Sur les espaces (V) de M. Fréchet denses en soi.

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Un ensemble K formé d'éléments quelconques est dit *espace* (V) au sens de M. Fréchet, si l'on a fait correspondre à tout élément a de K une famille $\mathcal{V}(a)$ de sous-ensembles de K dits *voisinages* de a, cette correspondance satisfaisant aux conditions suivantes: la famille $\mathcal{V}(a)$ est non vide et tout $a \epsilon K$ est élément de tout ensemble de la famille $\mathcal{V}(a)$.

K étant un espace (V), un sous-ensemble E de K est dit *ouvert* si, pour tout élément a de E, il existe au moins un ensemble $V \epsilon \mathcal{V}(a)$ tel que $V \subset E$. L'ensemble $E \subset K$ est dit *dense en soi* si, pour tout élément a de E et tout ensemble $V \epsilon \mathcal{V}(a)$, on a $EV - \{a\} \neq 0$ ($\{a\}$ désignant l'ensemble formé d'un seul élément, a).

Le but de cette Note est de démontrer ce

Théorème. *K étant un espace (V) de M. Fréchet dense en soi, il existe toujours un espace (V), soit K^*, formé de mêmes éléments que K et tel que la famille de tous les ensembles ouverts de K coïncide avec celle de tous les ensembles denses en soi de K^*, en même temps que la famille de tous les ensembles denses en soi de K coïncide avec celle de tous les ensembles ouverts de K^** [1].

Démonstration. Soit, pour $a \epsilon K$, $\mathcal{V}(a)$ la famille de tous les voisinages de a dans K Désignons, pour $a \epsilon K$, par $\mathcal{V}^*(a)$ la famille de tous les ensembles $U \subset K$ qui satisfont aux conditions suivantes: $a \epsilon U$ et $UV - \{a\} \neq 0$ pour tout ensemble

[1]) L'espace (V) tout entier étant ouvert, on voit sans peine que ce théorème est faux pour tout espace (V) qui n'est pas dense en soi.

$V \epsilon \mathcal{V}(a)$ (c. à d. que l'ensemble U contient l'élément a et encore au moins un autre élément de chaque ensemble V de la famille $\mathcal{V}(a)$). L'espace K étant dense en soi, on voit sans peine [2]) que $\mathcal{V}^*(a) \neq 0$ pour $a \epsilon K$ et que K devient un espace (V) — désignons-le par K^* — avec les voisinages $\mathcal{V}^*(a)$. Je dis que l'espace K^* satisfait à la thèse du théorème.

Soient, en effet, E un ensemble ouvert de l'espace K, a un élément de E et U un voisinage de a dans K^* (c. à d. $U \epsilon \mathcal{V}^*(a)$). L'ensemble E étant ouvert dans K, il existe un ensemble $V \epsilon \mathcal{V}(a)$ tel que $V \subset E$. Or, il résulte de $U \epsilon \mathcal{V}^*(a)$ et de la définition de la famille $\mathcal{V}^*(a)$ que $UV - \{a\} \neq 0$, donc, d'après $V \subset E$, que $UE - \{a\} \neq 0$. Ceci étant pour tout ensemble $U \epsilon \mathcal{V}^*(a)$, on en conclut que l'ensemble E est dense en soi dans K^*.

Soient, d'autre part, E un ensemble dense en soi dans l'espace K^* et a un élément de E. Supposons qu'il n'existe aucun ensemble $V \epsilon \mathcal{V}(a)$ tel que $V \subset E$. On a donc $V - E \neq 0$ pour $V \epsilon \mathcal{V}(a)$. Soit U l'ensemble-somme de tous les ensembles $\{a\} + (V - E)$, où $V \epsilon \mathcal{V}(a)$. On aura évidemment $U \epsilon \mathcal{V}^*(a)$ et $UE - \{a\} = 0$, contrairement à l'hypothèse que l'ensemble E est dense en soi dans K^*. Il existe donc pour tout élément a de E un ensemble $V \epsilon \mathcal{V}(a)$ tel que $V \subset E$, ce qui prouve que l'ensemble E est ouvert dans K.

Nous avons ainsi démontré que les ensembles ouverts dans K coïncident avec les ensembles denses en soi de K^*.

Réciproquement, soient E un ensemble dense en soi dans K et a un élément de E. On a donc $VE - \{a\} \neq 0$ pour $V \epsilon \mathcal{V}(a)$. Soit U l'ensemble-somme de tous les ensembles VE où $V \epsilon \mathcal{V}(a)$. On aura évidemment $U \epsilon \mathcal{V}^*(a)$ et $U \subset E$. Pour tout élément a de E, il existe donc un voisinage de a dans K^* contenu dans E. L'ensemble E est donc ouvert dans K^*.

Soient, d'autre part, E un ensemble ouvert dans K^* et $a \epsilon E$. Il existe donc un ensemble $U \epsilon \mathcal{V}^*(a)$ tel que $U \subset E$. Or, d'après $U \epsilon \mathcal{V}^*(a)$ et la définition de la famille $\mathcal{V}^*(a)$, on a $UV - \{a\} \neq 0$ pour $V \epsilon \mathcal{V}(a)$, donc, vu que $U \subset E$, on a $VE - \{a\} \neq 0$ pour $V \epsilon \mathcal{V}(a)$, ce qui prouve que l'ensemble E est dense en soi dans K.

Nous avons ainsi démontré que les ensembles denses en soi dans K coïncident avec les ensembles ouverts dans K^*.

Le théorème est donc établi.

[2]) d'après l'axiome du choix.

Il existe ainsi, dans les espaces (V), une certaine dualité entre les ensembles ouverts et les ensembles denses en soi.

Or, il en existe une autre.

K étant un espace (V), un ensemble $E \subset K$ est dit *ensemble frontière* dans K si, pour tout élément a de E et tout ensemble $V \in \mathcal{V}(a)$, on a $V-E \neq 0$. L'ensemble $E \subset K$ est dit *isolé* dans K s'il existe, pour tout élément $a \in E$, un ensemble $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $VE-\{a\}=0$.

On démontre sans peine que le théorème qui vient d'être établi peut être complété par le suivant:

K étant un espace (V) dense en soi, il existe un espace (V), soit K^*, satisfaisant à la thèse du théorème qui précède et tel que la famille de tous les ensembles frontières de K coïncide avec celle de tous les ensembles isolés de K^*, en même temps que la famille de tous les ensembles isolés de K coïncide avec celle de tous les ensembles frontières de K^*.

Il existe donc aussi une dualité entre les ensembles frontières et les ensembles isolés dans les espaces (V).

Recherches sur la théorie des bouts premiers

Par

Stefan Mazurkiewicz (Warszawa).

TABLE DES MATIÈRES

Introduction.

La notion de *bout premier* („Primende") d'un domaine borné et simplement connexe du plan est due à M. Carathéodory[1]). M. Kaufmann[2]) l'a généralisée et développée en introduisant les bouts premiers d'un domaine borné de l'espace euclidien n-dimensionnel. Dans ce mémoire, j'expose une théorie des bouts premiers

[1]) C. Carathéodory, Math. Ann. **73** (1913).

[2]) B. Kaufmann, Math. Ann. **103** (1930), p. 70-144 (c'est le mémoire principal, qui sera désigné dans la suite par „Kaufmann 1") et Math. Ann. **106** (1932), p. 308-342. M. Kaufmann considère les domaines bornés de R_2 et R_3, mais sa théorie s'applique sans aucune modification aux domaines de R_n. Comp. aussi: S. Mazurkiewicz, Fund. Math. **26** (1936), p. 272-279.