\overline{S(H_i\lambda/2)}$. Un tel point existe d'après (28) et $y_k \neq x_k^{(1)}$. On a de plus:

$$J_1(x_k^{(1)}, y_k) \subset L_k, \tag{29}$$

$$J_1(x_k^{(1)}, y_k)\sum_{i=1}^{r} S(H_i, \lambda/2) = 0. \tag{30}$$

Je dis que la suite $\{J_1(x_k^{(1)}, y_k)\}$ *est spéciale de type* β. En effet, en cas contraire, il existerait une suite $Z=\{z_j\} \in \Omega_{\alpha,\gamma}$ et une suite d'entiers $\{k_j\}$ telle que $k_j < k_{j+1}$ et $z_j \in J_1(x_{k_j}^{(1)}, y_{k_j})$. Soit n un entier tel que $n > 12/\lambda$. D'après **15** (corollaire 1), la suite Z est essentiellement contenue das un domaine $G^*_{m_1,n}$. Considérons deux points z' et z'' de Z situés dans $G^*_{m_1,n}$ et unissons-les par un arc $J(z',z'') \subset G^*_{m_1,n}$. Les points z' et z'' étant situés sur deux arcs différents de la suite $\{J_1(x_k^{(1)}, y_k)\}$, donc, d'après (29), dans deux domaines différents de la suite $\{L_k\}$, l'arc $J(z',z'')$ rencontre l'ensemble $\sum_{k=1}^{\infty} F(L_k) \subset \sum_{i=1}^{r}\overline{H}_i$. Donc:

$$G^*_{m_1,n}\sum_{i=1}^{r} H_i \neq 0. \tag{31}$$

D'après **6** (9), on a $\delta(G^*_{m_1,n}) \leqslant 6/n < \lambda/2$. Il résulte donc de (31) et (30):

$$G^*_{m_1,n} \subset \sum_{i=1}^{r} S\left(H_i, \frac{\lambda}{2}\right), \tag{32}$$

$$G^*_{m_1,n}\sum_{k=1}^{\infty} J_1(x_k^{(1)}, y_k) = 0. \tag{33}$$

Or, on a $Z \subset \sum_{k=1}^{\infty} J_1(x_k^{(1)}, y_k)$ et, d'autre part, Z est essentiellement contenue dans $G^*_{m_1,n}$, ce qui est en contradiction avec (33). Donc, la suite $\{J_1(x_k^{(1)}, y_k)\}$ est spéciale de type β, donc $\{y_k\} \in \Delta(X_1)$. Comme

$y_k \in \sum_{i=1}^{r}\overline{S(H_i, \lambda/2)} \subset \sum_{i=1}^{r} S(H_i, \lambda)$, il existe un indice $i_1 \leqslant r$ tel que $S(H_{i_1}, \lambda)$ contient une suite partielle de la suite $\{y_k\}$, donc une suite conjuguée avec une suite partielle de X, c. q. f. d.

28. L'application de ce lemme aux suites de domaines introduits dans **5** et **10** conduit à deux corollaires importants:

Corollaire 1. *Soient* $X \in \Omega_{\alpha,\beta,\gamma}$ *et* $j_1, j_2, \dots, j_r$ *des entiers. Si aucune composante de* $R-\sum_{i=1}^{r}\overline{G^*_{j_i,k}}$ *ne contient de suite partielle de* X, *l'un des domaines* $G^{**}_{j_i,k}$ *où* $i=1,2,\dots,r$ *contient une suite conjuguée avec une suite partielle de* X.

Corollaire 2. *Soient* $X \in \Omega_{\alpha,\beta,\gamma}$ *et* $j_1, j_2, \dots, j_r$ *des entiers. Si aucune composante de* $R-\sum_{i=1}^{r}\overline{M^{**}_{j_i}}$ *ne contient de suite partielle de* X, *l'un des domaines* $M^{**}_{j_i}$ *où* $i=1,2,\dots,r$ *contient une suite conjuguée avec une suite partielle de* X.

Chapitre deuxième: Les bouts premiers descriptifs.

VI. La frontière descriptive.

29. M. Carathéodory a exprimé l'opinion que les bouts premiers „in gewisser Hinsicht einen Ersatz für die Punkte des Randes bilden". Conformément à cette idée, l'ensemble des bouts premiers d'un espace R doit être considéré comme analogue à celui de points de la frontière euclidienne d'un domaine borné d'un espace euclidien à μ dimensions. Or, le rôle de la frontière d'un domaine peut être envisagé de deux manières:

1° la frontière est le lieu géométrique des points de convergence de certaines suites extraites du domaine;

2° la frontière forme d'emblée avec le domaine un certain espace topologique.

Nous nous plaçerons d'abord au premier point de vue.

30. La frontière descriptive. Nous dirons que l'ensemble V est une *frontière descriptive de* R si l'on a déterminé pour les suites de Ω, c. à d. pour les suites asymptotiques de points de R, une *convergence* vers les éléments $v \in V$ satisfaisant aux conditions suivantes:

(C 1) *toute suite de Ω contient une suite convergente vers un* $v \in V$;

(C 2) *si* $v \in V$, *il existe une suite de* Ω *convergente vers* v;

(C 3) *si une suite de* Ω *converge vers* v, *elle ne converge pas vers* $v_1 \neq v$;

(C 4) *toute suite partielle d'une suite convergente vers* v *converge vers* v;

(C 5) *si une suite de* Ω *ne converge pas vers* v, *elle contient une suite partielle dont aucune suite partielle ne converge vers* v.

Les conditions (C 1) et (C 2) expriment des propriétés analogues aux propriétés fondamentales de la frontière euclidienne; les conditions (C 3), (C 4) et (C 5) sont des axiomes de la convergence abstraite [21]).

On n'introduit aucune topologie de V.

31. Désignons par $\Omega(V)$ et $\Omega(v)$ respectivement l'ensemble de toutes les suites convergentes et celui de toutes les suites convergentes vers un point $v \in V$. D'après (C 1)-(C 5) et en utilisant la terminologie introduite dans **12**, on a:

(34) $\Omega(V)$ recouvre Ω, ce que l'on peut exprimer par la relation
$$(\Omega(V))^* = \Omega;$$

(35) $$\Omega(V) = \sum_{v \in V} \Omega(v);$$

(36) $$\Omega(v_1)\,\Omega(v_2) = 0 \quad \text{pour} \quad v_1 \neq v_2;$$

(37) l'ensemble $\Omega(v)$ est héréditaire;

(38) l'ensemble $\Omega(v)$ est clos.

On voit que la frontière descriptive est caractérisée par l'ensemble $\Omega(V)$ et par sa décomposition en ensembles $\Omega(v)$, de sorte que l'on peut identifier les éléments v de la frontière avec les ensembles $\Omega(v)$ suivant le modèle de la théorie des nombres irrationnels de Cantor.

32. ***Lemme 11.*** *La détermination d'une frontière descriptive revient à celle d'une classe* $\mathfrak{B}$ *d'ensembles* $\Psi \subset \Omega$ *telle que:*

(39) $$\Big(\sum_{\Psi \in \mathfrak{B}} \Psi\Big)^* = \Omega;$$

(40) $$\Psi_1 \Psi_2 = 0 \quad \textit{pour} \quad \Psi_1 \neq \Psi_2;$$

(41) Ψ *est héréditaire.*

[21]) Comp. C. Kuratowski, op. cit., p. 76-77.

En effet, une telle classe étant déterminée, faisons correspondre à chaque $\Psi \in \mathfrak{B}$ un élément $v(\Psi)$ de la frontière V, en convenant à regarder $v(\Psi_1)$ et $v(\Psi_2)$ comme différents si $\Psi_1 \neq \Psi_2$. Posons maintenant:

(42) $$\Omega\big(v(\Psi)\big) = \Psi^*,$$

(43) $$\Omega(V) = \sum_{\Psi \in \mathfrak{B}} \Omega\big(v(\Psi)\big).$$

On vérifie aisément, en se basant sur les résultats de **12**, que les conditions (34)-(38) sont remplies.

Les considérations précédentes contiennent le principe abstrait de la „méthode de complexes" de M. Kaufmann. Les complexes parfaitement saturés („vollkommen gesättigte Komplexe") de M. Kaufmann [22]) forment un système $\mathfrak{B}$ satisfaisant aux conditions (39)-(41). On voit immédiatement que R possède une infinité de frontières descriptives. Pour en arriver aux bouts premiers, il faut assujettir la frontière à des conditions ultérieures.

33. Considérons maintenant deux frontières descriptives V et V'.

Lemme 12. *Si* $\Omega(V) \subset \Omega(V')$, *les relations* $v \in V$, $v' \in V'$ *et* $\Omega(v)\,\Omega(v') \neq 0$ *entraînent la relation* $\Omega(v) \subset \Omega(v')$.

En effet, supposons que $\Omega(v) - \Omega(v') \neq 0$. Soit $\{x_i\} \in \Omega(v)\,\Omega(v')$ et $\{y_i\} \in \Omega(v) - \Omega(v')$. Posons $z_{2i-1} = x_i$ et $z_{2i} = y_i$ pour $i = 1, 2, \ldots$ D'après 31 (37) et (38), on a $\{z_i\} \in \Omega(V)$ et $\{z_i\}$ non $\in \Omega(V')$. Donc, $\Omega(V) - \Omega(V') \neq 0$, contrairement à la supposition.

Corollaire. *Si* $\Omega(V) = \Omega(V')$, *on peut établir entre les éléments de* V *et ceux de* V' *une correspondance biunivoque* $v = g(v')$, $v' = g^{-1}(v)$ *de manière que* $\Omega(v') = \Omega\big(g(v')\big)$.

A cet effet, faisons correspondre à chaque $v' \in V'$ une suite $X(v') \in \Omega(v')$. Par hypothèse, $X(v') \in \Omega(V)$; il existe donc un $g(v') \in V$ tel que $X(v') \in \Omega\big(g(v')\big)$ et on a en vertu du lemme 12: $\Omega(v') = \Omega\big(g(v')\big)$.

34. Quatre cas sont possibles:

(44) $$\Omega(V) = \Omega(V'),$$

(45) $$\Omega(V) \subset \Omega(V') \quad \text{et} \quad \Omega(V') - \Omega(V) \neq 0,$$

(46) $$\Omega(V) \supset \Omega(V') \quad \text{et} \quad \Omega(V) - \Omega(V') \neq 0,$$

(47) $$\Omega(V) - \Omega(V') \neq 0 \neq \Omega(V') - \Omega(V).$$

[22]) Kaufmann 1, p. 96-97.

Definition [23]). Nous dirons que les frontières:

V et V' sont *identiques* si l'on a (44);

V est *plus faible* que V' si l'on a (45);

V est *plus forte* que V' si l'on a (46);

V et V' sont *incomparables* si l'on a (47).

Lemme 13. *Si $\Omega(V)\subset\Omega(V')$, alors à tout $v'\in V'$ correspond un ensemble $V(v')\subset V$ tel que l'on a:*

$$\sum_{v'\in V'} V(v')=V, \tag{48}$$

$$\Omega(v')\supset\sum_{v\in V(v')}\Omega(v), \tag{49}$$

$$\Omega(v')=\Big(\sum_{v\in V(v')}\Omega(v)\Big)^*. \tag{50}$$

A cet effet, posons $V(v')=\sum v$, la somme s'étendant à tous les $v\in V$ qui satisfont à la condition $\Omega(v)\,\Omega(v')\neq 0$.

La relation (49) est une conséquence de **33** (lemme 12).

Soit $v_0\in V$; alors $\Omega(v_0)\subset\Omega(V')$; il existe donc un $v_0'\in V'$ tel que $\Omega(v_0)\,\Omega(v_0')\neq 0$. Donc $v_0\in V(v_0')$, ce qui démontre la relation (48).

$\Omega(v')$ étant héréditaire et clos, on a d'après (49) $\Omega(v')\subset(\sum_{v\in V(v')}\Omega(v))^*$; pour établir (50), il suffit donc de montrer que $\sum_{v\in V(v')}\Omega(v)$ recouvre $\Omega(v')$. Or, si $X\in\Omega(v')$, X contient d'après **31** (34) une suite partielle X_1 telle que $X_1\in\Omega(V)$. On a donc $X_1\in\Omega(v_1)$ pour un certain $v_1\in V$. Mais $\Omega(v')$ étant héréditaire, on a $X_1\in\Omega(v')$, donc $\Omega(v')\,\Omega(v_1)\neq 0$, donc $v_1\in V(v')$, donc $X_1\in\sum_{v\in V(v')}\Omega(v)$, ce qui démontre (50). Le lemme est ainsi établi.

35. ***Lemme 14.*** *Soit V une frontière descriptive telle que la condition $X\in\Omega_{\alpha,\beta}\Omega(v)$ entraîne $\Delta(X)\subset\Omega(v)$. Alors $\Omega(v)$ est un ensemble régulier.*

Supposons, en effet, qu'on ait $Y=\{y_i\}\in\Omega(v)$, $Z=\{z_i\}\in\varphi(X)$ et Z non $\in\Omega(v)$. D'après **31** (38), Z contient une suite partielle Z_1 telle qu'aucune suite partielle de Z_1 n'est un élément de $\Omega(v)$. D'après **13** (17), Z_1 contient une suite partielle $Z_2=\{z_{i_k}\}\in\Omega_{\alpha,\beta}$. On a Z_2 non $\in\Omega(v)$. Posons $Y_2=\{y_{i_k}\}$. Il vient $\lim_{k\to\infty}\varrho(y_{i_k},z_{i_k})=0$, donc $Y_2\in\varphi(Z_2)$, donc $Y_2\in\Omega_{\alpha,\beta}$, donc $Z_2\in\Delta(Y_2)$. D'après **31** (37), on a $Y_2\in\Omega(v)$, donc en vertu de l'hypothèse du lemme, on a $Z_2\in\Omega(v)$. On arrive ainsi à une contradiction, ce qui démontre le lemme.

[23]) Comp. G. Birkhoff, Fund. Math. **26** (1936), p. 156-166.

36. ***Théoreme 2.*** *Il existe une frontière descriptive V_0 satisfaisant aux conditions suivantes:*

(C′ 1) *si $X\in\Omega(v)\,\Omega_{\alpha,\beta}$, alors $\Delta(X)\subset\Omega(v)$;*

(C′ 2) *$\Omega(v)$ est fermé;*

(C′ 3) *la frontière V_0 est plus faible que toute frontière descriptive différente de V_0 et satisfaisant aux conditions* (C′ 1) *et* (C′ 2).

Ce théorème sera démontré dans **43**.

Définition. Nous appelons les éléments de V_0 les *bouts premiers descriptifs* ou *bouts premiers de Kaufmann*. Ils coïncident avec les bouts premiers introduits par M. Kaufmann dans le cas où R est un domaine borné de l'espace euclidien, $\varrho=\varrho_e^*$ et $\varrho_e(x,y)$ désignant la distance euclidienne (comp. **2**).

La condition (C′ 1) est contenue implicitement dans les résultats de M. Kaufmann; elle n'est pas intuitive, mais elle admet des conséquences importantes. L'introduction de (C′ 2) est naturelle et justifiée par des analogies. La condition (C′ 3) a un caractère extrémal et entraîne l'unicité de la définition des bouts premiers descriptifs.

VII. Suites normées.

37. ***Définition 1.*** Une suite $X\in\Omega_{\alpha,\beta}$ est dite *normée* [24]) si l'on a pour toute suite partielle X_1 de X la relation

$$\overline{\Delta(X)}\,\overline{\Delta(X_1)}\neq 0. \tag{51}$$

L'ensemble des suites normées sera désigné par Ω_ν.

38. ***Lemme 15.*** *X étant normée et X_1,X_2 désignant deux suites partielles de X, on a:*

$$\overline{\Delta(X_1)}\,\overline{\Delta(X_2)}\neq 0. \tag{52}$$

En effet, on a par hypothèse:

$$\overline{\Delta(X)}\,\overline{\Delta(X_1)}\neq 0\neq\overline{\Delta(X)}\,\overline{\Delta(X_2)}. \tag{53}$$

Nous distinguons trois cas possibles:

$$\Delta(X)\,\Delta(X_1)\neq 0 \quad\text{ou}\quad \Delta(X)\,\Delta(X_2)\neq 0; \tag{54}$$

$$\Delta(X)'\,\overline{\Delta(X_1)}\neq 0 \quad\text{ou}\quad \Delta(X)'\,\overline{\Delta(X_2)}\neq 0; \tag{55}$$

$$\overline{\Delta(X)}\,\Delta(X_1)'\neq 0\neq\overline{\Delta(X)}\,\Delta(X_2)'. \tag{56}$$

[24]) Comp. Kaufmann 1, p. 87 („normierte Folge“). La définition de M. Kaufmann est équivalente à la nôtre.

Or, (54) entraîne $\Delta(X)=\Delta(X_1)$ ou $\Delta(X)=\Delta(X_2)$, et (52) est alors une conséquence immédiate de (51).

La première relation (55) entraîne d'après **23** (lemme 8) et **25** (V):

(57) $$\overline{\Delta(X_2)}\,\overline{\Delta(X_1)} \supset \Delta(X_2)'\overline{\Delta(X_1)} \supset \Delta(X)'\overline{\Delta(X_1)} \neq 0.$$

De même, la seconde relation (55) entraîne (52).

Enfin, (56) entraîne

(58) $$\overline{\Delta(X_2)}\,\overline{\Delta(X_1)} \supset \overline{\Delta(X)}\,\Delta(X_1)'\Delta(X_2)' \supset \overline{\Delta(X)}\,\Delta(X)'\Delta(X_2)' = \overline{\Delta(X)}\,\Delta(X_2)' \neq 0.$$

La relation (52) est ainsi démontrée.

Corollaire. *Ω_ν est un ensemble héréditaire.*

En effet, soient $X\in\Omega$, X_1 une suite partielle de X_1 et X_2 une suite partielle de X_1. D'après le lemme 15, on a $\overline{\Delta(X_1)}\,\overline{\Delta(X_2)}\neq 0$, donc $X_1\in\Omega_\nu$, c. q. f. d.

39. *Lemme 16* [25]). *Toute suite asymptotique contient une suite partielle normée.*

Il suffit, d'après **12** et **13**, de montrer que toute suite $X\in\Omega_{\alpha,\beta}$ contient une suite partielle normée. Si $X\in\Omega_\alpha$, on aura, X_1 désignant une suite partielle arbitraire de X, la relation $X_1\in\varphi(X)=\Delta(X)=\Delta(X_1)$; donc, une suite α est normée.

Soit maintenant $X\in\Omega_\beta$. Déterminons $X_1,X_2\dots$ de la manière suivante: $X_1=\{x_i^{(1)}\}=X$; X_k étant supposé déterminé, $X_{k+1}=\{x_i^{k+1}\}$ est une suite conjuguée avec une suite partielle de X_k et contenue dans un domaine $\{G^{**}_{i,k+1}\}$, si une telle suite existe. Deux cas sont possibles:

1^0 La suite $\{X_k\}$ est infinie. D'après **26** (lemme 9), X contient alors une suite partielle $Y=\{y_j\}$ telle que toute suite partielle de Y est conjuguée avec une suite partielle de X_k, quel que soit k. En particulier soit $\{x^{(k)}_{i_j}\}$ la suite partielle de X_k conjuguée avec Y. Posons $Z=\{x_1^{(k)}\}$; les points $x_1^{(k)}$ et $x^{(k)}_{i_j}$ sont situés pour $k=2,3,\dots$ dans un domaine $G^{**}_{i,k}$; on a donc d'après **6** (9):

(59) $$\varrho(x_1^{(k)},x_{i_j}^{(k)})\leqslant\delta(G^{**}_{i,k})<10/k \qquad \text{pour } k=2,3,\dots \text{ et } j=1,2,\dots$$

(60) $$\lim_{k\to\infty}\limsup_{j\to\infty}\varrho(x_1^{(k)},x_{i_j}^{(k)})=0.$$

[25]) Kaufmann 1, p. 104-107 (Satz VIII); comp. aussi Math. Ann. **106** (1932), p. 309.

Comme $\{x^{(k)}_{i_j}\}\in\Delta(Y)$, il en résulte que $Z\in\Delta(Y)'$. Y_1 désignant une suite partielle arbitraire de Y, on aura d'après **23** et **25** (V) $Z\in\Delta(Y_1)'$, donc $\overline{\Delta(Y)}\,\overline{\Delta(Y_1)}\neq0$, donc $Y\in\Omega_\nu$ et le lemme est démontré dans le cas 1^0.

2^0 Il existe un k tel que X_k est défini, mais il n'existe aucune suite X_{k+1} possédant les propriétés requises, c. à d. qu'aucun domaine $G^{**}_{i,k+1}$ ne contient de suite conjuguée avec une suite partielle de X_k. D'après **27** (corollaire 1), il en résulte l'existence d'une suite $\{Y_{k+m}\}$, où $m=1,2,\dots$, telle que Y_{k+1} est une suite partielle de X_k, que Y_{k+m+1} est une suite partielle de Y_{k+m} et que Y_{k+m} est contenue dans une composante L_m de l'ensemble $R-\sum_{i=1}^{m}\overline{G^*_{i,k+1}}$. Evidemment $L_{m+1}\subset L_m$, c. à d. la suite $\{L_m\}$ est descendante. Soit y_m un point arbitraire de Y_{k+m}; posons $Y=\{y_m\}$ et soit $\{y'_m\}=Y_1$ une suite partielle de Y. Unissons y_m à y'_m par un arc simple $J_1(y_m,y'_m)\subset L_m$. Je dis que $\{J_1(y_m,y'_m)\}$ est une suite spéciale de type β. En effet, il existerait dans le cas contraire une suite $Z=\{z_n\}\in\Omega_{\alpha,\gamma}$ telle que $z_n\in J_1(y_{m_n},y'_{m_n})$ pour $m_n<m_{n+1}$. Cette suite est d'après **15** (corollaire 1) essentiellement contenue dans un $G^*_{i_1,k+1}$, donc *a fortiori* dans $\sum_{i=1}^{i_1}G^*_{i,k+1}$. On peut donc déterminer un $q>i_1$ tel que

(61) $$z_q\in\sum_{i=1}^{i_1}\overline{G^*_{i,k+1}},$$

mais on a d'autre part

(62) $$z_q\in J(y_{m_q},y'_{m_q})\subset L_{m_q}\subset L_q\subset L_{i_1}\subset R-\sum_{i=1}^{i_1}\overline{G^*_{i,k+1}}$$

en contradiction avec (61). Donc $\{J_1(y_m,y'_m)\}$ est une suite spéciale de type β, donc $Y_1\in\Delta(Y)$, donc $\overline{\Delta(Y)}\,\overline{\Delta(Y_1)}\neq0$, donc $Y\in\Omega_\nu$ et le lemme est démontré aussi dans le cas 2^0.

VIII. Construction des bouts premiers descriptifs.

40. Les agrégats. Introduisons d'abord trois définitions suivantes:

Définition 1. J'appelle *agrégat élémentaire* [26]) tout ensemble $\overline{\Delta(X)}$ où X est une suite normée.

[26]) Les agrégats élémentaires ont été introduits implicitement par M. Kaufmann (comp. Kaufmann 1, p. 86-87, définition des „Komplexe erster Ordnung").

Définition 2. J'appelle *famille des agrégats* la plus petite classe $\mathfrak{A}$ d'ensembles $\Phi \subset \Omega$ assujettie aux conditions:

(A 1) $\mathfrak{A}$ contient tout agrégat élémentaire;

(A 2) Si $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$ et $\prod_{\Phi \in \mathfrak{A}_1} \Phi \neq 0$, alors $\overline{\sum_{\Phi \in \mathfrak{A}_1} \Phi} \in \mathfrak{A}$.

Evidemment, $\mathfrak{A}$ est la partie commune de toutes les familles qui satisfont à (A 1) et (A 2). Il existe de telles familles, p. ex. la famille de tous les sous-ensembles fermés de Ω. On voit que les agrégats sont des ensembles fermés.

Définition 3. J'appelle *agrégat saturé* [27]) tout agrégat identique à chaque agrégat qui le contient.

La classe des agrégats saturés sera désignée par $\mathfrak{A}_s$.

Corollaire 1. *Si $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathfrak{A}_s$ et $\Phi_1 \neq \Phi_2$, alors $\Phi_1 \Phi_2 = 0$.*

Corollaire 2. *Tout agrégat est contenu dans un agrégat saturé.*

En effet, soit Φ_1 un agrégat; désignons par $\mathfrak{A}_1$ l'ensemble des agrégats qui contiennent Φ_1; on a $\prod_{\Phi \in \mathfrak{A}_1} \Phi \supset \Phi_1$, donc, d'après (A 2), l'ensemble $\overline{\sum_{\Phi \in \mathfrak{A}_1} \Phi}$ est un agrégat contenant Φ_1; évidemment c'est un agrégat saturé.

41. ***Lemme 17.*** *Tout agrégat est fermeture d'une somme d'agrégats élémentaires.*

Soit $\mathfrak{A}_0$ la famille des ensembles $\Phi \subset \Omega$ qui sont des fermetures des sommes d'agrégats élémentaires. $\mathfrak{A}_0$ satisfait à la condition (A 1) et, comme il est facile de voir, à la condition suivante:

$$\text{si} \quad \mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_0, \quad \text{alors} \quad \overline{\sum_{\Phi \in \mathfrak{A}_1} \Phi} \in \mathfrak{A}_0,$$

donc *a fortiori* à la condition (A 2). Par conséquent $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}_0$, ce qui démontre le lemme.

42. ***Lemme 18.*** *La classe $\mathfrak{A}_s$ des agrégats saturés détermine une frontière descriptive V_0.*

D'après **32** (lemme 11), il faut démontrer que

$$(\sum_{\Phi \in \mathfrak{A}_s} \Phi)^* = \Omega, \tag{63}$$

[27]) Les agrégats saturés sont liés aux „vollkommen gesättigte Komplexe"; comp. Kaufmann 1, p. 96-97. Si $\Phi \in \mathfrak{A}_s$, alors $\Phi\Omega_\nu$ est un „vollkommen gesättigter Komplex".

$$\Phi_1 \Phi_2 = 0 \quad \text{pour} \quad \Phi_1, \Phi_2 \in \mathfrak{A}_s \quad \text{et} \quad \Phi_1 \Phi \neq \Phi_2, \tag{64}$$

$$\Phi \in \mathfrak{A}_s \quad \text{est héréditaire.} \tag{65}$$

Or, une suite normée est contenue dans un agrégat élémentaire, donc dans un agrégat saturé (comp. **40**, corollaire 2). Donc $\Omega_\nu \subset \sum_{\Phi \in \mathfrak{A}_s} \Phi$. Mais d'après **39** (lemme 16), on a $\Omega_\nu^* = \Omega$; il en résulte (63).

La relation (64) est identique à **40** (corollaire 1).

Soit enfin $Y \in \Phi \in \mathfrak{A}_s$ et considérons une suite partielle Y_1 de Y. D'après **41** (lemme 17), on a:

$$\Phi = \overline{\sum_{X \in \Omega_\nu \Phi} \overline{\Delta(X)}} = \overline{\sum_{X \in \Omega_\nu \Phi} \Delta(X)} = \sum_{X \in \Omega_\nu \Phi} \Delta(X) + (\sum_{X \in \Omega_\nu \Phi} \Delta(X))'. \tag{66}$$

Deux cas sont possibles:

1⁰ $Y \in \sum_{X \in \Omega_\nu \Phi} \Delta(X)$. On a alors $Y \in \Omega_\nu \Phi$ et d'après **38** (corollaire) $Y_1 \in \Omega_\nu$; en outre,

$$\overline{\Delta(Y)}\,\overline{\Delta(Y_1)} \neq 0 \quad \text{et} \quad \Delta(Y) \subset \Phi. \tag{67}$$

D'autre part, $\overline{\Delta(Y_1)}$ étant un agrégat élémentaire, il est contenu dans un $\Phi_1 \in \mathfrak{A}_s$; il résulte de (64) et (67) que $\Phi_1 = \Phi$, donc $Y_1 \in \overline{\Delta(Y_1)} \subset \Phi$, c. q. f. d.

2⁰ $X \in (\sum_{X \in \Omega_\nu \Phi} \Delta(Y))'$. Dans ce cas, il résulte de **19** (lemme 4) que

$$Y_1 \in (\sum_{X \in \Omega_\nu \Phi} \Delta(X))' \subset \Phi, \tag{68}$$

c. q. f. d.

Le lemme 18 est ainsi démontré.

43. Démonstration du théorème 2 (comp. **36**). Nous allons montrer que la frontière descriptive V_0 déterminée d'après le lemme 18 satisfait aux conditions (C′ 1), (C′ 2) et (C′ 3).

Considérons d'abord la condition (C′ 1). Soient $v \in V_0$, $X = \{x_i\} \in \Omega(v)\Omega_{\alpha,\beta}$ et $X_1 = \{x_i^{(1)}\} \in \Delta(X)$. Supposons que X_1 non $\in \Omega(v)$. Alors, d'après **40** (C 1), (C 5) et **39** (lemme 16), nous pouvons déterminer un $v_1 \in V_0$ tel que $v \neq v_1$, de même qu'une suite partielle $X_2 = \{x_{i_k}^{(i)}\} \in \Omega_\nu \Omega(v_1)$ de X_1. L'ensemble $\overline{\Delta(X_2)}$ est alors un agrégat élémentaire; donc, il existe un agrégat saturé Φ contenant $\overline{\Delta(X_2)}$. L'élément $v(\Phi) \in V_0$ déterminé par cet agrégat est évidemment identique à v_1, puisque Y_2 converge vers $v(\Phi)$ et vers v_1. On a donc:

$X_3=\{x_{i_k}\} \in \Delta(X_2) \subset \Phi \subset \Omega(v_1)$. Mais X_3 étant une suite partielle de $X \in \Omega(v)$, on a $X_3 \in \Omega(v)$. Donc $v=v_1$. On arrive ainsi à une contradiction, ce qui démontre que V_0 *satisfait à la condition* (C′ 1).

Soit à présent $v \in V_0$. D'après **32** (voir lemme 11 (42)) et **42** (lemme (18)), il existe un $\Phi \in \mathfrak{A}_s$ tel que $\Omega(v)=\Phi^*$. D'après **23** (corollaire 2), Φ étant héréditaire et fermé, $\Phi^*=\Omega(v)$ est fermé, c. à d. V_0 *satisfait à la condition* (C′ 2).

Soit enfin V' une frontière descriptive satisfaisant aux conditions (C′ 1) et (C′ 2). Nous montrerons d'abord que toute suite normée converge vers un $v' \in V'$, c. à d. que l'on a $\Omega_v \subset \Omega(V')$. Supposons le contraire et soit $Y \in \Omega_v - \Omega(V')$. D'après **30** (C 1) et (C 5), on peut déterminer deux suites partielles Y_1 et Y_2 de Y qui convergent respectivement vers $v' \in V'$ et $v'' \in V'$ tels que $v' \neq v''$. Mais V' satisfaisant à (C′ 1) et (C′ 2), on a d'après **38** (lemme 15):

$$\Omega(v')\,\Omega(v'') \supset \overline{\Delta(Y_1)}\,\overline{\Delta(Y_2)} \neq 0, \tag{69}$$

donc $v'=v''$. On a ainsi une contradiction et la relation

$$\Omega_v \subset \Omega(V') \tag{70}$$

se trouve établie.

Or, il résulte de (70), (C′ 1) et (C′ 2) que tout agrégat élémentaire est contenu dans $\Omega(v')$ où $v' \in V'$. Soit $\mathfrak{A}'$ la classe de ces agrégats élémentaires. On a vu que $\mathfrak{A}'$ satisfait à la condition (A 1) et on vérifie aisément qu'elle satisfait aussi à (A 2). Comme $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}$ par définition, il en résulte que $\mathfrak{A}_0=\mathfrak{A}$. Soit $v \in V_0$; il existe un $\Phi \in \mathfrak{A}_0$ tel que $\Omega(v)=\Phi^*$; mais $\Phi \in \mathfrak{A}_0$; il existe donc un $v' \in V'$ tel que $\Phi \subset \Omega(v')$; or, $\Omega(v')$ étant héréditaire et clos, il en résulte que

$$\Omega(v) = \Phi^* \subset \Omega(v') \subset \Omega(V').$$

Donc $\Omega(V_0) \subset \Omega(V')$, c. à d. (comp. **33** et **34**) que V_0 est plus faible que V' ou identique à V'. Donc, V_0 *satisfait à la condition* (C′ 3) et le théorème 2 est démontré.

44. Les bouts premiers descriptifs et les bouts premiers de M. Kaufmann. Nous avons déjà indiqué (comp. **36**), que les bouts premiers descriptifs sont identiques aux bouts premiers introduits par M. Kaufmann lorsque:

1⁰ R est un domaine borné d'un espace euclidien μ-dimensionnel,

2⁰ $\varrho(x,y)=\varrho_e^*(x,y)$ où $\varrho_e(x,y)$ désigne la distance euclidienne.

Je me dispense toutefois de donner ici une démonstration détaillée de cette identité, en me bornant à remarquer que la construction **40**-**42** de ce mémoire s'obtient de celle de M. Kaufmann[28]), basée sur l'emploi des nombres transfinis, par une méthode générale concernant l'élimination de ces nombres et dont les principes ont été donnés par M. Kuratowski[29]).

IX. Théorème principal de M. Kaufmann[30]).

45. ***Théorème 3.*** *A tout bout premier $v \in V_0$ on peut faire correspondre une chaîne $\{G_m(v)\}$ telle que $\Omega(v)=\Theta(\{G_m(v)\})$.*

La démonstration de ce théorème sera partagée en plusieurs parties.

Considérons d'abord la base $\{M_i^*\}$ de R, introduite dans **10**, et soit

$$\{M_{r_j}^*\} \quad \text{où} \quad j=1,2,\ldots \tag{71}$$

la suite de domaines de cette base tels que M_r^{**} ne contient aucune suite de $\Omega(v)$.

46. *A toute suite normée $X \in \Omega(v)$ on peut faire correspondre une chaîne $\{G_m(X)\}$ où $m=0,1,\ldots$ telle que*

(i) $G_0(X)=R$;

(ii) $G_{m+1}(X)$ *est une composante de* $R-\sum_{j=1}^{m+1}\overline{M_{r_j}^*}$;

(iii) $G_{m+1}(X)$ *contient une suite partielle de* X.

En effet, on aurait dans le cas contraire un entier $m \geqslant 0$ tel que $G_0(X),\ldots,G_m(X)$ seraient déterminés conformément à (i), (ii) et (iii), mais qu'il serait impossible de déterminer $G_{m+1}(X)$. Soit $X^{(m)}$ la suite partielle de X contenue dans $G_m(X)$. Comme les ensembles $M_{r_j}^{**}$ où $j=1,2,\ldots,m+1$ ne contiennent aucune suite de $\Omega(v)$, ils ne peuvent contenir aucune suite conjuguée avec une suite partielle de $X^{(m)}$, car une telle suite est d'après **30** (C 4) et **36** (C′ 1) une

[28]) Kaufmann 1, p. 86-98. Il me semble d'ailleurs qu'il se trouve dans l'exposé de M. Kaufmann une petite lacune concernant l'existence de ses „complexes saturés" par rapport au nombre 2 (l. c., p. 88), mais qui est d'ailleurs facile à combler, p. ex. en modifiant quelque peu la définition du complexe de premier ordre. Je pense aussi qu'il est préférable d'éviter le terme „complexe", devenu classique en topologie combinatoire.

[29]) C. Kuratowski, Fund. Math. **3** (1922), p. 76-108.

[30]) Kaufmann 1, p. 108-119 (Satz X).

suite de $\Omega(v)$. Donc, d'après **27** (corollaire 2), une composante de $R-\sum_{j=1}^{m+1}\overline{M^*_{r_j}}$ — désignons-la par $G_{m+1}(X)$ — contient une suite partielle de $X^{(m)}$, donc une suite partielle de X. Comme $G_m(X)G_{m+1}(X)\supset \supset X^{(m)}G_{m+1}(X)\neq 0$, on aurait encore $G_{m+1}(X)\subset G_m(X)$ et $G_{m+1}(X)$ satisferait aux conditions requises, contrairement à la supposition.

La proposition 46 est ainsi démontrée.

47. *L'ensemble*

$$\Omega(X)=\Omega(v)\Theta(\{G_m(X)\}) \tag{72}$$

est régulier.

Supposons le contraire. $\Omega(v)$ étant régulier d'après **35** (lemme 14) et **36** (C′ 1), il existe un $Y=\{y_i\}\in\Omega(X)$ et un $Y_1=\{y_i^{(1)}\}$ tels que $Y_1\in\varphi(Y)$ et Y_1 non $\in\Theta(\{G_m(X)\})$. Il existe donc un m_1 et une suite $\{y_{i_k}^{(1)}\}$ telle que $y_{i_k}^{(1)}$ non $\in G_{m_1}(X)$. Comme $\{y_i\}\in\Theta\big(G_{m_1}(X)\big)$, on peut supposer que i_1 est suffisamment grand pour avoir $y_{i_k}\in G_{m_1}(X)$. On a $\lim\limits_{k\to\infty}\varrho(y_{i_k},y_{i_k}^{(1)})=0$; donc, la distance ϱ étant naturelle (comp. **2**), il existe une suite d'arcs simples $J\{(y_{i_k},y_{i_k}^{(1)})\}$ telle que $\lim\limits_{k\to\infty}\delta\big(J(y_{i_k},y_{i_k}^{(1)})\big)=0$. L'arc $J(y_{i_k},y_{i_k}^{(1)})$ rencontre nécessairement un point $y_k^{(2)}\in F\big(G_{m_1}(X)\big)\subset\sum_{j=1}^{m_1}\overline{M^*_{r_j}}\subset\sum_{j=1}^{m_1}M^{**}_{r_j}$. On a $\lim\limits_{k\to\infty}(y_{i_k},y_k^{(2)})=0$ et $\{y_k^{(2)}\}\in\varphi(\{y_{i_k}\})$. Or, $\{y_{i_k}\}$ étant une suite partielle de $Y\in\Omega(v)$, elle converge vers v, donc, $\Omega(v)$ étant régulier, on a $\{y_k^{(2)}\}\in\Omega(v)$. D'autre part, $y_k^{(2)}\in\sum_{j=1}^{m_1}M^{**}_{r_j}$ pour $k=1,2,\ldots$; par conséquent un domaine $M^{**}_{r_j}$ où $j=1,2,\ldots,m_1$ contient une suite partielle de $\{y_k^{(2)}\}$, donc une suite de $\Omega(v)$, contrairement à la définition des domaines (71).

48. *L'ensemble $\Omega(X)$ est fermé.*

C'est une conséquence de **47**, du fait que $\Omega(v)$ est fermé et de **22** (lemme 7, note).

49. *Si $Y=\{y_i\}\in\Omega(X)\Omega_{\alpha,\beta,\gamma}$, on a $\Delta(Y)\subset\Omega(X)$.*

Supposons le contraire; ile existe alors un indice m_1 et une suite $Y_1\in\{y_i^{(1)}\}$ telle que X_1 n'est pas essentiellement contenue dans $G_{m_1}(X)$. Il existe donc une suite $\{y_{i_k}^{(1)}\}$ telle que $\{y_{i_k}^{(1)}\}$ non $\in G_{m_1}(X)$; on peut supposer en outre que i_1 est suffisamment grand pour avoir $y_{i_k}\in G_{m_1}(X)$. Déterminons une suite spéciale d'arcs simples $\{J_1(y_i,y_i^{(1)})\}$. L'arc $J_1(y_{i_k},y_{i_k}^{(1)})$ rencontre $F\big(G_{m_1}(Y)\big)$ en un point $y_k^{(2)}$ et on a $y_k^{(2)}\in F\big(G_{m_1}(X)\big)\subset\sum_{j=1}^{m_1}\overline{M^*_{r_j}}\subset\sum_{j=1}^{m_1}M^{**}_{r_j}$; donc, l'un des domaines $M^{**}_{r_j}$ où $j=1,2\ldots m_1$ contient une suite partielle de la suite $\{y_k^{(2)}\}$; mais cette suite partielle étant conjuguée avec une suite partielle de $\{y_{i_k}\}$, donc de Y, elle est contenue dans $\Omega(v)$, contrairement à la définition des domaines (71).

50. *On a $X\in\Omega(X)$.*

Supposons que ce n'est pas le cas. Il existe alors un m_1 et une suite partielle X_1 de X telle que $X_1\subset R-G_{m_1}(X)$. La suite X_1 est normée d'après **38** (corollaire). On peut donc, d'après **46**, lui faire correspondre une chaîne $\{G_m(X)\}$ satisfaisant aux conditions **46** (i), (ii) et (iii). Le domaine $G_m(X_1)$ contient une suite partielle de X_1. Les domaines $G_{m_1}(X)$ et $G_{m_1}(X_1)$ sont des composantes de l'ensemble $R-\sum_{j=1}^{m_1}\overline{M^*_{r_j}}$, et des composantes différentes, puisque $G_{m_1}(X)$ ne contient aucun point de X_1 et $G_{m_1}(X_1)$ en contient une suite partielle. Par conséquent:

$$G_{m_1}(X)G_{m_1}(X_1)=0, \tag{73}$$

$$\Omega(X)\Omega(X_1)=0. \tag{74}$$

Il résulte facilement de **46** (iii) que $\Omega(X)$ contient une suite partielle Y de X et, de même, $\Omega(X_1)$ contient une suite partielle Y_1 de X_1. Ces suites étant des suites partielles de la suite normée X, elles sont normées et satisfont d'après **38** (lemme 15) à la relation $\overline{\Delta(Y)}\overline{\Delta(Y_1)}\neq 0$. Mais d'après **48** et **49**, on a $\overline{\Delta(Y)}\subset\Omega(X)$ et $\overline{\Delta(Y_1)}\subset\Omega(X_1)$, donc

$$\Omega(X)\Omega(X_1)\supset\Delta(Y)\Delta(Y_1)\neq 0, \tag{75}$$

en contradiction avec (74). La proposition 50 est ainsi démontrée.

51. Les considérations de **50** montrent que *pour deux suites normées X et $Y\in\Omega(v)$, on a ou bien $\Omega(X)\,\Omega(Y)=0$, ou bien $\Omega(X)=\Omega(Y)$.*

52. Nous allons montrer maintenant que

$$\Omega_{\alpha,\gamma}\Theta(\{G_m(X)\})\subset\Omega(v). \tag{76}$$

Soit $Y=\{y_i\}\in\Omega_{\alpha,\gamma}\Theta(\{G_m(X)\})$. D'après **15** (corollaire 2), il existe une suite d'indices $\{p_k\}$ telle que $Y\in\Theta(M^*_{p_k})$ et $\lim\limits_{k\to\infty}\delta(M^{**}_{p_k})=0.$

Les p_k sont distincts des r_j; en effet, une égalité $p_k = r_{j_1}$ entraînerait $Y \epsilon \Theta(M^*_{r_{j_1}})$; d'autre part, $Y \epsilon \Theta(G_{j_1}(X))$, donc $G_{j_1}(X) M^*_{r_{j_1}} \neq 0$, ce qui est en contradiction avec **46** (ii). Donc, $M^{**}_{p_k}$ contient pour chaque k une suite $Z_k = \{z_l^{(k)}\} \epsilon \Omega(v)$. D'autre part, Y contient une suite partielle $Y_1 = \{y_{i_k}\}$ telle que $y_{i_k} \epsilon M^*_{p_k}$. On aura:

(77) $$\lim_{k\to\infty} \limsup_{l\to\infty} \varrho(y_{i_k}, z_l^{(k)}) \leqslant \lim_{k\to\infty} \delta(M^{**}_{p_k}) = 0.$$

Donc, $Y_1 \epsilon \Omega(v)' \subset \Omega(v)$. Comme $Y \epsilon \varphi(Y_1)$, ce qui résulte de $Y \epsilon \Omega_{\alpha,\gamma}$, il vient $Y \epsilon \Omega(v)$, c. q. f. d.

Il résulte de (76) que $\Theta(\{G_m(X)\})$ ne contient aucune suite γ; donc:

(78) $$\Theta(\{G_m(X)\}) \subset \Omega.$$

53. Nous allons démontrer encore que

(79) $$\Omega_\beta \Theta(\{G_m(X)\}) \subset \Omega(v).$$

Il s'agit de montrer que si $Y \epsilon \Omega_\beta \Theta(\{G_m(X)\})$, alors $Y \epsilon \Omega(v)$. D'après **31**, il suffit de considérer les suites $Y = \{y_i\}$ telles que $Y \epsilon \Omega(V_0)$ et $y_i \epsilon G_i(X)$.

Supposons que Y non $\epsilon\, \Omega(v)$; on a alors $Y \epsilon \Omega(v_1)$ pour un $v_1 \neq v$ et $v_1 \epsilon V_0$. Considérons une suite partielle $Z = \{z_i\}$ de X telle que $z_i \epsilon G_i(X)$; une telle suite existe d'après **50** et on a $Z \epsilon \Omega(v)$. Réunissons y_i et z_i par un arc simple $J_1(y_i, z_i) \subset G_i(X)$. Deux cas peuvent se présenter:

1⁰ la suite $\{J_1(y_i, z_i)\}$ contient une suite spéciale $\{J_1(y_{i_k}, z_{i_k})\}$. Alors $\{y_{i_k}\} \epsilon \Delta(\{z_{i_k}\}) \Omega(v_1)$ et $\{z_{i_k}\} \epsilon \Omega(v)$ où $v \neq v_1$, contrairement à **36** (C' 1).

2⁰ la suite $\{J_1(y_i, z_i)\}$ ne contient aucune suite spéciale. Soit Ω_1 l'ensemble des suites $\{t_k\} \epsilon \Omega_{\alpha,\gamma}$ telles que $t_k \epsilon J_k(y_{i_k}, z_{i_k})$ où $i_k < i_{k+1}$. On a $\Omega_1 \subset \Theta(\{G_m(X)\})$, donc, selon **52**, $\Omega_1 \subset \Omega(v)$. Considérons pour un q fixe les domaines $\{G_{l,q}\}$ où $l = 1, 2, \dots$ tels que $G^*_{l,q}$ contient essentiellement une suite de Ω_1; soient $G_{l_n,q}$ ces domaines. D'après **15** (corollaire 1), toute suite de Ω_1 est essentiellement contenue dans un $G_{l_n,q}$, donc (en vertu de l'hypothèse de 2⁰), il existe un i'_q tel que pour $i \geqslant i'_q$ l'arc $J_1(y_i, z_i)$ rencontre $\overline{\sum_{n=1}^{\infty} G^*_{l_n,q}}$; ce dernier ensemble étant fermé d'après **8** (lemme 2), soit $z_i^{(q)}$ le premier point de $J_1(y_i, z_i)$ contenu dans $\overline{\sum_{n=1}^{\infty} G^*_{l_n,q}}$. La suite $\{J_1(y_i, z_i^{(q)})\}$ est spéciale

de type β. Désignons pour abréger par $H_{i,q}$ le $G_{l_n,q}$ tel que $z_i^{(q)} \epsilon \overline{G^*_{l_n,q}}$ et posons: $H^*_{i,q} = G^*_{l_n,q}$, $H^{**}_{i,q} = G^{**}_{l_n,q}$. Comme $\{z_i^{(q)}\} \epsilon \Delta(Y)$, on a $\{z_i^{(q)}\} \epsilon \Omega(v_1)$. Nous distinguons deux cas (d'ailleurs ne s'excluant pas):

(a) Il existe un q et une suite $\{H_{i_s,q}\}$ telle que la relation $t'_s \epsilon H^{**}_{i_s,q}$ entraîne $\{t'_s\} \epsilon \Omega_\beta$.

Déterminons dans $H_{i_s,q}$ une suite $\{t_k^{(s)}\} \epsilon \Omega_1 \subset \Omega(v)$; soit t''_s un point de cette suite tel que $\limsup_{k\to\infty} \varrho(t''_s, t_k^{(s)}) < 1/s$; on a

$$\lim_{s\to\infty} \limsup_{k\to\infty} \varrho(t''_s, t_k^{(s)}) = 0,$$

donc

(80) $$\{t''_s\} \epsilon \overline{\Omega(v)} = \Omega(v).$$

D'autre part, en unissant t''_s à $z_{i_s}^{(q)}$ par un arc simple $J(t''_s, z_{i_s}^{(q)}) \epsilon H^{**}_{i_s,q}$, on conclut de l'hypothèse que la suite de ces arcs est spéciale de type β. Donc $\{t''_s\} \epsilon \Delta(\{z_{i_s}^{(k)}\}) \subset \Omega(v_1)$, en contradiction avec (80).

(b) Quel que soit q, il existe une suite $\{H_{i_s,q}\}$ et une suite $\{t_s^{(q)}\}$ telles que $t_s^{(q)} \epsilon H^{**}_{i_s,q}$ et $\{t_s^{(q)}\} \epsilon \Omega_{\alpha,\gamma}$. D'après **15** (corollaire 1), la suite $\{t_s^{(q)}\}$ est essentiellement contenue dans un domaine $G^*_{p_q,q}$; il existe donc un s_q tel que $s \geqslant s_q$ entraîne $G^*_{p_q,q}\, H^{**}_{i_s,q} \neq 0$. Donc, d'après **6** (7):

(81) $$H_{i_s,q} \subset G_{p_q,q} \quad \text{pour} \quad s \geqslant s_q.$$

D'après (81), le domaine $G^{***}_{p_q,q}$ contient essentiellement la suite $\{z_{i_s}^{(q)}\} \epsilon \Omega(v_1)$ et en même temps une suite $\{t_{s,q}\} \epsilon \Omega_1 \subset \Omega(v)$ (puisque chaque $H^{**}_{i,q}$ contient une telle suite). Soit $t'''_q \epsilon G^{***}_{p_q,q}$; on a d'après **6** (9):

(82) $$\lim_{q\to\infty} \limsup_{s\to\infty} \varrho(t'''_q, z_{i_s}^{(q)}) \leqslant \lim_{q\to\infty} \delta(G^{***}_{p_q,q}) \leqslant \lim_{q\to\infty} 26/q = 0,$$

(83) $$\lim_{q\to\infty} \limsup_{s\to\infty} \varrho(t'''_q, t_{s,q}) \leqslant \lim \delta(G^{***}_{p_q,q}) = 0.$$

Donc:

(84) $$\{t'''_q\} \epsilon \overline{\Omega(v)}\, \overline{\Omega(v_1)} = \Omega(v)\, \Omega(v_1),$$

en contradiction avec la supposition que $v \neq v_1$. La relation (79) est ainsi démontrée.

54. Il résulte de (76) et (79) que

(85) $$\Omega_{\alpha,\beta,\gamma} \Theta(\{G_m(X)\}) \subset \Omega(v).$$

Soit maintenant $Z \epsilon \Theta(\{G_m(X)\})$. Z_1 étant une suite partielle de Z, on peut trouver une suite partielle Z_2 de Z_1 telle que $Z_2 \epsilon \Omega_{\alpha,\beta,\gamma}$. Alors $Z_2 \epsilon \Omega_{\alpha,\beta,\gamma} \Theta(\{G_m(X)\}) \subset \Omega(v)$. Donc, d'après **30** (C5), on a $Z \epsilon \Omega(v)$.

On a par conséquent les relations:

$$\Theta(\{G_m(X)\}) \subset \Omega(v), \tag{86}$$

$$\Omega(X) = \Theta(\{G_m(X)\}). \tag{87}$$

55. Nous pouvons maintenant achever la démonstration du théorème 3 (comp. **45**).

Considérons la familles $\mathfrak{B}$ de sous-ensembles fermés de Ω, définie comme il suit: $\Phi \in \mathfrak{B}$ si Φ est un agrégat et s'il existe un $v_1 \in V_0$ tel que $v_1 \neq v$ et $\Phi \subset \Omega(v_1)$ ou bien un $X \in \Omega(v)\Omega_v$ tel que $\Phi \subset \Omega(X)$. On a évidemment $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$.

Considérons un agrégat élémentaire $\Delta(Y)$. Si $Y \in \Omega(v_1)$ et $v_1 \neq v$, on aura $\overline{\Delta(Y)} \subset \Omega(v_1)$, donc $\overline{\Delta(Y)} \in \mathfrak{B}$. Si $Y \in \Omega(v)$, alors, Y étant une suite normée, on aura d'après **50** et **49** $Y \in \Omega(Y)$ et $\overline{\Delta(Y)} \subset \Omega(Y)$, donc encore $\overline{\Delta(Y)} \in \mathfrak{B}$. On voit ainsi que la famille $\mathfrak{B}$ satisfait à la condition **40** (A 1).

Soit maintenant $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}$ et $\prod_{\Phi \in \mathfrak{B}_1} \Phi \neq 0$. Tout agrégat étant contenu dans un certain $\Omega(v_1)$ où $v_1 \in V_0$, on voit d'après **31** (36) que tous les $\Phi \in \mathfrak{B}_1$ sont contenus dans un $\Omega(v_1)$ où $v_1 \in V_0$. Si $v_1 \neq v$, l'agrégat $\sum_{\Phi \in \mathfrak{B}_1} \Phi$ est encore contenu dans $\Omega(v_1)$, donc $\sum_{\Phi \in \mathfrak{B}_1} \Phi \in \mathfrak{B}$. Si, par contre, les $\Phi \in \mathfrak{B}_1$ sont contenus dans $\Omega(v)$, alors chaque Φ est contenu dans un $\Omega(X_\Phi)$ où $X_\Phi \in \Omega(v)\Omega_v$ et, d'après **51**, tous ces $\Omega(X_\Phi)$, comme contenant $\prod_{\Phi \in \mathfrak{B}_1} \Phi \neq 0$, doivent être identiques. L'agrégat $\sum_{\Phi \in \mathfrak{B}_1} \Phi$ est donc contenu dans $\Omega(X_\Phi)$ où $\Phi \in \mathfrak{B}_1$, de sorte que $\sum_{\Phi \in \mathfrak{B}_1} \Phi \in \mathfrak{B}$. On voit ainsi que la famille $\mathfrak{B}$ satisfait à la condition **40** (A 2).

Il en résulte que $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, et finalement $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.

Soit maintenant Φ_0 l'agrégat saturé définissant l'élément v, c. à d., d'après **32** (42), celui pour lequel $\Phi_0^* = \Omega(v)$. Il existe un $X_0 \in \Omega(v)\Omega_v$ tel que $\Phi_0 \subset \Omega(X_0)$; on a donc d'après **14**

$$\Phi_0^* = \Omega(v) = \Omega(X_0)^* = \Theta(\{G_m(X_0)\})^* = \Theta(\{G_m(X_0)\}) = \Omega(X_0). \tag{88}$$

Il en résulte d'après (86) que, pour tout $X \in \Omega(v)\Omega_v$, on a $\Omega(X) \subset \Omega(X_0)$, donc en vertu de **51** $\Omega(X) = \Omega(X_0)$. Il s'ensuit que pour un m fixe tous les $G_m(X)$ où $X \in \Omega(v)\Omega_v$ sont identiques; on peut les désigner par $G_m(v)$ et l'on a d'après (88)

$$\Omega(v) = \Theta(\{G_m(v)\}), \tag{89}$$

ce qui démontre le théorème 3.

56. ***Corollaire 1.*** *Soient: $X = \{x_i\} \in \Omega(v)$ et $Y = \{y_i\} \in \Omega(v)$. Il existe une suite d'arcs simples $\{J(x_i, y_i)\}$ telle que $z_i \in J(x_i, y_i)$ entraîne $\{z_i\} \in \Omega(v)$.*

Soit, en effet, m_i le plus grand entier pour lequel on a simultanément $x_j \in G_{m_i}(v)$ et $y_j \in G_{m_i}(v)$ pour $j = i, i+1, \ldots$ La suite $\{m_i\}$ est non décroissante et on a par hypothèse $\lim_{i \to \infty} m_i = +\infty$. Considérons un arc simple $J(x_i, y_i) \subset G_{m_i}(v)$. La relation $z_i \in J(x_i, y_i)$ où $i = 1, 2, \ldots$ entraîne

$$\{z_i\} \in \Theta(\{G_{m_i}(v)\}) = \Theta(\{G_m(v)\}) = \Omega(v), \tag{90}$$

c. q. f. d.

Corollaire 2. *Si $\Omega(v)$ où $v \in V_0$ est essentiellement contenu dans un ensemble ouvert H, alors $\Omega(v)$ est essentiellement contenu dans une composante de H.*

57. Appelons *courbe asymptotique de R* un ensemble de points $x(\tau) \in R$, la fonction $x(\tau)$ étant définie pour $0 \leqslant \tau < 1$, continue, et la condition $\lim_{i \to \infty} \tau_i = 1$ entraînant $\{x(\tau_i)\} \in \Omega$. V étant une frontière descriptive, nous dirons que *la courbe converge vers* $v \in V$, si la condition $\lim_{i \to \infty} \tau_i = 1$ entraîne $\{x(\tau_i)\} \in \Omega(v)$.

Corollaire. *v étant un bout premier descriptif, il existe une courbe asymptotique de R qui converge vers v.*

Il suffit de considérer la courbe $\sum_{i=1}^{\infty} J(x_i, x_{i+1})$ où $\{x_i\}$ est une suite de $\Omega(v)$ et $J(x_i, x_{i+1})$ un arc simple tel que $z_i \in J(x_i, x_{i+1})$ entraîne $\{z_i\} \in \Omega(v)$; une suite $\{J(x_i, x_{i+1})\}$ possédant cette propriété existe d'après **56**.

Les corollaires de **56** et **57** établissent pour les bouts premiers descriptifs une sorte *d'accessibilité* qui me semble être la raison géometrique de leur introduction.

58. ***Lemme 19.*** *Si l'ensemble ouvert H contient essentiellement l'ensemble $\Omega(v)$ (comp. **14**), il existe un entier m_1 tel que $G_{m_1}(v) \subset H$.*

En supposant le contraire, on aurait $G_m(v) - H \neq 0$ où $m = 0, 1, 2, \ldots$ Soit $x_m \in G_m(v) - H$; alors $\{x_m\} \in \Theta(\{G_m(v)\}) = \Omega(v) \subset \Theta(H)$; on aurait donc pour m suffisamment grand $x_m \in H$, en contradiction avec la définition de x_m.

59. ***Lemme 20.*** *Si $v_1 \neq v_2$, il existe un m_0 tel que $G_{m_0}(v_1)G_{m_0}(v_2)=0$.*

On aurait en cas contraire $G_m(v_1)\,G_m(v_2)\neq 0$, où $m=0,1,\ldots$; soit $x_m \in G_m(v_1)\,G_m(v_2)$; alors $\{x_m\} \in \Omega(v_1)\,\Omega(v_2)$, en contradiction avec **31** (36).

60. Le point $v \in V_0$ étant fixé, les domaines $G_m(v)$ dépendent de domaines M_n, introduits dans **10**. Le choix de ces domaines étant fixé, tout $G_m(v)$ est déterminé d'une manière univoque et *l'ensemble de ces domaines pour $v \in V_0$ et $m=0,1,\ldots$ est dénombrable.* Rangeons-les en une suite infinie

$$\{L_i\} \quad \text{où} \quad i=1,2,\ldots \tag{91}$$

61. ***Lemme 21.*** *$\{L_j^{(0)}\}$ étant une suite partielle de (91) contenant pour chaque $v \in V_0$ l'un au moins des domaines $G_m(v)$, il existe un p_0 tel que toute suite asymptotique est essentiellement contenue dans l'ensemble ouvert $\sum\limits_{j=1}^{p_0} L_j^{(0)}$.*

Supposons le contraire; il existe alors pour tout k une suite $\{x_i^{(k)}\}$ qui n'est pas essentiellement contenue dans $\sum\limits_{j=1}^{k} L_j^{(0)}$. L'ensemble $\sum\limits_{j=1}^{k} M_j$ étant d'après **5** (2) et **10** à fermeture compacte, on a pour i suffisamment grands $x_i^{(k)}$ non $\in \sum\limits_{j=1}^{k} M_j$, car, en cas contraire, $\{x_i^{(k)}\}$ contiendrait une suite partielle γ. Il existe donc pour tout k un i_k tel que

$$y_k = x_{i_k}^{(k)} \in R - \Big[\sum_{j=1}^{k} M_j + \sum_{j=1}^{k} L_j^{(0)}\Big] \qquad \text{pour } k=1,2,\ldots \tag{92}$$

On a $\{y_k\} \in \Omega$, car autrement $\{y_k\}$ contiendrait une suite partielle γ, donc une suite essentiellement contenue dans un M_j, ce qui est impossible. La suite $\{y_k\}$ contient une suite partielle $\{y_{k_n}\}$ convergente vers un $v_1 \in V_0$. D'après la supposition, il existe un j_0 et un m_0 tels que $G_{m_0}(v_1)=L_{j_0}^{(0)}$. Donc, $\{y_{k_n}\}$ est essentiellement contenue dans $L_{j_0}^{(0)}$ et *a fortiori* dans $\sum\limits_{j=1}^{j_0} L_j^{(0)}$, en contradiction avec (92). Le lemme 21 est ainsi démontré.

Chapitre troisième: Les bouts premiers topologiques.

X. La frontière topologique.

62. Plaçons-nous à présent au point de vue de la seconde manière d'envisager la frontière d'un domaine (comp. **29**).

Supposons déterminée une frontière descriptive V; le problème s'impose de prolonger sur V la topologie de R de manière que les suites de R qui convergent vers un $v \in V$ selon la notion de convergence considérée dans la définition de V (voir **30**) convergent vers v aussi d'après cette topologie.

Ce problème nous conduit à la notion de frontière topologique.

Définition. Nous dirons que l'ensemble W est une *frontière topologique* de R si l'on a déterminé pour l'ensemble $R+W$ une topologie satisfaisant aux conditions suivantes:

(D 1) *Cette topologie coïncide dans R avec celle donnée pour R.*
(D 2) *W est contenu dans la fermeture $\bar{R}$ de R.*
(D 3) *$R+W$ est un espace compact et métrisable.*

Le problème de la détermination d'une frontière topologique W peut être formulé encore de la manière suivante: *il s'agit de „plonger" R dans un espace compact et métrisable; W est alors la frontière de R par rapport à cet espace.*

Les suites de points de R qui convergent d'après la topologie de $R+W$ vers les éléments $w \in W$ satisfont évidemment aux conditions (C 1)-(C 5) de **30**. Donc: *toute frontière topologique est une frontière descriptive.* Par suite, les symboles: $\Omega(W)$, $\Omega(w)$ et $w \in W$ ont le sens qui a été défini dans **31** et les termes: *W identique, plus faible, plus forte que W_1* ont le sens défini dans **34**.

63. ***Théorème 4.*** *Il existe une frontière topologique W_0 satisfaisant aux conditions suivantes:*

(D' 1) *Si $X \in \Omega(w)\Omega_{\alpha,\beta}$, on a $\Delta(\Upsilon) \subset \Omega(w)$.*
(D' 2) *La frontière W_0 est plus faible que toute frontière topologique W satisfaisant à (D' 1) et différente de W_0.*

Les éléments de W_0 seront appelés *bouts premiers topologiques.*

On remarquera que la condition (D' 1) est identique à **36** (C' 1), tandis que (D' 2) est analogue à (C' 3).

La démonstration du théorème 4 (voir **94**) sera précédée de plusieurs lemmes.

64. ***Lemme 22.*** *Si la frontière topologique W satisfait à* (D′1), *l'ensemble $\Omega(w)$ est fermé.*

En effet, d'après **35** (lemme 14), $\Omega(w)$ est régulier. Soit $X=\{x_i\}\in\big(\Omega(w)\big)'$. Il existe une suite $\{Y_i\}=\{\{y_j^{(i)}\}\}$ telle que $Y_i\in\Omega(w)$ et l'on a

(93) $$\lim_{i\to\infty}\limsup_{j\to\infty}\varrho(x_i,y_j^{(i)})=0.$$

$R+W$ étant métrisable, introduisons dans cet espace une métrique ϱ_1. La relation $Y_i\in\Omega(w)$ exprime que Y_i converge vers w. Donc, $\lim\limits_{j\to\infty}\varrho_1(w,y_j^{(i)})=0$, quel que soit i. Donc, à chaque i correspond un j_i tel que l'on a:

(94) $$\lim_{i\to\infty}\varrho(x_i,y_{j_i}^{(i)})=0,$$

(95) $$\varrho_1(w,y_{j_i}^{(i)})<1/i.$$

Il en résulte que $\lim\limits_{i\to\infty}\varrho_1(w,y_{j_i}^{(i)})=0$, donc $\{y_{j_i}^{(i)}\}\in\Omega(w)$. D'autre part, d'après (94), on a $\{x_i\}=X\in\varphi(\{y_{j_i}^{(i)}\})\subset\Omega(w)$, c. q. f. d.

Il en résulte que si W_0 existe, W_0 satisfait à (C′2) et à la condition (C′1), qui est identique à (D′1). Donc, d'après (C′3), W_0 *est plus fort ou identique à* V_0. On verra dans la suite qu'en général W_0 et V_0 ne sont pas identiques.

65. Soit $v\in V_0$ et W une frontière topologique.

J'appelle *projection du bout premier v sur la frontière W* l'ensemble $E(v,W)$ de tous les $w\in W$ qui satisfont à la condition $\Omega(v)\Omega(w)\neq 0$.

En particulier si R est un domaine borné de l'espace euclidien, la frontière euclidienne $F(R)$ est une frontière topologique. J'appelle la projection $E\big(v,F(R)\big)$, c. à d. celle de v sur $F(R)$, *projection euclidienne du bout premier v.*

On dira, généralement, que les points de la projection euclidienne de v sont *contenus* dans v, et il est commode de déterminer les bouts premiers par leur projection euclidienne.

66. ***Lemme 23.*** *La projection $E(v,W)$ est un ensemble fermé.*

Soient, en effet, $w_i\in E(v,W)$ et $w_0=\lim\limits_{i\to\infty}w_i$; considérons dans $R+W$ une métrique ϱ_1. On a

(96) $$\lim_{i\to\infty}\varrho_1(w_0,w_i)=0.$$

D'après la définition de la projection, on a $\Omega(v)\Omega(w_i)\neq 0$; soit $X_i=\{x_j^{(i)}\}\in\Omega(v)\Omega(w_i)$. Il vient $\lim\limits_{j\to\infty}\varrho_1(x_j^{(i)},w_i)=0$ et $X_i\in\Theta(\{G_m(v)\})$, donc, on peut faire correspondre à chaque i un j_i tel que $x_{j_i}^{(i)}\in G_i(v)$ et $\varrho_1(x_{j_i}^{(i)},w_i)\leqslant 1/i$. Il en résulte que $\lim\limits_{i\to\infty}\varrho_1(x_{j_i}^{(i)},w)=0$, c. à d. $\{x_{j_i}^{(i)}\}\in\Omega(w_0)$ et $\{x_{j_i}^{(i)}\}\in\Theta(\{G_i(v)\})=\Omega(v)$, donc $\Omega(w_0)\Omega(v)\neq 0$, donc $w_0\in(v,W)$, ce qui démontre le lemme.

XI. Construction des bouts premiers topologiques.

67. ***Définition.*** $\{\Phi_n\}$ étant une suite de sous-ensembles fermés de Ω, nous désignons par $\mathfrak{N}(\{\Phi_n\})$ la classe d'ensembles fermés $\Phi\subset\Omega$ possédant la propriété suivante: à tout domaine G contenant essentiellement Φ correspond un n_0 tel que $n\geqslant n_0$ entraîne $\Phi_n\Theta(G)\neq 0$.

68. Les hyperagrégats. La famille $\mathfrak{H}$ de *hyperagrégats* est la plus petite famille de sous-ensembles fermés de Ω possédant les propriétés suivantes:

(A′1) Si $v\in V_0$, alors $\Omega(v)\in\mathfrak{H}$;

(A′2) Si $\mathfrak{H}_1\subset\mathfrak{H}$ et $\prod\limits_{\Phi\in\mathfrak{H}_1}\Phi\neq 0$, alors $\overline{\sum\limits_{\Phi\in\mathfrak{H}_1}\Phi}\in\mathfrak{H}$;

(A′3) Si $\Phi_n\in\mathfrak{H}$ pour $n=1,2\ldots$ et $\mathfrak{H}_1\subset\mathfrak{H}\mathfrak{N}(\{\Phi_n\})$, alors $\overline{\sum\limits_{\Phi\in\mathfrak{H}_1}\Phi}\in\mathfrak{H}$.

Evidemment, $\mathfrak{H}$ est la partie commune de toutes les familles possédant les propriétés (A′1), (A′2) et (A′3). Il existe de telles familles, p. ex. la famille de tous les sous-ensembles fermés de Ω.

Corollaire 1. *Si $\Phi,\Psi,\Phi_n\in\mathfrak{H}$ pour $n=1,2\ldots$ et $\Phi,\Psi\in\mathfrak{N}(\{\Phi_n\})$, alors $\Phi+\Psi\in\mathfrak{H}$.*

Corollaire 2. *Tout hyperagrégat est de la forme* $\overline{\sum\limits_{v\in V_1}\Omega(v)}$ où $V_1\subset V_0$.

En effet, on vérifie aisément que la classe d'ensembles de cette forme possède les propriétés (A′1)-(A′3), ce qui démontre le lemme.

69. ***Définition.*** J'appelle *saturé* un hyperagrégat, s'il est identique à tout hyperagrégat qui le contient. La classe des hyperagrégats saturés sera désignée par $\mathfrak{H}_s$.

Corollaire 1. *Tout hyperagrégat est contenu dans un hyperagrégat saturé* (comp. **40**, corollaire 2).

Corollaire 2. *Si $\Phi_1,\Phi_2\in\mathfrak{H}_s$ et $\Phi_1\neq\Phi_2$, alors $\Phi_1\Phi_2=0$.*

70. ***Lemme 24.*** *La classe $\mathfrak{H}_s$ des hyperagrégats saturés détermine une frontière descriptive W_0.*

D'après **32** (lemme 11), il faut démontrer que:

$$(\sum_{\Phi \in \mathfrak{H}_s} \Phi)^* = \Omega; \tag{97}$$

$$\Phi_1 \Phi_2 = 0 \text{ si } \Phi_1 \neq \Phi_2, \quad \Phi_1 \in \mathfrak{H}_s \quad \text{et} \quad \Phi_2 \in \mathfrak{H}_s; \tag{98}$$

$$\Phi \in \mathfrak{H}_s \text{ est héréditaire.} \tag{99}$$

Or, d'après **68** (A′1), on a $\Omega(V_0) \subset \sum_{\Phi \in \mathfrak{H}_s} \Phi$, de sorte que (97) résulte de **31** (34). La relation (98) est identique au corollaire 2 de **69.** Enfin (99) est une conséquence de **68** (corollaire 2), **31** (37) et **19** (lemme 4); comp. la démonstration de (65) dans **42** (lemme 18). Le lemme 24 est ainsi démontré.

D'après **12**, à chaque $\Phi \in \mathfrak{H}_s$ on attache un élément $w(\Phi)$ et on pose:

$$\Omega(w(\Phi)) = \Phi^*. \tag{100}$$

71. Introduction de la limite dans W. Soient $w_0 \in W_0$ et $w_i \in W_0$ pour $i = 1, 2, \ldots$ Nous dirons que *la suite* $\{w_i\}$ *converge vers* w_0 et nous écrirons

$$w_0 = \lim_{i \to \infty} w_i \tag{101}$$

si l'on a

$$\Omega(w_0) \in \mathfrak{N}(\{\Omega(w_i)\}). \tag{102}$$

Lemme 25. $\lim_{i\to\infty} w_i$ *est déterminé d'une manière univoque.*

Supposons, en effet, que

$$w_0 = \lim_{i\to\infty} w_i, \quad w_0' = \lim_{i\to\infty} w_i \quad \text{et} \quad w_0 \neq w_0'. \tag{103}$$

Soient Φ_0, $\Phi_0^{(1)}$ et Φ_i les hyperagrégats saturés qui déterminent respectivement w_0, w_0' et w_i. On a:

$$\Omega(w_0) = \Phi_0^*, \quad \Omega(w_0') = \Phi_0^{(1)*} \quad \text{et} \quad \Omega(w_i) = \Phi_i^* \quad \text{pour } i = 1, 2, .. \tag{104}$$

Je dis que les conditions (103) entraînent:

$$\Phi_0 \in \mathfrak{N}(\{\Phi_i\}) \quad \text{et} \quad \Phi_0^{(1)} \in \mathfrak{N}(\{\Phi_i\}). \tag{105}$$

Il suffit évidemment de démontrer la première des relations (105). Soit G un domaine contenant essentiellement Φ_0; $\Theta(G)$ étant clos, G contient essentiellement $\Phi_0^* = \Omega(w_0)$; il existe donc un i_0 tel que $i \geqslant i_0$ entraîne $\Theta(G)\Omega(w_i) \neq 0$. Soit $X_i \in \Theta(G)\Omega(w_i)$. D'après (104), X_i contient une suite partielle $Y_i \in \Phi_i$, et comme on a évidemment $Y_i \in \Theta(G)$, il en résulte que $\Theta(G)\Phi_i \neq 0$ pour $i \geqslant i_0$. La relation (105) est ainsi démontrée.

La troisième des relations (103) entraîne $\Phi_0 \Phi_0^{(1)} = 0$, donc $\Phi_0 \neq \Phi_0 + \Phi_0^{(1)}$. D'après **68** (corollaire 1) et (105), $\Phi_0 + \Phi_0^{(1)}$ est un hyperagrégat contenant l'hyperagrégat saturé Φ_0 et différent de lui, ce qui est en contradiction avec la définition de l'hyperagrégat saturé. Le lemme 25 est ainsi démontré.

72. ***Lemme 26.*** *L'espace* W_0 *est un espace* L^*,

c. à d. on a les trois conditions caractérisant les espaces L^* [31]):

(a) si $\lim_{i\to\infty} w_i = w_0$ et $\{i_j\}$ est une suite croissante d'indices, alors $\lim_{j\to\infty} w_{i_j} = w_0$;

(b) si $w_i = w_0$ pour tout i, alors $\lim_{i\to\infty} w_i = w_0$;

(c) si la suite $\{w_i\}$ ne converge pas vers w_0, elle contient une suite partielle dont aucune suite partielle ne converge vers v_0.

Or, la condition (a) est une conséquence de la relation $\mathfrak{N}(\{\Phi_{i_j}\}) \supset \mathfrak{N}(\{\Phi_i\})$, et la condition (b) est évidente. Pour démontrer (c), supposons que $\{w_i\}$ ne converge pas vers w_0. Il existe alors un domaine G contenant essentiellement $\Omega(w_0)$ et tel que $\Theta(G)\Omega(w_i) = 0$ pour une infinité $i_1 < i_2 \ldots < i_j < \ldots$ d'indices i. La suite $\{w_{i_j}\}$ ne peut évidemment contenir aucune suite partielle convergente vers w_0.

73. On voit d'après **68, 69** et **70,** que tout $\Omega(v)$ où $v \in V_0$ est contenu dans un $\Omega(w)$ où $w \in W_0$. Donc, la frontière V_0 est identique à W_0 ou plus faible. On peut donc appliquer à V_0 et W_0 le lemme 13 de **34.** En désignant par $V_0(w)$ l'ensemble de tous les $v \in V_0$ tels que $\Omega(v) \subset \Omega(w)$ où $w \in W_0$, on a les relations:

$$\sum_{w \in W_0} V_0(w) = V_0, \tag{106}$$

$$\Omega(w) \supset \sum_{v \in V_0(w)} \Omega(v), \tag{107}$$

$$\Omega(w) = (\sum_{v \in V_0(w)} \Omega(v))^*. \tag{108}$$

---

31) Comp. C. Kuratowski, op. cit., p. 76-77.

74. ***Lemme 27.*** *Si* $v_0 \in V_0(w_0)$, $v_i \in V_0(w_i)$ *et* $\Omega(v_0) \in \mathfrak{N}(\{\Omega(v_i)\})$, *on a*

$$w_0 = \lim_{i\to\infty} w_i. \tag{109}$$

Supposons en effet, que le domaine G contienne essentiellement $\Omega(w_0)$; alors il contient *a fortiori* $\Omega(v_0)$; il existe donc un i_1 tel que pour $i \geqslant i_1$ on a $\Theta(G)\Omega(v_i) \neq 0$, donc *a fortiori* $\Theta(G)\Omega(w_i) \neq 0$, ce qui démontre (109).

75. ***Lemme 28.*** W_0 *est compact.*

Soit, en effet, $\{w_i\}$ une suite d'éléments de W_0; considérons une suite $\{v_i\}$ où $v_i \in V_0(w_i)$. Je dis qu'il existe une suite partielle $\{v_{i_j}\}$ telle que l'ensemble $\mathfrak{N}(\{\Omega(v_{i_j})\})$ contient au moins un $\Omega(v)$; d'après **74**, cela suffit pour démontrer le lemme. Or, en supposant le contraire, considérons pour tout $v \in V_0$ la suite $\{G_m(v)\}$. Supposons que, pour un v et tout m, la relation $\Theta\big(G_m(v)\big)\Omega(v_i) \neq 0$ est vérifiée pour une infinité d'indices i; posons $k_0=1$ et désignons par k_{m+1} le premier indice dépassant k_m et tel que $\Theta\big(G_{m+1}(v)\big)\Omega(v_{k_{m+1}}) \neq 0$. Soit H un domaine arbitraire contenant essentiellement $\Omega(v)$. D'après **58** (lemme 19), il existe un m_1 tel que pour $m \geqslant m_1$ on a $G_m(v) \subset H$. Donc:

$$\Theta(H)\Omega(v_{k_m}) \supset \Theta\big(G_m(v)\big)\Omega(v_{k_m}) \neq 0 \qquad \text{pour } m \geqslant m_1. \tag{110}$$

On aurait par conséquent $\Omega(v) \in \mathfrak{N}(\{\Omega(v_{k_m})\})$, contrairement à la supposition. On voit par suite que pour tout $v \in V_0$, il existe un $m(v)$ tel que l'on a $\Theta\big(G_{m(v)}(v)\big)\Omega(v_i) \neq 0$ tout au plus pour un nombre fini d'indices i. Soit $\{L_j^{(0)}\}$ la suite formée de tous les $G_{m(v)}(v)$. D'après **61** (lemme 21), il existe un nombre p tel que toute suite asymptotique est essentiellement contenue dans $\sum_{j=1}^{p} L_j^{(0)}$. Soit $X_i \in \Omega(v_i)$. Il existe un indice $p_i \leqslant p$ tel que $L_{p_i}^{(0)}$ contient essentiellement une suite partielle de X_i, donc une suite de $\Omega(v_i)$; on a donc $\Theta(L_{p_i}^{(0)})\Omega(v_i) \neq 0$. On a donc pour un $q \leqslant p$ et pour une infinité de i la relation $\Omega(v_i)\Theta(L_q^{(0)}) \neq 0$, en contradiction avec la définition de $L_j^{(0)}$. Le lemme est ainsi démontré.

76. ***Lemme 29.*** *Si* $v \in V_0 - V_0(w_0)$, *il existe un* m_0 *tel que*

$$\Theta\big(G_{m_0}(v)\big)\Omega(w_0) = 0. \tag{111}$$

Supposons le contraire; il existe alors pour tout m une suite $X_m \in \Theta\big(G_m(v)\big)\Omega(w_0)$. Or, X_m contient une suite $Y_m \in \Omega(V_0)$; soit $Y_m \in \Omega(v_m)$. Comme $Y_m \in \Omega(w_0)$, on a $v_m \in V_0(w_0)$ et $\Omega(v) \in \mathfrak{N}(\{\Omega(v_m)\})$. Soit w_0' l'élément de W_0 pour lequel $v \in V_0(w_0')$. D'après **72** (lemme 26 (2)) et **74** (lemme 27), il en résulte que $w_0' = w_0$ et $v \in V_0(w_0)$, contrairement à la supposition.

77. ***Lemme 30.*** *Si* $w_0 \in W_0$ *et le domaine* H *satisfait à la condition* $\Theta(H)\Omega(w_0) = 0$, *alors on peut faire correspondre à tout* $v \in V_0(w_0)$ *un* $m(v)$ *tel que*

$$G_{m(v)}(v)H = 0. \tag{112}$$

Supposons, en effet, que pour un $v \in V_0(w_0)$ et pour tout m on ait $G_m(v)H \neq 0$. Soit $x_m \in G_m(v)H$. On aurait donc

$$\{x_m\} \in \Theta(\{G_m(v)\})\Theta(H) = \Omega(v)\Theta(H) \subset \Omega(w_0)\Theta(H),$$

en contradiction avec la supposition.

78. ***Lemme 31.*** *Si l'ensemble ouvert* H *contient essentiellement* $\Omega(w_0)$ *et si* $\Omega(w_i) - \Theta(H) \neq 0$ *pour* $i = 1, 2, \ldots$, *alors on ne peut pas avoir* $\lim_{i\to\infty} w_i = w_0$.

Deux cas sont à considérer:

1° Il existe un $v \in V_0 - V_0(w_0)$ tel que $\Theta\big(G_m(v)\big)\Omega(w_i) \neq 0$ pour tout m et pour une infinité des i. Posons $i_0 = 1$ et désignons par i_{m+1} le premier indice $i > i_m$ pour lequel $\Theta\big(G_{m+1}(v)\big)\Omega(w_{m+1}) \neq 0$. Alors $\Theta\big(G_m(v)\big)\Omega(w_{i_k}) \neq 0$ pour $k = m, m+1, \ldots$ Donc $\Omega(v) \in \mathfrak{N}(\{\Omega(w_{i_k})\})$. On a $v \in V_0(w')$ où $w' \neq w_0$ et $\Omega(w') \in \mathfrak{N}(\{\Omega(w_{i_k})\})$. Donc, $w' = \lim w_{i_k}$ et la relation $\lim_{i\to\infty} w_i = w_0$ est par suite impossible, c. q. f. d.

2° Pour tout $v \in V_0 - V_0(w_0)$, il existe un $m(v)$ tel que l'on a $\Theta\big(G_{m(v)}(v)\big)\Omega(w_i) \neq 0$ tout au plus pour un nombre fini d'indices i. Déterminons pour tout $v \in V_0(w_0)$ un indice $m(v)$ de manière que $G_{m(v)}(v) \subset H$. Rangeons les domaines $G_{m(v)}(v)$ où $v \in V_0$ en une suite infinie $\{L_j^{(0)}\}$. D'après **61** (lemme 21), il existe un p tel que toute suite asymptotique est essentiellement contenue dans l'ensemble $\sum_{j=1}^{p} L_j^{(0)}$. Comme $\Omega(w_i) - \Theta(H) \neq 0$ et $\Omega(w_i)$ étant héréditaire, il existe une suite $X_i = \{x_l^{(i)}\} \in \Omega(w_i)$ telle que $x_l^{(i)}$ non $\in H$. Un des ensembles $L_j^{(0)}$ où $j = 1, 2, \ldots, p$ contient une suite partielle $Y_i = \{y_l^{(i)}\}$ de X_i. Donc, un des $L_j^{(0)}$ où $j = 1, 2, \ldots, p$ — on peut supposer que c'est $L_1^{(0)}$ — contient $Y_i \in \Omega(w_i)$ pour une infinité des i. Or, $L_1^{(0)} = G_{m(v')}(v')$.

Si $v' \epsilon V_0(w_0)$, on aurait $L_1^{(0)} \subset H$, ce qui est impossible, H ne contenant aucun $x_l^{(i)}$, donc aucun $y_l^{(i)}$. Si $v' \epsilon V_0 - V_0(w_0)$, on aurait $\Theta\big(G_{m(v')}(v')\big)\Omega(w_i) \neq 0$ pour une infinité de i, en contradiction avec la définition de $m(v)$. La relation $\lim\limits_{i\to\infty} w_i = w_0$ est donc impossible aussi dans le cas 2^0 et le lemme 31 se trouve démontré.

Corollaire. *Si l'ensemble ouvert H contient essentiellement $\Omega(w_0)$ et si $w_0 = \lim\limits_{i\to\infty} w_i$, alors H contient essentiellement $\Omega(w_i)$ pour i suffisamment grand.*

79. ***Lemme 32.*** *A tout $w \epsilon W_0$ on peut faire correspondre une chaîne de domaines $\{H_n(w)\}$ telle que $\Omega(w) = \Theta(\{H_n(w)\})$.*

La démonstration se décompose en plusieurs parties:

Rangeons tous les domaines $G_m(v')$ tels que $v' \epsilon V_0 - V_0(w)$ et $\Theta(G_m(v'))\Omega(w) = 0$ en suite infinie

(113) $$\{K_n\} \quad \text{où} \quad n = 1, 2, \dots$$

Je vais définir par induction une suite d'ensembles ouverts $\{H_n(w)\}$ où $n = 0, 1, 2, \dots$ satisfaisant aux conditions suivantes:

(114) $$H_0(w) = R,$$

(115) $$H_{n+1}(w) \subset H_n(w),$$

(116) $$H_{n+1}(w)\,(K_{n+1} + M_{n+1}) = 0,$$

(117) $$\Omega(w) \subset \Theta\big(H_n(w)\big),$$

(118) toute composante de $H_n(w)$ contient essentiellement une suite de $\Omega(w)$.

Supposons $H_n(w)$ déterminé de manière que l'on ait (117). Soit $v \epsilon V_0(w)$. D'après **58** (lemme 19) et **77** (lemme 30), on peut déterminer un $m_n(v)$ tel que:

(119) $$G_{m_n(v)}(v) \subset H_n(w),$$

(120) $$G_{m_n(v)}(v)\,(K_{n+1} + M_{n+1}) = 0.$$

Rangeons tous les $G_{m_n}(v)$ où $v \epsilon V_0(w)$ en une suite infinie $\{L_j^{(n)}\}$ et posons

(121) $$H_{n+1}(w) = \sum_{j=1}^{\infty} L_j^{(n)}.$$

On vérifie immédiatement que l'on a les relations (115) et (116). Si $v \epsilon V_0(w)$, on a $\Omega(v) \subset \Theta\big(G_{m_n(v)}(v)\big) \subset H_{n+1}(w)$, donc

(122) $$\sum_{v \epsilon V_0(w)} \Omega(v) \subset \Theta\big(H_{n+1}(w)\big).$$

$\Theta\big(H_{n+1}(w)\big)$ étant héréditaire et clos, il en résulte d'après **73** (108) que

(123) $$\Omega(w) = \Big(\sum_{v \epsilon V_0(w)} \Omega(v)\Big)^* \subset \Theta\big(H_{n+1}(w)\big).$$

On a donc la relation (117) pour $n+1$. Une composante quelconque de $H_{n+1}(w)$ contient un domaine $L_j^{(n)}$, c. à d. un certain $G_{m(v)}(v)$ où $v \epsilon V_0(w)$; elle contient donc essentiellement un $\Omega(v)$ où $v \epsilon V_0(w)$, ce qui démontre (118).

La suite $\{H_n(w)\}$ assujettie à (114)-(118) étant ainsi construite, posons $\Omega_1(w) = \prod\limits_{n=0}^{\infty} \Theta\big(H_n(w)\big)$; la relation (117) entraîne $\Omega(w) \subset \Omega_1(w)$.

Je dis que

(124) $$\Omega_1(w) \subset \Omega(w).$$

En effet, $\Omega_1(w)$ étant un ensemble héréditaire, il suffit de démontrer que $\Omega_1(w)$ ne contient aucune suite γ ni aucune suite convergente vers un $v' \epsilon V_0 - V_0(w)$. Or, si X est une suite γ, il existe d'après **15** (corollaires 1 et 2) un n_1 tel que $X \epsilon \Theta(M_{n_1})$, d'où, selon (116), $X \text{ non } \epsilon\, \Theta\big(H_{n_1}(w)\big)$, donc $X \text{ non } \epsilon\, \Omega_1(w)$; si $X \epsilon \Omega(v')$ où $v' \epsilon V_0 - V_0(w)$, il existe d'après **76** (lemme 29) un $G_m(v')$ tel que $\Theta\big(G_m(v')\big)\Omega(w) = 0$ et ce $G_m(v')$ est contenu dans la suite (113); on a donc $X \epsilon \Theta(K_{n_2})$ pour un n_2, d'où selon (116) $X \text{ non } \epsilon\, \Theta\big(H_{n_2}(w)\big)$ et *a fortiori* $X \text{ non } \epsilon\, \Omega_1(w)$. La relation (124) est ainsi démontrée.

Il en résulte que

(125) $$\Omega(w) = \prod_{n=0}^{\infty} \Theta\big((H(w)\big).$$

80. Soit $v \epsilon V_0(w)$. D'après **56** (corollaire 2), $\Omega(v)$ est essentiellement contenu dans une composante de $H_n(w)$, que je désignerai par $H_n(w,v)$. On a d'après (115) $H_{n+1}(w,v) \subset H_n(w,v)$, c. à d. $\{H_n(w,v)\}$ est une chaîne de domaines. Soit

(126) $$\Omega_1(w,v) = \Theta(\{H_n(w,v)\}).$$

Evidemment, *si $v_1, v_2 \epsilon V_0(w)$, les ensembles $\Omega_1(w,v_1)$ et $\Omega_1(w,v_2)$ sont identiques ou disjoints.*

81. *$\Omega_1(w,v)$ est un ensemble régulier.*

Supposons le contraire; il existe alors deux suites: $Y_1=\{y_i^{(1)}\}\in\Omega(w,v)$, $Y_2=\{y_i^{(2)}\}\in\varphi(Y_1)$, et un n_3 tel que

(127) $$y_i^{(2)} \text{ non } \in H_{n_3}(w,v).$$

Y_1 contient une suite partielle $\{y_{i_k}^{(1)}\}\in\Omega(v_1)$ où $v_1\in V_0(w)$. L'ensemble $\Omega(v_1)$ étant régulier, on a $\{y_{i_k}^{(2)}\}\in\varphi(\{y_{i_k}^{(1)}\})\subset\Omega(v_1)$. Mais d'après **56** (corollaire 2), $\Omega(v_1)$ est essentiellement contenu dans une composante de $H_{n_3}(w)$, donc dans $H_{n_3}(w,v)$, puisque cette composante contient essentiellement $\{y_{i_k}^{(1)}\}\in\Omega(v_1)$. Donc: $\{y_{i_k}^{(2)}\}\in\Theta(H_{n_3}(w,v))$, en contradiction avec (127).

D'après **22** (lemme 7), on voit en outre que $\Omega_1(w,v)$ *est un ensemble fermé.*

82. Nous pouvons achever à présent la démonstration du lemme 32 (voir **79**). Considérons la famille $\mathfrak{G}$ d'hyperagrégats Φ tels que $\Phi\subset\Omega_1(w,v)$ pour un $w\in W_0$ et un $v\in V_0(w)$. Evidemment $\mathfrak{G}$ satisfait à la condition **68** (A′1) et un raisonnement analogue à celui de **55** montre que $\mathfrak{G}$ satisfait aussi à (A′2). Soient $\Phi_j\in\mathfrak{G}$, $\Phi_j\subset\Omega_1(w_j,v_j)$ où $j=1,2,\dots$, $\mathfrak{G}_1\subset\mathfrak{G}\mathfrak{N}(\{\Phi_i\})$ et $\Phi_0=\overline{\sum_{\Phi\in\mathfrak{G}_1}\Phi}$. Comme $\Phi_0\in\mathfrak{H}$, Φ_0 est contenu dans un hyperagrégat saturé Ψ_0, donc dans $\Psi_0^*=\Omega(w_0)$.

Je dis que $w_0=\lim\limits_{i\to\infty}w_i$. En effet, un domaine K contenant essentiellement $\Omega(w_0)$ contient essentiellement Φ_0, donc un certain $\Phi\in\mathfrak{G}_1$, donc — pour tout j suffisamment grand — une suite des $\Phi_j\subset\Omega(w_j)$. Par conséquent $\Omega(w_0)\in\mathfrak{N}(\{\Omega(w_j)\})$, ce qui démontre que $w_0=\lim\limits_{i\to\infty}w_i$.

D'après **78** (corollaire), il existe un j_n tel que pour $j\geqslant j_n$ l'ensemble ouvert $H_n(w_0)$ contient essentiellement $\Omega(w_j)$, donc $\Omega_1(w,v_j)$. D'après (126), il en résulte par un raisonnement analogue à celui de **58** (lemme 19) que $H_q(w_j,v_j)\subset H_n(w_0)$ pour $q\geqslant q_j$. Mais $H_q(w_j,v_j)$ est un domaine; il est donc contenu dans une seule composante de $H_n(w_0)$. Soit $\Phi^{(1)}\in\mathfrak{G}_1$; alors $\Phi^{(1)}\subset\Omega(w_0,v^{(1)})$. Donc, $\Phi^{(1)}$ est essentiellement contenu dans $H_n(w_0,v^{(1)})$, qui contient donc essentiellement une suite de $\Phi_j\subset\Omega_1(w_j,v_j)$ pour $j\geqslant j_n^{(1)}$. On a donc $H_q(w_j,v_j)H_n(w_0,v^{(1)})\neq 0$ pour tout q. Il s'ensuit que pour $j\geqslant j_n$, $j\geqslant j_n^{(1)}$ et $q\geqslant q_j$ on a $H_q(w_j,v_j)\subset H_n(w_0,v^{(1)})$. Mais si $\Phi^{(2)}\in\mathfrak{G}_1$ et $\Phi^{(2)}\subset\Omega_1(w_0,v^{(2)})$, on a par les mêmes raisons $H_q(w_j,v_j')\subset H_n(w_0,v^{(2)})$ pour $j\geqslant j_n$, $j\geqslant j_n^{(2)}$ et $q\geqslant q_j$, donc $H_n(w_0,v^{(1)})=H_n(w_0,v^{(2)})$. Donc,

tout $\Phi\in\mathfrak{G}_1$ est contenu essentiellement dans $H_n(w_0,v^{(1)})$ quel que soit n, donc $\Phi\subset\Omega_1(w_0,v^{(1)})$ et, ce dernier ensemble étant fermé, il s'ensuit que $\Phi_0\subset\Omega_1(w_0,v^{(1)})$, donc $\Phi_0\in\mathfrak{G}$. On voit ainsi que la famille $\mathfrak{G}$ satisfait aussi à (A′3). On a donc d'après **68** $\mathfrak{H}\subset\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{H}_s\subset\mathfrak{G}$.

Ψ étant un hyperagrégat saturé tel que $\Psi^*=\Omega(w)$, il existe un $v_0\in V_0(w)$ tel que $\Psi\subset\Omega_1(w,v_0)$. Par conséquent $\Omega_1(w,v_0)=\Omega(w)$. Il en résulte d'après (118) et **80** que, pour tout $v\in V_0(w)$, on a $\Omega_1(w,v)=\Omega(w)$. Donc, quel que soit n, tous les domaines $H_n(w,v)$ où $v\in V_0(w)$ sont identiques, et par conséquent $H_n(w)$ n'a qu'une seule composante, c. à d. *$H_n(w)$ est un domaine.* D'après (125), $\Omega(w)=\Theta(\{H_n(w)\})$, ce qui démontre le lemme 32.

83. *Corollaire.* *Si $X=\{x_i\}$, $Y=\{y_i\}$ et $X,Y\in\Omega(w)$, il existe une suite d'arcs simples $\{J(x_i,y_i)\}$ telle que les relations $z_i\in J(x_i,y_i)$ où $i=1,2,\dots$ entraînent $\{z_i\}\in\Omega(w)$.*

La démonstration est identique à celle de **56**.

84. L'espace $U_0=R+W_0$. Les points de $U_0=R+W_0$ seront designés par la lettre u avec des indices. Nous pouvons considérer U_0 comme un espace L^* moyennant la convention suivante:

La suite $\{u_i\}$ converge vers u_0, si l'on a l'un des deux cas:

1° $u_0\in R$, les $u_i\in R$ forment une suite γ convergente vers u_0 d'après la topologie de R et les $u_i\in W$ sont en nombre fini.

2° $u_0\in W_0$, les $u_i\in R$ forment une suite de $\Omega(u_0)$ ou sont en nombre fini et les $u_i\in W_0$ forment une suite convergente vers u_0 d'après **71** ou sont en nombre fini.

On vérifie aisément que les trois conditions **72** (a), (b) et (c), caractérisant les espaces L^*, sont remplies.

L'ensemble des suites de R convergentes vers u_0 sera désigné par $\Omega_0(u_0)$ et celui des suites de U_0 convergentes vers u_0 par $\Gamma(u_0)$.

85. *U_0 est un espace compact.* C'est une conséquence immédiate de **70** (lemme 24) et **75** (lemme 28).

86. La fermeture dans U_0. La fermeture dans U_0 peut être définie, comme on sait[32]), de la manière suivante: soit $A\subset U_0$; $\bar{A}$ est l'ensemble de tous les $u\in U_0$ tels qu'il existe une suite $\{u_i\}$ où $u_i\in A$ pour $i=1,2,\dots$ et $\lim\limits_{i\to\infty}u_i=u$.

On sait que les axiomes I et II de M. Kuratowski sont alors vérifiés.

[32]) C. Kuratowski, op. cit., p. 77.

87. ***Lemme 33.*** *Si l'ensemble K ouvert (rel. R) contient essentiellement $\Omega(w)$, il existe un indice n_0 tel que $H_{n_0}(w) \subset K$.*

La démonstration est entièrement analogue à celle de **58** (lemme 19).

88. Attachons à chaque $u_0 \in U_0$ une *suite d'entourages* $\{B_n(u_0)\}$ où $n=0,1,\dots$, définie de la manière suivante:

(A) Si $u_0 \in R$, alors $B_0(u_0)=R$; $B_n(u_0)$ étant déterminé de manière que $u_0 \in B_n(u_0)$, $B_{n+1}(u_0)$ est le premier domaine de la suite $\{M_i\}$ (comp. 10) tel que $u_0 \subset B_{n+1}(u_0) \subset B_k(u_0)$ et $\delta\big(B_{n+1}(u_0)\big) < \dfrac{1}{n+1}$. Un tel domaine existe, $\{M_i\}$ étant une base de R.

(B) Si $u_0 \in W$, alors $B_n(u_0)$ est l'ensemble de tous les u qui satisfont à la condition

$$\Omega_0(u) \subset \Theta\big(H_n(u_0)\big). \tag{128}$$

Il en résulte que $u_0 \in B_n(u_0)$ et que $RB_n(u_0)=H_n(u_0)$.

89. ***Lemme 34.*** *$B_n(u_0)$ est un ensemble ouvert dans U_0.*

C'est évident si $u_0 \in R$, car $B_n(u_0)$ est dans ce cas un domaine de R et, d'après **84**, R est ouvert dans U_0. Soit maintenant $u_0 \in V_0$; il s'agit de démontrer que si $u \in B_n(u_0)$, alors u est un point intérieur de cet ensemble. C'est évident si $u \in R$, car alors $u \in H_n(u_0)$, et ce dernier ensemble est ouvert dans R, donc dans U_0. Supposons donc que $u \in W_0$ et soit $\lim\limits_{i\to\infty} u_i = u$; la suite $\{u_i\}$ se décompose en deux suites $\{x_j\}$ et $\{w_j\}$ dont l'une peut être finie. Or, $\lim\limits_{j\to\infty} x_j = u$ entraîne d'après **84** et (128) $\{x_j\} \in \Omega_0(u) \subset \Theta\big(H_n(u_0)\big)$; on a donc pour j suffisamment grand $x \in H_k(u_0) \subset B_n(u_0)$. La relation $u \in B_n(u_0)$ entraîne $\Omega_0(u) \subset \Theta\big(H_n(u_0)\big)$. Il existe donc d'après **87** (lemme 33) un n_1 tel que $H_{n_1}(u) \subset H_n(u_0)$, d'où selon $\lim\limits_{j\to\infty} w_j = u$ et **78** (corollaire), on a pour j suffisamment grand $\Omega_0(w_j) \subset \Theta\big(H_{n_1}(u)\big) \subset \Theta\big(H_n(u)\big)$, donc $w_j \in B_n(u_0)$, donc u est un point intérieur de $H_n(u_0)$ et le lemme 34 est démontré.

90. ***Lemme 35.*** *Soit A un sous-ensemble fermé de U_0; si la suite d'ensembles $\{B_i\}$ contient pour tout $u \in A$ un des ensembles $B_n(u)$, il existe un p tel que $A \subset \sum\limits_{i=1}^{p} B_i$.*

C'est évidemment un cas particulier du théorème de Heine-Borel pour U_0. La démonstration est presque triviale. Supposons que, pour tout k, $A - \sum\limits_{i=1}^{k} B_i \neq 0$. Soit $u_k \in A - \sum\limits_{i=1}^{k} B_i$. D'après **85**, $\{u_k\}$ contient une suite partielle $\{u_{k_m}\}$ où $k_m < k_{m+1}$, convergente vers un u_0. A étant fermé, on a $u_0 \in A$; il existe donc un i_1 tel que $B_{i_1} = B_{n_1}(u_0)$; en vertu de **89** (lemme 34), on a $u_{k_m} \in B_{i_1}$ pour m suffisamment grand et, d'autre part, d'après la définition de u_k, on a u_{k_m} non $\in B_{i_1}$ pour $k_m \geqslant i_0$. On arrive ainsi à une contradiction et le lemme 35 est démontré.

91. ***Lemme 36.*** *Si $u_n \in B_n(u_0)$ pour $n=0,1,\dots$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u_0$.*

En effet, si $u_0 \in R$, on a d'après **88** (A) $u_n \in R$ et $\varrho(u_n,u_0) < 1/n$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u_0$. Soit maintenant $u_0 \in W_0$; la suite $\{u_n\}$ se décompose en deux suites partielles (dont l'une peut être finie): $\{u_{m_i}\}$ et $\{u_{n_i}\}$ telles que $u_{m_i} \in R$ et $u_{n_i} \in W_0$ où $i=1,2,\dots$, $m_i < m_{i+1}$ et $n_i < n_{i+1}$. On a par hypothèse $u_{m_i} \in H_{m_i}(u_0)$, donc $\{u_{m_i}\} \in \Theta(\{H_{m_i}(u_0)\}) = \Theta(\{H_n(u_0)\}) = \Omega(u_0)$, donc $\lim\limits_{i\to\infty} u_{m_i} = u_0$. D'autre part, $\Omega(u) \subset \Theta\big(H_{m_i}(u)\big) \subset \Theta\big(\dot{H}_i(u)\big)$, donc *a fortiori* $\Theta\big(H_i(u_0)\big)\Omega(u_{n_j}) \neq 0$ pour $j \geqslant i$. D'après **87** (lemme 33), on a donc $\Omega(u_0) \in \mathfrak{R}(\{\Omega(u_{n_j})\})$, donc $\lim\limits_{j\to\infty} u_{n_j} = u_0$. Il en résulte que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u_0$, c. q. f. d.

Corollaire. *Si $u_1 \neq u_2$, on peut déterminer un indice q tel que*

$$B_q(u_1)B_q(u_2) = 0. \tag{129}$$

92. ***Lemme 37.*** *Si $u \in B_n(u_0)$, il existe un indice m tel que $B_m(u) \subset B_n(u_0)$.*

En effet, en supposant le contraire, on aurait $B_m(u) - B_n(u_0) \neq 0$ pour tout m. Soit $u_m \in B_m(u) - B_n(u_0)$; d'après **91**, il en résulte que $\lim\limits_{m\to\infty} u_m = u$, donc, $B_n(u_0)$ étant ouvert, u non $\in B_n(u_0)$, en contradiction avec l'hypothèse.

93. ***Lemme 38.*** *U_0 est un espace métrisable et séparable.*

Nous avons déjà remarqué (voir **86**) que les axiomes I et II de M. Kuratowski sont vérifiés; considérons l'axiome III[33]), à savoir: si $A \subset U_0$, alors $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$. Il suffit de démontrer que $\bar{\bar{A}} \subset \bar{A}$.

Soit $u_0 \in \bar{\bar{A}}$. Il existe une suite $\{u_i\}$ et une suite à double entrée $\{u_{i,j}\}$ telles que $u_i \in \bar{A}$, $\lim\limits_{i\to\infty} u_i = u_0$, $u_{i,j} \in A$ et $\lim\limits_{j\to\infty} u_{i,j} = u_i$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $u_i \in B_i(u_0)$.

[33]) C. Kuratowski, op. cit., p. 15.

D'après **92** (lemme 37), nous pouvons déterminer un k_i tel que $B_{k_i}(u_i) \subset B_i(u_0)$. Enfin, on peut déterminer un j_i de manière que $u_{i,j_i} \epsilon B_{k_i}(u_i) \subset B_i(u_0)$. D'après **91** (lemme 36), il en résulte que $\lim_{i\to\infty} u_{i,j_i} = u_0$, donc $u_0 \epsilon \bar{A}$. L'axiome III est ainsi établi.

La *séparabilité* de U_0 résulte de celle de R et de la relation $\bar{R} = U_0$.

Considérons l'axiome IV (dit *de séparation*)[34]: si A_1 et A_2 sont des sous-ensembles fermés et disjoints de U_0, il existe un ensemble ouvert B tel que $A_1 \subset B$ et $A_2 \subset \bar{B} = 0$. Il suffit[35]) cependant de démontrer *l'axiome de régularité* c. à d. l'axiome IV dans le cas particulier où A_1 se réduit à un seul point u_0. D'après **91** (corollaire), nous pouvons faire correspondre à tout $u \epsilon A_2$ un indice $n(u)$ tel que $B_{n(u)}(u) B_{n(u)}(u_0) = 0$. D'après **90** (lemme 35), il existe un nombre fini de points $u_1, u_2, \ldots, u_p \epsilon A_2$ tels que

$$(130) \qquad A_2 \subset \sum_{j=1}^{p} B_{n(u_j)}(u_j) = B_1.$$

Soient $n_1 = \max_{j=1,2,\ldots,p} n(u_j)$ et $B = B_{n_1}(u_0)$. On a $BB_1 = 0$, donc, B_1 étant ouvert, $\bar{B}B_1 = 0$ et *a fortiori* $A_2\bar{B} = 0$; d'autre part $u_0 \epsilon B$. Donc, l'axiome de régularité, et par suite celui de séparation, sont vérifiés. U_0 est donc[36]) séparable et métrisable, c. q. f. d.

Corollaire. W_0 *est une frontière topologique.*

En effet, d'après **85** et **92**, W_0 satisfait aux conditions (D 1)-(D 3) de **62**.

94. Démonstration du théorème 4. Cette démonstration se réduit à montrer que W_0 satisfait à la condition (D' 2) de **63**, puisqu'il est évident d'après **73** et **36** (C' 1) que W_0 satisfait à (D' 1).

Considérons une frontière topologique W_1 satisfaisant à (D' 1) et désignons ses éléments par w', w'' avec des indices. Introduisons dans $U_1 = R + W_1$ une métrique et désignons-y par $\sigma(u_1', u_2'')$ la distance entre u_1' et u_2'. Pour $k = 1, 2, \ldots$, soit $S_k(w')$ l'ensemble des $x \epsilon R$ tels que $\sigma(w', x) < 1/k$. C'est un ensemble ouvert (rel. R), contenant essentiellement $\Omega(w')$.

D'après **64** (lemme 22), $\Omega(w')$ est fermé. W_1 est donc une frontière descriptive assujettie aux conditions (C' 1) et (C' 2) de **36**. D'après (C' 3), W_1 est donc plus forte que V_0 ou identique à V_0.

[34]) ibid., p. 95.
[35]) D'après le théorème de Tychonoff, ibid., p. 102.
[36]) D'après le théorème d'Urysohn, ibid., p. 104.

D'après **34** (lemme 13), à tout $w' \epsilon W_1$ correspond un ensemble $V_0(w') \subset V_0$ tel que:

$$(131) \qquad \sum_{w' \epsilon W_1} V_0(w') = V_0,$$

$$(132) \qquad \Omega(w') \subset \sum_{v \epsilon V_0(w')} \Omega(v),$$

$$(133) \qquad \Omega(w') = \Big(\sum_{v \epsilon V_0(w')} \Omega(v)\Big)^*.$$

Soit $v \epsilon V(w')$. L'ensemble $\Omega(v)$ est essentiellement contenu dans $S_k(w')$, donc, d'après **56** (corollaire 2), dans une composante $S_k(w', v)$ de $S_k(w')$. On a évidemment $S_{k+1}(w', v) \subset S_k(w', v)$. La suite $\{S_k(w', v)\}$ est donc une chaîne de domaines. Soit

$$(134) \qquad \Omega_1(w', v) = \Theta(\{S_k(w', v)\}).$$

On a $\Omega(v) \subset \Omega_1(w_1', v) \subset \Omega(w)$. Si $w_1' \neq w_2'$, alors $\Omega_1(w_1', v_1)\Omega(w_2', v_2) = 0$; si $v_1, v_2 \epsilon V(w')$, alors $\Omega_1(w_1', v_1)$ *et* $\Omega_1(w_1', v_2)$ *sont identiques ou disjoints.* Un raisonnement identique à celui de **81** permet de montrer que l'ensemble $\Omega_1(w_1', v)$ est *régulier et fermé.*

Soit $\mathfrak{M}$ la famille de tous les hyperagrégats Φ tels que, pour un $w' \epsilon W_1$ et un $v \epsilon V_0(w')$, l'on ait $\Phi \subset \Omega_1(w_1', v)$. D'après $\Omega(v) \subset \Omega(w_1', v)$ et (131), on voit que $\mathfrak{M}$ contient tous les ensembles $\Omega(v)$ où $v \epsilon V_0$, c. à d. satisfait à la condition (A' 1) de **68.** Un raisonnement analogue à celui de **55** montre que $\mathfrak{M}$ satisfait à (A' 2).

Soient maintenant: $\Phi_j \epsilon \mathfrak{M}$, $\Phi_j \subset \Omega_1(w_j', v_j)$ où $j = 1, 2, \ldots$, $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}\mathfrak{N}(\{\Phi_j\})$ et enfin $\Phi_0 = \sum_{\Psi \epsilon \mathfrak{M}_1} \Psi$. Considérons un $\Psi_1 \epsilon \mathfrak{M}_1$. On a $\Psi_1 \subset \Omega_1(w_1'', v_1') \subset \Omega(w_1'')$. Le domaine $S_k(w_1'', v_1')$ contient essentiellement Ψ_1, donc, pour $j \geqslant j_k$, une suite de $\Phi_j \subset \Omega(w_j')$, donc des points dont la distance du point w_j' est arbitrairement petite. Il s'ensuit d'après la définition de $S_k(w_1', v)$ que l'on a $\sigma(w_j', w_1'') < 1/k + \eta$ pour $j \geqslant j_k$, quel que soit η. Donc, $\lim_{j\to\infty} w_j' = w_1''$. On voit que la relation $\Psi \epsilon \mathfrak{M}_1$ entraîne $\Psi \subset \Omega(w_1'')$. Soit à présent $j \geqslant j_{2k}$. On a alors $\sigma(w_j', w_1'') \leqslant 1/2k$, donc $S_{2k}(w_j') \subset S_k(w_1'')$ et $S_{2k}(w_j', v_j) \subset S_k(w_1')$. Mais $S_{2k}(w_j', v_j)$, en tant qu'un domaine, est contenu dans une composante de $S_k(w_1'')$. D'autre part, $S_k(w_1'', v_1')$ contient essentiellement une suite de Φ_j, et $S_{2k}(w_j', v_j)$ contient toutes les suites de Φ_j. On a donc $S_k(w_1'', v_1') S_{2k}(w_j', v_j) \neq 0$ et par suite $S_{2k}(w_j', v_j) \subset S_k(w_1'', v_1')$. On arrive ainsi a l'énoncé suivant:

$$S_{2k}(w_j', v_j) \subset S_k(w_1'', v_1') \quad \textit{pour } j \textit{ suffisamment grand.}$$

Si l'on remplace Ψ_1 par un autre ensemble $\Psi_2 \epsilon \mathfrak{M}_1$ et si $\Psi_2 \subset \Omega_1(w_1'', v_2')$, on aura pour les mêmes raisons:

$$S_{2k}(w_j', v_j) \subset S_k(w_1'', v_2') \quad \textit{pour } j \textit{ suffisamment grand.}$$

Comme $S_k(w_1'', v_1')$ et $S_k(w_1'', v_2')$ sont des composantes de $S_k(w_1'')$, il en résulte que $S_k(w_1'', v_1') = S_k(w_1'', v_2')$. La relation $\Psi \epsilon \mathfrak{M}_1$ entraîne donc $\Psi \subset S_k(w_1'', v_1')$, donc $\Psi \subset \Omega_1(w_1'', v_1')$ et enfin, $\Omega_1(w_1'', v_1')$ étant fermé, $\Phi_0 = \overline{\sum_{\Psi \epsilon \mathfrak{M}_1} \Psi} \subset \Omega_1(w_1'', v_1')$. On a donc $\Phi_0 \epsilon \mathfrak{M}$ et la famille $\mathfrak{M}$ satisfait à la condition (A' 3). Donc, $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}_s$.

Considérons un $w \epsilon W_0$; on a $\Omega(w) = \Phi^*$, Φ étant un hyper-agrégat saturé. Il existe donc un $w' \epsilon W_1$ et un $v \epsilon V_0$ tels que $\Phi \subset \Omega_1(w_1', v) \subset \Omega(w')$. L'ensemble $\Omega(w')$ étant clos, il en résulte que $\Phi^* = \Omega(w) \subset \Omega(w') \subset \Omega(W_1)$. Donc, $\Omega(W_0) \subset \Omega(W_1)$, c. à d. que W est plus faible que toute frontière topologique satisfaisant à la condition (D' 1). Le théorème 4 est ainsi démontré.

XII. Quelques propriétés des bouts premiers topologiques.

95. Introduisons dans l'espace $U_0 = R + W_0$ une métrique, en désignant par $\varrho_0(u_1, u_2)$ la distance entre $u_1 \epsilon U_0$ et $u_2 \epsilon U_0$, par $\delta_0(A)$ le diamètre d'un ensemble $A \subset U_0$ mesuré dans cette métrique, enfin par $S_0(u_0, \lambda)$ où $\lambda > 0$ l'ensemble des points $u \epsilon U_0$ tels que $\varrho_0(u_0, u) < \lambda$.

Lemme 39. *Quel que soit* $w \epsilon W_0$, *on a* $\lim_{n\to\infty} \delta_0(H_n(w)) = 0$.

Soit en effet $\eta > 0$; l'ensemble $S_0(w, \frac{1}{2}\eta)R$ étant ouvert et contenant essentiellement $\Omega(w)$, il existe d'après **87** (lemme 33) un indice n_0 tel que

$$H_{n_0}(w) \subset S_0(w, \tfrac{1}{2}\eta) R \subset S_0(w, \tfrac{1}{2}\eta). \tag{135}$$

On a donc pour $n \geqslant n_0$ d'après (135) et vu que $H_n(w) \subset H_{n_0}(w)$:

$$\delta_0(H_n(w)) \leqslant \delta_0(S_0(w, \tfrac{1}{2}\eta)) \leqslant \eta, \tag{136}$$

ce qui démontre le lemme.

Corollaire. *Quel que soit* $u \epsilon U_0$, *on a* $\lim_{n\to\infty} \delta_0(B_n(u)) = 0$.

En effet, si $u \epsilon R$, c'est une conséquence de **88** (A), et si $u \epsilon W$ — celle du lemme précédent et de la relation $B_n(u) \subset H_n(u)$, qui résulte de **88** (B).

96. ***Théorème 5.*** $U_0 = R + W_0$ *est un espace péanien*,

c. à d. qu'il est une image continue d'un segment rectiligne. Il suffit pour cela qu'il soit connexe, compact et admette une base formée de domaines connexes[37]). Or, U_0 est connexe comme fermeture de R, qui est connexe (voir **1**), et selon **62** (D 3) U_0 est compact. En même temps, quels que soient $u \epsilon U_0$ et $n = 1, 2, \dots$, *l'ensemble* $B_n(u)$ *est connexe*; en effet, d'après **88**, $B_n(u)$ est un domaine et, pour $u \epsilon W$, on a $H_n(u) \subset B_n(u) \subset \overline{H}_n(u)$, $H_n(u)$ étant connexe — ce qui entraîne la connexité de $B_n(u)$. Enfin, d'après **89** (lemme 34) et **95** (corollaire), les $B_n(u)$, où $n = 0, 1, \dots$ et $u \epsilon U_0$ forment une base de U_0, c. q. f. d.

97. ***Théorème 6.*** W_0 *est en chaque point* w *régulièrement accessible dans* U_0,

c. à d.[38]): si $w \epsilon W_0$, alors à chaque $\varepsilon > 0$ correspond un $\eta > 0$ tel que tout point $x \epsilon S_0(w, \eta)R$ peut être uni à w par un arc simple $J(x, w) \subset (w) + S_0(w, \varepsilon)R$.

Déterminons, en effet, d'après **87**, un indice q tel que $H_q(w) \subset S_0(w, \varepsilon)R$. L'ensemble $H_q(w)$ contenant essentiellement $\Omega(w)$, il existe un $\eta > 0$ tel que $S_0(w, \eta)R \subset H_q(w)$. Soient $x = x_0 \epsilon S_0(w, \eta)R$ et $x_i \epsilon H_{q+i}(w)$. Unissons x_i à x_{i+1} par un arc simple $J_1(x_i, x_{i+1}) \subset H_{q+i}(w)$ où $i = 0, 1, \dots$ On a $\{x_i\} \epsilon \Theta(\{H_{q+1}(w)\}) = \Omega(w)$ et d'après **95** (lemme 39), $\lim_{i\to\infty} \delta_0(J_1(x_i, x_{i+1})) = 0$. Donc, l'ensemble

$$\overline{\sum_{i=0}^{\infty} J_1(x_i, x_{i+1})} = \sum_{i=0}^{\infty} J_1(x_i, x_{i+1}) + (w) = C \tag{137}$$

est un continu péanien contenant $x_0 = x$ et w. Il est donc un arc simple $J(x, w)$. On a

$$J(x, w) \subset C \subset H_q(w) + (w) \subset (w) + S_0(w, \varepsilon)R, \tag{138}$$

c. q. f. d.

98. Les projections des bouts premiers topologiques. Soit W_1 une frontière topologique dont les éléments seront désignés par w'; introduisons dans $U_1 = R + W_1$ une distance ϱ_1. Par analogie à **65**, nous définissons la *projection de* $w \epsilon W_0$ *sur* W_1 comme l'ensemble $E(w, W_1)$ de tous les $w' \epsilon W_1$ tels que $\Omega(w_0)\Omega(w') \neq 0$.

---

[37]) Comp. C. Kuratowski, Fund. Math. **1** (1920), p. 43.

[38]) D'après la définition de M. Whyburn, Proceed. Nat. Acad. of Sc. **13** (1927), p. 650-657; comp. aussi P. Alexandroff, Ann. of. Math. **36** (1935), No 1, p. 14.

Lemme 40. La projection $E(w,W_1)$ est un ensemble fermé.

La démonstration est analogue à celle de **66**.

99. *Lemme 41. La projection d'un bout premier descriptif ou topologique est un point ou un continu*[39]).

Il suffit de considérer les bouts premiers topologiques. Soient $w_1', w_2' \epsilon E(w,W_1)$. Il existe alors deux suites: $\{x_i\} \epsilon \Omega(w)\Omega(w_1')$ et $\{y_i\} \epsilon \Omega(w)\Omega(w_2')$. D'après **83** (corollaire), il existe une suite d'arcs simples $\{J(x_i,y_i)\}$ telle que $z_i \epsilon J(x_i,y_i)$ entraîne $\{z_i\} \epsilon \Omega(w)$. Considérons dans l'espace U_1 l'ensemble $C = \underset{i\to\infty}{\mathrm{Ls}}\, J(x_i,y_i)$. Comme $\underset{i\to\infty}{\mathrm{Li}}\, J(x_i,y_i)$ contient w_1' et w_2', donc n'est pas vide, C est un continu contenant w_1' et w_2'. Soit $u' \epsilon C$. Il existe une suite $\{z_{i_k}\}$ où $i_k < i_{k+1}$ telle que $z_{i_k} \epsilon J(x_{i_k}, y_{i_k})$ et $\lim_{k\to\infty} z_{i_k} = u'$. D'après la définition de $\{J(x_i,y_i)\}$, on a $\{z_{i_k}\} \epsilon \Omega(w)$. Donc, $\{z_{i_k}\}$ est une suite asymptotique; on a donc $u' \epsilon W_1$ et $\{z_{i_k}\} \epsilon \Omega(w)\Omega(u')$, donc $u' \epsilon E(w,W_1)$. Il s'ensuit que $C \subset E(w,W_1)$. Donc, tout couple de points de $E(w,W_1)$ peut être réuni par un continu contenu dans $E(w,W_1)$. D'après **98** (lemme 40), il en résulte que $E(w,W_1)$ est fermé et connexe, c. q. f. d.

100. *Théorème 7. La projection $E(w,W_1)$, considérée comme fonction de w, est semicontinue supérieurement,*

c. à d. [40]) que la condition $\lim_{i\to\infty} w_i = w_0$ entraîne

$$\underset{i\to\infty}{\mathrm{Ls}}\, E(w_i,W_1) \subset E(w_0,W_1).$$

Soit $w_0' \epsilon \underset{i\to\infty}{\mathrm{Ls}}\, E(w_i,W_1)$; il existe alors une suite $\{w_k'\}$ telle que $w_k' \epsilon E(w_{i_k},W_1)$ où $i_k < i_{k+1}$ et $\lim_{k\to\infty} w_k' = w_0'$. On a, d'après la définition de la projection, $\Omega(w_{i_k})\Omega(w_k') \neq 0$. Soit

$$(139) \qquad \{x_j^{(k)}\} \epsilon \Omega(w_{i_k})\Omega(w_k').$$

On a $\lim_{j\to\infty} x_j^{(k)} = w_{i_k}$ et $\lim_{j\to\infty} x_j^{(k)} = w_k'$; on peut donc déterminer un j_k tel que l'on ait simultanément:

$$(140) \qquad \varrho_0(x_{j_k}^{(k)}, w_{i_k}) < 1/k,$$

$$(141) \qquad \varrho_1(x_{j_k}^{(k)}, w_k') < 1/k.$$

[39]) v. Kaufmann 1, p. 77.

[40]) C. Kuratowski, Fund. Math. **18** (1932), p. 148-159.

Il en résulte que $\lim_{k\to\infty} x_{j_k}^{(k)} = \lim_{k\to\infty} w_{i_k} = w_0$ et $\lim_{k\to\infty} x_{j_k}^{(k)} = \lim w_k' = w_0'$. Donc:

$$(142) \qquad \Omega(w_0)\Omega(w_0') \neq 0,$$

$$(143) \qquad w_0' \epsilon E(w_0,W_1),$$

d'où $\underset{i\to\infty}{\mathrm{Ls}}\, E(w_i,W_1) \subset E(w_0,W_1)$, c. q. f. d.

101. Un exemple. Je vais construire un domaine R de l'espace euclidien à 3 dimensions pour lequel $V_0 \neq W_0$, c. à d. les bouts premiers descriptifs ne coïncident pas avec les bouts premiers topologiques.

A cet effet, désignons par R_0 et F_0 respectivement l'intérieur et la frontière du cube-unité $0 \leqslant \xi_i \leqslant 1$ où $i=1,2,3$. Soit $A(m,\lambda)$ le rectangle déterminé par les conditions:

$$(144) \qquad \tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{2})^{2m+1} \leqslant \xi_1 \leqslant \tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{2})^{2m}, \quad \tfrac{1}{4} \leqslant \xi_2 \leqslant \tfrac{3}{4} \quad \text{et} \quad \xi_3 = (\tfrac{1}{2})^m \lambda.$$

Posons:

$$(145) \qquad R = R_0 - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A(m, 1/n).$$

La frontière euclidienne de R est $F_0 + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A(m,1/n)$. Considérons les bouts premiers descriptifs et topologiques de R en supposant $\varrho = \varrho_e^*$ (comp. **44**), et en se bornant aux bouts premiers dont les projections sont contenues dans F_0. Les bouts premiers descriptifs ont pour projections les rectangles $A(m,0)$ où $m=1,2\ldots$ et les points de $F_0 - \sum_{m=1}^{\infty} A(m,0)$; les bouts premiers topologiques — les mêmes rectangles, le segment A déterminé par les relations $\xi_1 = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4} \leqslant \xi_2 \leqslant \frac{3}{4}$ et $\xi_3 = 0$, et les points de $F_0 - \big(A + \sum_{m=1}^{\infty} A(m,0)\big)$. Dans les deux cas, on a une décomposition de F_0 en ensembles fermés disjoints, mais dans le second cas cette décomposition est semicontinue supérieurement, conformément au théorème 7 de **100**, tandis qu'elle ne l'est pas dans le premier cas.

XIII. Les bouts premiers de M. Carathéodory.

102. ***Théorème 8.*** *Pour les domaines plans, bornés et simplement connexes, il y a identité entre les bouts premiers de M. Carathéodory, les bouts premiers descriptifs et les bouts premiers topologiques* [41]),

où les bouts premiers descriptifs et topologiques sont déterminés en supposant que $\varrho = \varrho_e^*$ (comp. **44**).

Désignons les bouts premiers de M. Carathéodory par la lettre q, leur ensemble par W_q. Il résulte du théorème fondamental de M. Carathéodory sur l'invariance des bouts premiers q envers la représentation conforme que W_q *est une frontière topologique* homéomorphe à la circonférence [42]).

103. ***Lemme 42.*** W_q *satisfait à la condition* **63** (D' 1).

D'après la théorie de M. Carathéodory, on a pour $q \in W_q$

$$\Omega(q) = \Theta(\{K_n(q)\}), \tag{146}$$

où la suite $\{K_n(q)\}$ est une chaîne de domaines et $K_n(q)$ sont déterminés par une *coupure* („Querschnitt") C_n, qui est un arc de circonférence satisfaisant aux conditions: $\overline{C}_n \overline{C}_{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_e(C_n) = 0$ (δ_e désignant le diamètre euclidien).

Soient: $X = \{x_i\} \in \Omega_{\alpha,\beta}\Omega(q)$ et $Y = \{y_i\} \in \Delta(X)$. Il s'agit de montrer que $Y \in \Omega(q)$. Deux cas sont possibles:

1° $X \in \Omega_\alpha$ et $Y \in \varphi(X)$. Pour chaque n, nous pouvons déterminer un i_n tel que l'on ait pour $i \geqslant i_n$:

$$x_i \in K_{n+1}(q), \tag{147}$$

$$\varrho_e^*(x_i, y_i) < \varrho_e(C_n, C_{n+1}): \tag{148}$$

Si, pour un $i \geqslant i_n$, on a $y_i \operatorname{non} \in K_n(q)$, tout continu de R unissant x_i à y_i rencontre C_n, C_{n+1}; il est donc de diamètre euclidien $\geqslant \varrho_e(C_n, C_{n+1})$ et on a donc $\varrho_e^*(x_i, y_i) \geqslant \varrho_e^*(C_n, C_{n+1})$, contrairement à (148). Ainsi $i \geqslant i_n$ entraîne dans ce cas $y_i \in K_n(q)$, donc $Y \in \Theta(\{K_n(q)\}) = \Omega(q)$.

[41]) L'identité des bouts premiers descriptifs et ceux de M. Carathéodory a été démontrée par M. Kaufmann (comp. Kaufmann 1, p. 128-136). La démonstration que je donne semble un peu plus simple.

[42]) C. Carathéodory, Math. Ann. **73** (1913), p. 344-351; comp. aussi S. Mazurkiewicz, Fund. Math. **26** (1936), p. 272 et suivantes.

2° $Y \in \Omega_\beta$. Supposons que $Y \operatorname{non} \in \Omega(q)$. Il existe alors un indice p et une suite croissante $\{i_k\}$ telle que $x_{i_k} \in K_p(q)$ et $y_{i_k} \operatorname{non} \in K_p(q)$. Soit $\{J(x_{i_k}, y_{i_k})\}$ une suite spéciale d'arcs simples de type β; alors $J(x_{i_k}, y_{i_k}) C_p \neq 0$. Soit $z_k \in J(x_{i_k}, y_{i_k}) C_p$; alors $\{z_k\}$ est une suite β d'après la définition de $\{J(x_{i_k}, y_{i_k})\}$. Mais z_k étant situé, pour $k = 1, 2, \ldots$, sur l'arc de circonférence C_p, la suite $\{z_k\}$ contient évidemment une suite partielle (α, γ). On arrive ainsi à une contradiction, donc $Y \in \Omega(q)$.

Corollaire. $\Omega(W_0) \subset \Omega(W_q)$.

En effet, d'après le lemme 42 et **63** (D' 2), W_0 est soit identique à W_q, soit plus faible que W_q.

104. Démonstration du théorème 8. Soit $q \in W_q$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer qu'il existe une suite $\{x_i\}$ convergente vers un $v_0 \in V_0$ et telle que $x_i \in C_i$ (en effet, en cas contraire, on n'aurait qu'à remplacer la suite $\{K_i(q)\}$ par une suite partielle convenable).

Il existe un i_n *tel que*

$$i \geqslant i_n \quad \textit{entraîne} \quad C_i \subset G_n(v_0). \tag{149}$$

En effet, dans le cas contraire, on pourrait déterminer, pour une suite croissante d'indices $\{j_m\}$, un $y_m \in C_{j_m} - G_n(v_0)$. Comme $\varrho_e(x_{j_m}, y_n) < \delta_e(C_{j_m})$ et $\Omega(v_0)$ est régulier, on aurait $\lim\limits_{m\to\infty} \varrho_e(x_{j_m}, y_m) = 0$ et $\{y_m\} \in \varphi(\{x_{j_m}\}) \subset \Omega(v_0) \subset \Theta(G_n(v_0))$, donc une contradiction. L'existence d'un i_n satisfaisant à (149) est ainsi démontrée.

Soit maintenant $v_1 \neq v_0$ et $v_1 \in V_0$. D'après **59**, nous pouvons déterminer un indice p de manière que $G_p(v_0) G_p(v_1) = 0$. Soit $z_1 \in G_p(v_1)$. Evidemment, on peut déterminer un indice r tel que $z_1 \operatorname{non} \in K_r(q)$. Soit

$$i \geqslant \max(i_n, r). \tag{150}$$

Je dis que (150) entraîne

$$G_p(v_1) K(q_i) = 0. \tag{151}$$

En effet, supposons que $G_p(v_1) K_i(q) \neq 0$. Alors l'ensemble connexe $G_p(v_1)$ contient des points de $K_i(q)$ et le point z_1, qui d'après (150) n'est pas contenu dans $K_i(q)$. On aurait donc $C_i G_p(v_1) \neq 0$. Mais d'après la définition de i_p et d'après (150), on a $C_i \subset G_p(v_0)$; d'après la définition de p, on a donc $C_i G_p(v_1)=0$. On arrive ainsi à une contradiction et on voit bien que (150) entraîne (151). Il s'ensuit que

$$\Omega(q)\,\Omega(v_1)=0, \tag{152}$$

donc

$$\Omega(q)\,\Omega(V_0) \subset \Omega(v_0). \tag{153}$$

$\Omega(q)$ étant héréditaire, il en résulte en tenant compte de **30** (C1) que l'on a $\Omega(q) \subset \Omega(v_0) \subset \Omega(V_0)$, donc finalement:

$$\Omega(W_q) \subset \Omega(V_0). \tag{154}$$

Il résulte de **103** (corollaire), de (154) et de **73** que

$$\Omega(W_0) = \Omega(V_0) = \Omega(W_q). \tag{155}$$

D'après **34**, les frontières W_0, V_0 et W_q sont donc identiques, c. q. f. d.

On voit que les bouts premiers topologiques peuvent être considérés comme une généralisation des bouts premiers de M. Carathéodory, aussi légitime que les bouts premiers de M. Kaufmann.

Warszawa, 24/III 1940.

Sur le paradoxe de MM. Banach et Tarski.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

MM. Banach et Tarski ont démontré (en utilisant un résultat de Hausdorff fondé sur l'axiome du choix) que toute sphère S (intérieur et surface) dans l'espace à 3 dimensions peut être décomposée en un *nombre fini* de parties disjointes dont on peut obtenir au moyen de mouvements convenables deux sphères disjointes de même rayon que la sphère S [1]). Or, le nombre fini en question n'a pas été précisé par ces auteurs.

En rapport avec ce résultat, M. von Neumann affirme qu'on peut décomposer toute sphère de rayon 1 en 9 parties disjointes dont on peut former par des mouvements convenables deux sphères disjointes de rayon 1, en prenant respectivement 5 et les 4 restantes de ces parties [2]). Je ne sais pas comment M. von Neumann a déduit cette proposition des résultats de MM. Banach et Tarski.

Le but de cette Note est de démontrer, dans le même ordre d'idées, le théorème suivant:

Toute sphère S peut être décomposée en 8 parties disjointes dont 5 et 3 donnent respectivement, après des mouvements convenables, deux sphères disjointes de même rayon que la sphère S.

On peut énoncer cette proposition sous une forme plus précise en introduisant la notation qui suit. X et Z étant deux ensembles de points dans l'espace à 3 dimensions et n étant un nombre naturel, nous écrirons

$$X \underset{n}{=} Z,$$

---

[1]) S. Banach et A. Tarski, Fund. Math. **6** (1924), p. 262 (Lemme 22). La connaissance de ce travail n'est pas nécessaire pour comprendre cette Note.

[2]) J. von Neumann, Fund. Math. **13** (1929), p. 77.