in which A_2' has 2, 3 or 4 elements and return so to cases $\nu=2,3$ or 4 discussed previously.

If all b_i are equal to b, then $b=3$, $q=3$ and (1) takes the form $A_2=B_1+B_2+B_3$ where B_1, B_2 and B_3 have 3 elements. Consider the decompositions:

$$A = B_1+(B_2+B_3+A_1),$$
$$A = B_2+(B_3+B_1+A_1),$$
$$A = B_3+(B_1+B_2+A_1),$$

to which correspond 3 elements a,b,c of A in virtue of lemma 14 and of proposition $[3k+11l]$. We write now down the decomposition

$$A=\{a,b,c\}+(A-\{a,b,c\})$$

and return so to cases $\nu=1,2,3$ in which we can already accomplish the choice.

Case $n=14$ is thus discussed in full.

In case $n=16$ the reasoning is the same as for $n=14$. Z contains in this case numbers of the form $2i$, $3j+13k$ and $5k+11l$.

Theorem IX is thus proved completely.

Results of this section suggest a supposition that condition (M) is in every case sufficient for the implication $[Z]\to[n]$. I was not able to solve this question even in the case $n=15$ and $Z=\{3,5,13\}$.

Sur les fonctions de plusieurs variables

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Le but de cette Note est de démontrer que *les fonctions de plusieurs variables où toutes les valeurs des variables, ainsi que celles des fonctions, appartiennent à un ensemble fixe quelconque se réduisent par superpositions aux fonctions de deux variables.* Plus précisément

Soient: E un ensemble donné, m un nombre naturel, F_m la famille de toutes les fonctions de m variables $f(x_1,x_2,...,x_m)$ définies pour $x_i \epsilon E$ où $i=1,2,...,m$ (autrement dit: définies dans le produit cartésien E^m) et ne prenant que des valeurs appartenant à E. Soit S la famille de toutes les fonctions de $F_2+F_3+...$ qui sont des superpositions d'un nombre fini de fonctions de la famille F_2. S est donc la plus petite famille de fonctions qui contient F_2 et telle que si les fonctions $f(x_1,x_2,...,x_m)$ et $g(x_{m+1},x_{m+2},...,x_{m+n})$ appartiennent à S et si la fonction $h(x,y)$ appartient à F_2, la fonction

$$h\big(f(x_1,x_2,...,x_m),g(x_{m+1},x_{m+2},...,x_{m+n})\big)$$

appartient à S, de même que les fonctions qu'on en obtient en échangeant ou en identifiant entre elles certaines de variables $x_1,x_2,...,x_{m+n}$.

Notre théorème équivaut ainsi à la formule

$$F_m \subset S \qquad \text{pour} \quad m=2,3,... \tag{1}$$

Nous allons démontrer la formule (1) séparément pour E fini et E infini. Pour E infini, notre démonstration fera usage de l'axiome du choix; or, pour E fini, elle est plus compliquée que pour E infini.

Soit donc E un ensemble fini contenant au moins deux éléments distincts. Je démontre d'abord deux lemmes.

Lemme 1. *a et b étant deux éléments distincts de E et $a_1, a_2 \ldots, a_n$, où n est un nombre naturel $\geqslant 2$, étant des éléments quelconques de E (distincts ou non), la fonction*

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} a & \textit{pour} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq (a_1, a_2, \ldots, a_n) \\ b & \textit{pour} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)\,^{1)} \end{cases}$$

appartient à S.

Démonstration. Ce lemme est évidemment vrai pour $n=2$ (puisque $\varphi_2 \in F_2 \subset S$). Admettons maintenant qu'il est vrai pour un nombre naturel $n \geqslant 2$ (donc que $\varphi_n \in S$) et soit $\varphi(x, y)$ la fonction définie comme il suit:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} a & \text{pour} \quad (x, y) \neq (b, a_{n+1}) \\ b & \text{pour} \quad (x, y) = (b, a_{n+1}). \end{cases}$$

On a évidemment $\varphi \in S$. Or, on voit sans peine qu'on a

$$\varphi_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \varphi\big(\varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_{n+1}\big)$$
$$\text{pour } x_i \in E \text{ où } i = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Vu que $\varphi_n \in S$ et $\varphi \in S$, on a donc $\varphi_{n+1} \in S$. Le lemme est ainsi démontré.

Lemme 2. *Si la fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ appartient à S et la fonction $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ne diffère de la fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qu'au plus pour $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, la fonction $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ appartient aussi à S.*

Démonstration. Soient a et b deux éléments distincts de E; posons:

$$g(a_1, a_2, \ldots, a_n) = c \quad \text{où} \quad c \in E$$

et pour $x \in E$, $y \in E$:

$$\psi(x, y) = \begin{cases} y & \text{pour} \quad x \neq b, \\ c & \text{pour} \quad x = b. \end{cases}$$

On a évidemment $\psi \in S$. Or, on vérifie sans peine que

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi\big(\varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\big)$$
$$\text{pour } x_i \in E \text{ et } i = 1, 2, \ldots, n,$$

où φ_n est la fonction satisfaisant au lemme 1. Vu que $\psi \in S$, $\varphi_n \in S$ et $f_n \in S$, on a évidemment $g \in S$, c. q. f. d.

---

[1]) $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ exprime que $x_i = a_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

D'après le lemme 2, toute fonction de F_n qui ne diffère d'une fonction de la famille S qu'au plus en un point du produit cartésien E^n appartient à S. Il en résulte tout de suite par l'induction que toute fonction de F_n qui ne diffère d'une fonction de S qu'en un nombre fini de points de E^n appartient à S. Or, l'ensemble E^n étant fini (et vu que p. ex. la fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1$ appartient à S), il en résulte que toute fonction de F_n appartient à S. La formule (1) est ainsi établie et notre théorème est démontré pour les ensembles E finis.

Je donne encore une autre démonstration de ce théorème pour E finis, basée sur une idée différente. Sans restreindre la généralité de la démonstration, nous pouvons évidemment supposer que l'ensemble E est formé de s premiers nombres naturels, $E = \{1, 2, \ldots, s\}$. On a d'abord ce

Lemme 3. *Etant donné un nombre naturel $k < s$, il existe une fonction $g(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1})$ de S, telle que*

(2) $$g(x_1, x_2, \ldots, x_k, i) = x_i \quad \textit{pour } i = 1, 2, \ldots, k \textit{ et } x_j \in E \textit{ où } j = 1, 2, \ldots, k.$$

Démonstration. Le lemme est vrai pour $k = 1$, puisque la fonction $g(x, y)$ définie par la condition

$$g(x, y) = x \qquad \text{pour } x \in E \text{ et } y \in E$$

appartient évidemment à F_2, donc à plus forte raison, à S. Définissons maintenant la fonction $h(x, y)$ de F_2 par les conditions:

$$h(x, y) = \begin{cases} x & \text{pour} \quad x = 1, 2, \ldots, s \quad \text{et} \quad y = s, \\ y & \text{pour} \quad x = 1, 2, \ldots, s \quad \text{et} \quad y = 1, 2, \ldots, s-1. \end{cases}$$

Etant donné un nombre naturel $p < s$, soient $\varphi_p(x, y)$ et $\psi_p(x, y)$ les fonctions de F_2 définies comme il suit:

$$\varphi_p(x, y) = \begin{cases} x & \text{pour} \quad x = 1, 2, \ldots, s \quad \text{et} \quad y = 1, 2, \ldots, p, \\ s & \text{pour} \quad x = 1, 2, \ldots, s \quad \text{et} \quad y = p+1, p+2, \ldots, s, \end{cases}$$

$$\psi_p(x, y) = \begin{cases} s & \text{pour} \quad x = 1, 2, \ldots, s \quad \text{et} \quad y = 1, 2, \ldots, p, \\ y & \text{pour} \quad x = 1, 2, \ldots, s \quad \text{et} \quad y = p+1, p+2, \ldots, s. \end{cases}$$

Posons

3) $$g_p(x, y, z) = h\big(\varphi_p(x, z), \psi_p(y, z)\big) \qquad \text{pour } x \in E,\ y \in E \text{ et } z \in E.$$

On vérifie sans peine que

(4) $$g_p(x, y, z) = h(x, s) = x \quad \text{pour } x = 1, 2, \ldots, s,\ y = 1, 2, \ldots, s \text{ et } z = 1, 2, \ldots, p,$$

(5) $$g_p(x, y, z) = h(s, y) = y \quad \text{pour } x = 1, 2, \ldots, s,\ y = 1, 2, \ldots, s \text{ et } z = p+1, p+2, \ldots, s.$$

D'après (3), (4) et (5), on voit sans peine que la fonction $g_1(x_1, x_2, x_3)$ satisfait au lemme pour $k = 2$.

Soit maintenant $2 \leqslant k < s$ et supposons que le lemme soit vrai pour le nombre k. Soit $g(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1})$ une fonction satisfaisant à ce lemme. Posons:

$$g'(x_1, x_2, \ldots, x_{k+2}) = g_k\big(g(x_1, \ldots, x_k, x_{k+2}), x_{k+1}, x_{k+2}\big) \quad \text{pour } x_i \in E \text{ et } i = 1, 2, \ldots, k+2.$$

Vu les propriétés des fonctions g_k et g, on trouve sans peine

(6) $g'(x_1,x_2,\ldots,x_{k+1},i)=x_i$ pour $i=1,2,\ldots,k+1$ et $x_j \epsilon E$ où $j=1,2,\ldots,k+1$

(puisque

$$g_k(x,x_{k+1},i)=x \quad \text{pour } x \epsilon E,\ x_{k+1} \epsilon E \text{ et } i=1,2,\ldots,k,$$

$$g_k(x,x_{k+1},k+1)=x_{k+1} \quad \text{pour } x \epsilon E \text{ et } x_{k+1} \epsilon E).$$

Les fonctions g_k et g appartenant à S, on conclut de (6) que la fonction g' satisfait au lemme pour $k+1$, ce qui en achève la démonstration par l'induction.

Reste à démontrer la formule (1) pour l'ensemble $E=\{1,2,\ldots,s\}$. Pour $m=2$, elle est vraie, puisque $F_2 \subset S$. Etant donné un nombre naturel $m \geqslant 2$, supposons que la formule (1) soit vraie pour le nombre m. Soit $f(x_1,x_2,\ldots,x_{m+1})$ une fonction de la famille F_{m+1}. Les fonctions (de m variables):

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_m,1),\quad f(x_1,x_2,\ldots,x_m,2),\quad \ldots,\quad f(x_1,x_2,\ldots,x_m,s)$$

appartiennent évidemment à F_m, donc, d'après notre hypothèse, à S. Soit $g(x_1,x_2,\ldots,x_s,x_{s+1})$ la fonction satisfaisant au lemme 3 pour $k=s$.

On trouve sans peine:

$$g\big(f(x_1,x_2,\ldots,x_m,1), f(x_1,x_2,\ldots,x_m,2),\ldots, f(x_1,x_2,\ldots,x_m,s), x_{m+1}\big)=f(x_1,x_2,\ldots,x_m,x_{m+1})$$
$$\text{pour } x_j \epsilon E \text{ et } j=1,2,\ldots,m+1.$$

Vu que $g \epsilon S$, il en résulte que $f \epsilon S$.

On a donc $F_{m+1} \subset S$ et la formule (1) est démontrée par l'induction.

Il est à remarquer que, pour E finis, M. Webb — en utilisant un résultat de M. Post [2]) — a démontré [3]) qu'il existe (au moins) une fonction $\mu(x,y)$ telle que $\mu(x,y) \epsilon E$ pour $x \epsilon E$, $y \epsilon E$ et que toute fonction de la famille $F_1+F_2+\ldots$ n'en est q'une superposition. Si $E=\{1,2,\ldots,s\}$, où s est un nombre naturel, et si $\varrho(x)$ désigne le reste de la division de l'entier x par s, la fonction $\mu(x,y)$ peut être définie par la formule: $\mu(x,y)=\varrho[\min(x,y)]+1$ pour $x \epsilon E$ et $y \epsilon E$ [4]).

Soit maintenant E un ensemble infini de puissance $\mathfrak{n}$, et supposons la formule (1) vraie pour le nombre naturel m (ce qui est le cas pour $m=2$). Il résulte, comme on sait, de l'axiome du choix que $\mathfrak{n}^m=\mathfrak{n}$: il existe donc une correspondance biunivoque entre l'ensemble E^m et l'ensemble E: soit $\Theta_m(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ l'élément de E correspondant au point $(x_1,x_2,\ldots,x_m) \epsilon E^m$. On a donc $\Theta_m \epsilon S$ (puisque, évidemment, $\Theta_m \epsilon F_m$ et, d'après notre hypothèse, $F_m \subset S$).

---

2) E. L. Post, Amer. Journ. of Math. **43** (1921), pp. 180-181.

3) Donald Webb, ibidem, **58** (1936), pp. 193-194.

4) Cf. aussi M. Wajsberg, Wiadomości Matematyczne **43** (1936), pp. 166-167.

Soit maintenant $f(x_1,x_2,\ldots,x_{m+1})$ une fonction de la famille F_{m+1}. Soient $t \epsilon E$ et $u \epsilon E$. Il existe donc un point unique $(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ de E^m tel que $\Theta_m(x_1,x_2,\ldots,x_m)=t$. Posons $g(t,u)=f(x_1,x_2,\ldots,x_m,u)$. On aura $g \epsilon F_2 \subset S$. Or, comme on voit sans peine, on a

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_{m+1})=g\big(\Theta_m(x_1,x_2,\ldots,x_m),x_{m+1}\big) \text{ pour } x_i \epsilon E \text{ et } i=1,2,\ldots,m+1.$$

On a donc $f \epsilon S$. La formule $F_{m+1} \subset S$ est donc vraie et la formule (1) se trouve démontrée par l'induction.

Quant à la fonction Θ_m, il est à remarquer qu'on démontre sans peine que $\Theta_3(x_1,x_2,x_3)=\Theta_2\big(x_1,\Theta_2(x_2,x_3)\big)$ et, pour tout $m>2$ naturel,

$$\Theta_m(x_1,x_2,\ldots,x_m)=\Theta_2\Big(x_1,\Theta_2\big(x_2,\Theta_2(x_3,(\ldots\Theta_2(x_{m-1},x_m)))\big)\ldots\Big).$$

Notons que pour l'ensemble E de tous les nombres réels, la formule (1) peut être démontrée sans faire appel à l'axiome du choix (et les fonctions Θ_m peuvent être, pour tout m naturel, définies d'une façon effective [5]).

Il résulte de notre démonstration que, pour E infini, toute fonction de F_3 est de la forme $g(\Theta(x,y),z)$ où g et Θ sont des fonctions de F_2 (et même Θ une fonction fixe). Or, un théorème analogue est faux pour les ensembles finis à $s>1$ éléments, puisqu'on a alors $\overline{\overline{F}}_3=s^{s^3}$ et l'ensemble de toutes les fonction de F_3 de la forme $g(\Theta(x,y),z)$ où $g \epsilon F_2$ et $\Theta \epsilon F_2$ est, comme on voit sans peine, de puissance $<(s^{s^2})^2$ [6]), tandis que, déjà pour $s \geqslant 2$, on a $(s^{s^2})^2=s^{2s^2} \leqslant s^{s^3}$).

---

5) Voir ma Note dans Prace Matematyczno-Fizyczne **41** (1933), pp. 171-175; cf. L. Bieberbach, Journ. f. reine u. angew. Math. **165** (1931), p. 89.

6) Pour le voir, il suffit de remarquer que si

$$\Theta(x,y)=1 \text{ pour } x \epsilon E \text{ et } y \epsilon E$$

$$g(x,y)=1 \text{ pour } x \epsilon E \text{ et } y \epsilon E$$

$$g'(x,y)=\begin{cases} 1 \text{ pour } x=1 \text{ et } y \epsilon E \\ 2 \text{ pour } x=2,3,,\ldots,n \text{ et } y \epsilon E, \end{cases}$$

on a

$$g\big(\Theta(x,y),z\big)=g'\big(\Theta(x,y),z\big) \text{ pour } x \epsilon E,\ y \epsilon E \text{ et } z \epsilon E.$$