Deux éléments différents de (C) peuvent être toujours réunis par un (au moins) segment rectiligne et, d'autre part, il existe des couples d'éléments de (C) qui peuvent être réunis par plusieurs (même par $2^{\aleph_0}$) segments rectilignes différents.

En particulier, il en résulte tout de suite que l'espace (C) est connexe et même localement connexe [7]).

[7]) Cf. la propriété analogue de l'espace U (P. Urysohn, l. c., p. 30, Corollaires I et II).

Sur les espaces métriques universels [1]).

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

1. Étant donné un nombre cardinal $\mathfrak{m}$, appelons *espace métrique universel de puissance* $\mathfrak{m}$ tout espace métrique de puissance $\mathfrak{m}$ qui contient pour chaque espace métrique M de puissance $\mathfrak{m}$ un ensemble isométrique avec M (c. à d. *applicable* [2]) sur M).

Je vais démontrer les théorèmes suivants:

Théorème 1. *Si $\mathfrak{m}$ est un nombre cardinal $\geqslant 2^{\aleph_0}$ tel qu'il n'existe aucun nombre cardinal $\mathfrak{n}$ satisfaisant à l'inégalité $\mathfrak{n}<\mathfrak{m}<2^{\mathfrak{n}}$* [3]), *il existe un espace métrique universel de puissance $\mathfrak{m}$.*

Théorème 2. *Si $\mathfrak{m}$ est un nombre cardinal $<2^{\aleph_0}$, il n'existe aucun espace métrique universel de puissance $\mathfrak{m}$.*

Le théorème **1** entraîne immédiatement ce

Théorème 3. *Si l'hypothèse de G. Cantor sur les alephs* ($2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}$ pour tout nombre ordinal α) *est vraie, il existe un espace métrique universel de chaque puissance $>\aleph_0$.*

Le théorème **1** pour $\mathfrak{m}=\aleph_1$ et le théorème **2** donnent tout de suite ce

Théorème 4. *L'hypothèse du continu* ($2^{\aleph_0}=\aleph_1$) *est équivalente à l'existence d'un espace métrique universel de puissance $\aleph_1$.*

Il en résulte immédiatement ce

[1]) Cf. ma Note du 24 Avril 1940 parue sous le même titre dans Atti delle R. Accademia delle Scienze di Torino **75** (1940).

[2]) On appelle *application* une transformation biunivoque conservant les distances.

[3]) Cette hypothèse sur le nombre cardinal $\mathfrak{m}$ équivaut, comme l'a démontré M. A. Tarski (Fund. Math. **32**, p. 48), à l'hypothèse que $\sum_{\mathfrak{n}<\mathfrak{m}} 2^{\mathfrak{n}}=\mathfrak{m}$, la sommation s'étendant à tous les nombres cardinaux $\mathfrak{n}<\mathfrak{m}$.

Théorème 5. *Si* $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, *il existe un espace métrique universel de puissance du continu.*

Il est à remarquer que (vu le théorème **1**) l'existence d'un espace métrique universel de puissance $\mathfrak{m}$ peut être démontrée pour certains nombres cardinaux $\mathfrak{m}$ sans aucune hypothèse sur ces nombres. Tels sont les nombres $\mathfrak{m}=\mathfrak{p}+2^{\mathfrak{p}}+2^{2^{\mathfrak{p}}}+\dots$ où $\mathfrak{p}$ est un nombre cardinal quelconque $\geqslant\aleph_0$ (puisque, pour de tels nombres $\mathfrak{m}$, l'inégalité $\mathfrak{n}<\mathfrak{m}$ entraine $2^{\mathfrak{n}}\leqslant\mathfrak{m}$)[4]).

2. Démonstration du théorème **1.** Soit $\mathfrak{m}=\aleph_\tau$ un nombre cardinal donné $\geqslant 2^{\aleph_0}$, et supposons qu'il n'existe aucun nombre cardinal $\mathfrak{n}$ tel que $\mathfrak{n}<\mathfrak{m}<2^{\mathfrak{n}}$.

Il en résulte que

$$(1)\qquad 2^{\mathfrak{n}}\leqslant\mathfrak{m} \qquad \text{pour } \mathfrak{n}<\mathfrak{m}.$$

λ étant un nombre ordinal $<\omega_\tau$ (c. à d. tel que $\bar{\lambda}<\mathfrak{m}$), désignons par F_λ l'ensemble de toutes les fonctions réelles (finies) de deux variables $f(\eta,\zeta)$, définies pour les couples (η,ζ) de nombres ordinaux $\leqslant\lambda$ et établissant une métrique dans l'ensemble de tous les nombres ordinaux $\leqslant\lambda$ (c. à d. telles que, pour $\eta\leqslant\lambda$, $\zeta\leqslant\lambda$ et $\vartheta\leqslant\lambda$, on ait $f(\eta,\zeta)+f(\eta,\vartheta)\geqslant f(\zeta,\vartheta)$ et que $f(\eta,\zeta)=0$ équivaille à $\eta=\zeta$). On voit sans peine que

$$(2)\qquad \overline{\overline{F}}_\lambda\leqslant 2^{\aleph_0\bar{\lambda}^2}.$$

Étant donné un nombre ordinal ξ, désignons par φ_ξ le plus petit nombre ordinal $\geqslant 0$ tel que $\bar{\xi}\leqslant\aleph_{\varphi_\xi}$. Comme $\bar{\lambda}\leqslant\aleph_{\varphi_\lambda}$, on trouve:

$$(3)\qquad \aleph_0\bar{\lambda}^2\leqslant\aleph_0\aleph_{\varphi_\lambda}^2=\aleph_{\varphi_\lambda},$$

donc, d'après (2):

$$(4)\qquad \overline{\overline{F}}_\lambda\leqslant 2^{\aleph_{\varphi_\lambda}}.$$

Posons encore, pour tout nombre ordinal ξ:

$$(5)\qquad 2^{\aleph_\xi}=\aleph_{\psi(\xi)}.$$

D'après (4) et (5), il existe (pour $\lambda<\omega_\tau$ donné) une suite transfinie de type $\omega_{\psi(\varphi_\lambda)}$ formée de toutes les fonctions de l'ensemble F_λ (qui peuvent d'ailleurs s'y répéter).

[4]) Cf. A. Tarski, l. c., p. 49.

Soit $\{f_\xi^\lambda\}_{\xi<\omega_{\psi(\varphi_\lambda)}}$ cette suite.

Nous définirons maintenant l'espace U comme il suit. U est l'ensemble de toutes les suites finies ou transfinies de nombres ordinaux

$$(6)\qquad \{\alpha_\xi\}_{\xi\leqslant\lambda},$$

où λ est un nombre ordinal (variable), $0<\lambda<\omega_\tau$, et les $\alpha_\xi(\xi\leqslant\lambda)$ sont des nombres ordinaux tels que:

$$(7)\qquad \alpha_1=1,$$

$$(8)\qquad \alpha_\xi<\omega_{\psi(\varphi_\xi)} \qquad \text{pour } \xi\leqslant\lambda$$

et

$$(9)\qquad f_{\alpha_\xi}^\xi(\eta,\zeta)=f_{\alpha_\lambda}^\lambda(\eta,\zeta) \qquad \text{pour } \eta\leqslant\xi,\ \zeta\leqslant\xi \text{ et } \xi<\lambda.$$

Etant donné un nombre ordinal $\lambda<\omega_\tau$, désignons par U_λ l'ensemble de toutes les suites $\{\alpha_\xi\}_{\xi\leqslant\lambda}$ de U. On a évidemment

$$(10)\qquad U=\sum_{\lambda<\omega_\tau}U_\lambda.$$

$\{\alpha_\xi\}_{\xi\leqslant\lambda}$ étant une suite de U_λ, on a les inégalités (8). D'après (5), on a $\overline{\omega}_{\psi(\varphi_\xi)}=\aleph_{\psi(\varphi_\xi)}=2^{\aleph_{\varphi_\xi}}$. Il en résulte aussiôt que

$$(11)\qquad \overline{\overline{U}}_\lambda\leqslant\prod_{\xi\leqslant\lambda}2^{\aleph_{\varphi_\xi}}=2^{\sum\limits_{\xi\leqslant\lambda}\aleph_{\varphi_\xi}}\leqslant 2^{\bar{\lambda}\cdot\aleph_{\varphi_\lambda}}=2^{\aleph_{\varphi_\lambda}}$$

(puisque $\bar{\lambda}\leqslant\aleph_{\varphi_\lambda}$ et $\aleph_{\varphi_\lambda}^2=\aleph_{\varphi_\lambda}$). Or, pour $\lambda<\omega_\tau$ on a $\bar{\lambda}<\aleph_\tau$ et, φ_λ étant par définition le plus petit nombre ordinal tel que $\bar{\lambda}\leqslant\aleph_{\varphi_\lambda}$, et vu que $\aleph_\tau=\mathfrak{m}\geqslant 2^{\aleph_0}>\aleph_0$, donc $\tau>0$, on a $\varphi_\lambda<\tau$, donc $\aleph_{\varphi_\lambda}<\aleph_\tau=\mathfrak{m}$, ce qui donne d'après (1):

$$2^{\aleph_{\varphi_\lambda}}\leqslant\mathfrak{m} \qquad \text{pour } \lambda<\omega_\tau,$$

donc, d'après (11):

$$\overline{\overline{U}}_\lambda\leqslant\mathfrak{m} \qquad \text{pour } \lambda<\omega_\tau,$$

d'où, d'après (10):

$$\overline{\overline{U}}\leqslant\aleph_\tau\cdot\mathfrak{m}=\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{m}=\mathfrak{m},$$

donc

$$\overline{\overline{U}}\leqslant\mathfrak{m}.$$

Nous établirons maintenant une métrique dans l'espace U comme il suit. Soient

$$a=\{\alpha_\xi\}_{\xi\leqslant\mu} \quad \text{et} \quad b=\{\beta_\xi\}_{\xi\leqslant\nu}$$

deux suites distinctes quelconques de U. Si $\mu<\nu$ et $\alpha_\xi=\beta_\xi$ pour $\xi\leqslant\mu$ (c. à d. si la suite a est un segment de la suite b), nous dirons que les suites a et b diffèrent dans les $\mu+1$-ièmes termes (le $\mu+1$-er terme existant dans la suite b, mais pas dans la suite a). En tout cas, si $a\neq b$, il existe un nombre ordinal $\varkappa=\varkappa(a,b)\leqslant\min(\mu+1,\nu+1)$ qui est le plus petit parmi les nombres $\varkappa$ tels que les suites a et b diffèrent dans les $\varkappa$-ièmes termes. Vu que $\alpha_1=\beta_1=1$, on a $\varkappa\geqslant 2$. Posons:

(12) $$\varrho(a,b)=\min_{\zeta<\varkappa(a,b)}\left[f^{\mu}_{\alpha_\mu}(\mu,\zeta)+f^{\nu}_{\beta_\nu}(\nu,\zeta)\right]$$

(où $\min\limits_{\zeta<\varkappa} g(\zeta)$ désigne la borne inférieure de tous les nombres $g(\zeta)$ pour $\zeta<\varkappa$). Nous aurons évidemment $\varrho(a,b)=\varrho(b,a)\geqslant 0$ pour $a\in U$ et $b\in U$. Nous n'excluons pas le cas où $\varrho(a,b)=0$ pour deux suites distinctes a et b de U: dans ce cas nous convenons que les suites a et b déterminent le même point de l'espace U.

Pour démontrer que la fonction $\varrho(a,b)$ définit une métrique dans U, il nous reste à prouver que, si a, b et $c=\{\gamma_\xi\}_{\xi\leqslant\sigma}$ sont trois suites différentes de U, on a

(13) $$\varrho(a,b)+\varrho(a,c)\geqslant\varrho(b,c).$$

Vu la définition de la fonction ϱ, nous avons:

(14) $$\varrho(a,c)=\min_{\zeta<\varkappa(a,c)}\left[f^{\mu}_{\alpha_\mu}(\mu,\zeta)+f^{\sigma}_{\gamma_\sigma}(\sigma,\zeta)\right],$$

(15) $$\varrho(b,c)=\min_{\zeta<\varkappa(b,c)}\left[f^{\nu}_{\beta_\nu}(\nu,\zeta)+f^{\sigma}_{\gamma_\sigma}(\sigma,\zeta)\right].$$

Posons pour abréger:

(16) $$\varkappa=\varkappa(a,b),\quad \varkappa_1=\varkappa(a,c),\quad \varkappa_2=\varkappa(b,c).$$

Nous aurons donc:

(17) $$\varkappa\leqslant\mu+1,\ \varkappa\leqslant\nu+1,\ \varkappa_1\leqslant\mu+1,\ \varkappa_1\leqslant\sigma+1,\ \varkappa_2\leqslant\nu+1,\ \varkappa_2\leqslant\sigma+1,$$

et

(18) $$\alpha_\xi=\beta_\xi \qquad \text{pour} \quad \xi<\varkappa,$$

(19) $$\alpha_\xi=\gamma_\xi \qquad \text{pour} \quad \xi<\varkappa_1,$$

(20) $$\beta_\xi=\gamma_\xi \qquad \text{pour} \quad \xi<\varkappa_2.$$

Soit ε un nombre positif quelconque. D'après (14) et (16), il existe un nombre ordinal $\zeta_0<\varkappa$ tel que

(21) $$\varrho(a,b)+\varepsilon>f^{\mu}_{\alpha_\mu}(\mu,\zeta_0)+f^{\nu}_{\beta_\nu}(\nu,\zeta_0),$$

et d'après (11) et (16), il existe un nombre ordinal $\zeta_1<\varkappa_1$ tel que

(22) $$\varrho(a,c)+\varepsilon>f^{\mu}_{\alpha_\mu}(\mu,\zeta_1)+f^{\sigma}_{\gamma_\sigma}(\sigma,\zeta_1).$$

Trois cas sont maintenant à distinguer:

1° $\max(\varkappa,\varkappa_1,\varkappa_2)=\varkappa$,

2° $\max(\varkappa,\varkappa_1,\varkappa_2)=\varkappa_1$,

3° $\max(\varkappa,\varkappa_1,\varkappa_2)=\varkappa_2$.

Dans le cas 1°, on a $\varkappa\geqslant\varkappa_1$ et $\varkappa\geqslant\varkappa_2$. Vu que $\varkappa\geqslant\varkappa_1$, on trouve d'après (18) et (19) $\beta_\xi=\gamma_\xi$ pour $\xi<\varkappa_1$. Or, il résulte de la définition du nombre $\varkappa(b,c)$ et de (16) qu'on n'a pas $\beta_{\varkappa_2}=\gamma_{\varkappa_2}$: on a donc $\varkappa_2\geqslant\varkappa_1$. Comme $\varkappa\geqslant\varkappa_2$, on trouve d'après (18) et (20) $\alpha_\xi=\gamma_\xi$ pour $\xi<\varkappa_2$ et, comme on n'a pas $\alpha_{\lambda_1}=\gamma_{\varkappa_1}$, on trouve $\varkappa_1\geqslant\varkappa_2$. On a donc $\varkappa_1=\varkappa_2$.

Vu que $\zeta_1<\varkappa_1=\varkappa_2$, on a d'après (15):

(23) $$\varrho(b,c)\leqslant f^{\nu}_{\beta_\nu}(\nu,\zeta_1)+f^{\sigma}_{\gamma_\sigma}(\sigma,\zeta_1).$$

Or, $f^{\mu}_{\alpha_\mu}(\eta,\zeta)$ est une distance dans l'ensemble de tous les nombres ordinaux $\leqslant\mu$ (puisque, d'après (8), on a $\alpha_\mu<\omega_{\psi(\varphi_\mu)}$, donc $f^{\mu}_{\alpha_\mu}\in F_\mu$). Vu que, d'après (17), $\zeta_0<\varkappa\leqslant\mu+1$ et $\zeta_1<\varkappa_1\leqslant\mu+1$, d'où $\zeta_0\leqslant\mu$ et $\zeta_1\leqslant\mu$, on a donc

(24) $$f^{\mu}_{\alpha_\mu}(\mu,\zeta_0)+f^{\mu}_{\alpha_\mu}(\mu,\zeta_1)\geqslant f^{\mu}_{\alpha_\mu}(\zeta_0,\zeta_1).$$

Pareillement, $f^{\nu}_{\beta_\nu}(\eta,\zeta)$ étant une distance dans l'ensemble de tous les nombres ordinaux $\leqslant\nu$, et vu que, d'après (17), $\zeta_0<\varkappa\leqslant\nu+1$ et $\zeta_1<\varkappa_1\leqslant\varkappa\leqslant\nu+1$, d'où $\zeta_0\leqslant\nu$ et $\zeta_1\leqslant\nu$, on trouve:

(25) $$f^{\nu}_{\beta_\nu}(\nu,\zeta_1)\leqslant f^{\nu}_{\beta_\nu}(\nu,\zeta_0)+f^{\nu}_{\beta_\nu}(\zeta_0,\zeta_1).$$

Soit $\xi=\max(\zeta_0,\zeta_1)$: vu que $\zeta_0<\varkappa$ et $\zeta_1<\varkappa_1\leqslant\varkappa$, on a $\xi<\varkappa$, donc, d'après (18), $\alpha_\xi=\beta_\xi$. Or, comme $\zeta_0\leqslant\xi$, $\zeta_1\leqslant\xi$ et (d'après (17)) $\xi<\varkappa\leqslant\mu+1$, d'où $\xi\leqslant\mu$, on a d'après (9):

(26) $$f^{\xi}_{\alpha_\xi}(\zeta_0,\zeta_1)=f^{\mu}_{\alpha_\mu}(\zeta_0,\zeta_1).$$

Pareillement, on a d'après (17) $\xi < \varkappa \leqslant \nu+1$, d'où $\xi \leqslant \nu$, d'où (vu que $b = \{\beta_\xi\}_{\xi \leqslant \nu} \epsilon\, U$ et vu la définition de U):

(27) $$f^{\xi}_{\beta_\xi}(\zeta_0, \zeta_1) = f^{\nu}_{\beta_\nu}(\zeta_0, \zeta_1).$$

Vu que $\alpha_\xi = \beta_\xi$, les formules (26) et (27) donnent

(28) $$f^{\mu}_{\alpha_\mu}(\zeta_0, \zeta_1) = f^{\nu}_{\beta_\nu}(\zeta_0, \zeta_1).$$

Les formules (21)-(25) et (28) donnent:

$$\varrho(a,b) + \varrho(a,c) + 2\varepsilon > \varrho(b,c),$$

d'où, ε étant un nombre positif arbitraire, on obtient la formule (13).

Dans le cas 2^0, on a $\varkappa_1 \geqslant \varkappa$ et $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2$ et les formules (18), (19) et (20) donnent $\varkappa = \varkappa_2$ selon la définition des nombres (16). Dans le cas 3^0, on a $\varkappa_2 \geqslant \varkappa$ et $\varkappa_2 \geqslant \varkappa_1$ et on trouve pareillement $\varkappa = \varkappa_1$. On a donc dans les cas 2^0 et 3^0 toujours $\varkappa \leqslant \varkappa_1$ et $\varkappa \leqslant \varkappa_2$. Nous traiterons ces deux cas ensemble.

Vu que $\zeta_0 < \varkappa \leqslant \varkappa_2$, on a d'après (15) et (16):

(29) $$\varrho(b,c) \leqslant f^{\nu}_{\beta_\nu}(\nu, \zeta_0) + f^{\sigma}_{\gamma_\sigma}(\sigma, \zeta_0).$$

Vu que $\zeta_0 \leqslant \mu$ et $\zeta_1 \leqslant \mu$, nous trouvons, comme plus haut, la formule (24), et, pareillement, vu que l'on a d'après (17) $\zeta_0 < \varkappa \leqslant \varkappa_2 \leqslant \sigma+1$ et $\zeta_1 < \varkappa_1 \leqslant \sigma+1$, d'où $\zeta_0 \leqslant \sigma$ et $\zeta_1 \leqslant \sigma$, nous trouvons (la fonction $f^{\sigma}_{\gamma_\sigma}(\eta,\zeta)$ étant une distance pour l'ensemble de tous les nombres ordinaux $\leqslant \sigma$):

(30) $$f^{\sigma}_{\gamma_\sigma}(\sigma, \zeta_0) \leqslant f^{\sigma}_{\gamma_\sigma}(\sigma, \zeta_1) + f^{\sigma}_{\gamma_\sigma}(\zeta_0, \zeta_1).$$

Soit $\xi = \max(\zeta_0, \zeta_1)$. Vu que $\zeta_0 < \varkappa \leqslant \varkappa_1$ et $\zeta_1 < \varkappa_1$, on a $\xi < \varkappa_1$, donc d'après (19), $\alpha_\xi = \gamma_\xi$. Or, comme $\zeta_0 \leqslant \xi$, $\zeta_1 \leqslant \xi$ et $\xi < \varkappa_1 \leqslant \mu+1$, d'où $\xi \leqslant \mu$, on a d'après (9) la formule (26) et, pareillement, vu que $\xi < \varkappa_1 \leqslant \sigma+1$, d'où $\xi \leqslant \sigma$, on trouve:

(31) $$f^{\xi}_{\gamma_\xi}(\zeta_0, \zeta_1) = f^{\sigma}_{\gamma_\sigma}(\zeta_0, \zeta_1).$$

Vu que $\alpha_\xi = \gamma_\xi$, les formules (26) et (31) donnent:

(32) $$f^{\mu}_{\alpha_\mu}(\zeta_0, \zeta_1) = f^{\sigma}_{\gamma_\sigma}(\zeta_0, \zeta_1).$$

Les formules (21), (22), (24), (29), (30) et (32) donnent, comme plus haut, la formule (13).

La formule (13) a donc lieu dans tous les cas, et la fonction ϱ est une distance dans l'espace U.

Soit maintenant M un espace métrique quelconque de puissance $\mathfrak{m}$. Nous pouvons donc poser $M = \{p_\xi\}_{\xi < \omega_\tau}$. Soit $r(p_\eta, p_\zeta)$ la distance dans M. Posons:

(33) $$f(\eta, \zeta) = r(p_\eta, p_\zeta) \qquad \text{pour} \quad \eta < \omega_\tau \quad \text{et} \quad \zeta < \omega_\tau.$$

C'est donc une distance dans l'ensemble de tous les nombres ordinaux $< \omega_\tau$.

Nous définirons maintenant une suite transfinie $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda < \omega_\tau}$ de nombres ordinaux $< \omega_\tau$ comme il suit. Posons $\alpha_1 = 1$. Soit λ un nombre ordinal donné tel que $1 < \lambda < \omega_\tau$. D'après la définition de l'ensemble F_λ et vu que F_λ est formé de fonctions f^{λ}_{ξ} où $\xi < \omega_{\psi(\varphi_\lambda)}$, il existe un nombre ordinal $\alpha_\lambda < \omega_{\psi(\varphi_\lambda)}$ tel que

(34) $$f^{\lambda}_{\alpha_\lambda}(\eta, \zeta) = f(\eta, \zeta) \qquad \text{pour} \quad \eta \leqslant \lambda \quad \text{et} \quad \zeta \leqslant \lambda.$$

On aura évidemment pour tout nombre ordinal $\lambda < \omega_\tau$ les formules (8) et (9). La suite (finie ou transfinie) $\{\alpha_\xi\}_{\xi \leqslant \lambda}$ est donc, pour tout $\lambda < \omega_\tau$, un point de l'espace U: désignons-le par q_λ et soit $Q = \{q_\lambda\}_{\lambda < \omega_\tau}$.

Soient maintenant μ et $\nu > \mu$ deux nombres ordinaux $< \omega_\tau$. On a donc $q_\mu = \{\alpha_\xi\}_{\xi \leqslant \mu}$, $q_\nu = \{\alpha_\xi\}_{\xi \leqslant \nu}$, et le plus petit nombre ordinal $\varkappa$ pour lequel les $\varkappa$-ièmes termes des suites q_μ et q_ν diffèrent est évidemment $\varkappa = \mu+1$. D'après (12), on aura donc:

$$\varrho(q_\mu, q_\nu) = \min_{\zeta \leqslant \mu} [f^{\mu}_{\alpha_\mu}(\mu, \zeta) + f^{\nu}_{\alpha_\nu}(\nu, \zeta)],$$

donc, d'après (34):

(35) $$\varrho(q_\mu, q_\nu) = \min_{\beta \leqslant \mu} [f(\mu, \zeta) + f(\nu, \zeta)],$$

d'où, la fonction f étant une distance:

(36) $$\varrho(q_\mu, q_\nu) \leqslant f(\mu, \mu) + f(\nu, \mu) = f(\mu, \nu).$$

Or, f étant une distance (dans l'ensemble de tous les nombres ordinaux $< \omega_\tau$), on a:

$$f(\mu, \zeta) + f(\nu, \zeta) \geqslant f(\mu, \nu) \qquad \text{pour} \quad \zeta \leqslant \mu,$$

d'où selon (35):

(37) $$\varrho(q_\mu, q_\nu) \geqslant f(\mu, \nu).$$

Les formules (36), (37) et (33) donnent

$$\varrho(q_\mu, q_\nu) = r(p_\mu, p_\nu) \qquad \text{pour} \quad \mu < \nu < \omega_\tau,$$

ce qui prouve que les ensembles M et Q sont isométriques. L'espace U est donc universel de puissance $\mathfrak{m}$ et le théorème **1** est démontré.

Démonstration du theorème 2. Etant donné un nombre cardinal $\mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$, soit E un espace métrique de puissance $\mathfrak{m}$. L'ensemble de toutes les distances entre deux points de E est évidemment de puissance $\leqslant \mathfrak{m}^2$, donc, vu que $\mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$, de puissance $< 2^{\aleph_0}$. Il existe donc un nombre réel positif a qui n'est pas égal à aucune distance entre deux points de E. L'espace E ne contient par conséquent aucun ensemble isométrique avec un espace métrique de puissance $\mathfrak{m}$ dans lequel toutes les distances entre deux points différents sont égales à a. Ainsi E n'est pas un espace universel de puissance $\mathfrak{m}$ et le théorème **2** se trouve démontré.

3. E et H étant deux espaces métriques, nous dirons que l'espace E est de type de dimension métrique ne dépassant pas celui de l'espace H, si E est isométrique avec un sous-ensemble de H. Nous écrirons dans ce cas:

$$\text{dim. métr. } E \leqslant \text{dim. métr. } H.$$

Si l'on a à la fois:

$$\text{dim. métr. } E \leqslant \text{dim. métr. } H \quad \text{et} \quad \text{dim. mé r. } H \leqslant \text{dim. métr. } E,$$

nous écrirons:

$$\text{dim. métr. } E = \text{dim. métr. } H.$$

Enfin, si l'on a dim. métr. $E \leqslant$ dim. métr. H, sans avoir dim. métr. $H \leqslant$ dim. métr. E, nous écrirons:

$$\text{dim. métr. } E < \text{dim. métr. } H.$$

Un espace métrique universel de p s a ce $\mathfrak{m}$ est donc tel que son type de dimension métrique est *le plus grand* parmi tous es types de dimension métrique de puissance $\mathfrak{m}$.

Le problème se pose s'il existe des types de dimension métrique *les plus petits* de puissance $\mathfrak{m}$. Or, on a deux théorèmes suivants, faciles à démontrer:

I. *Il existe, pour tout nombre cardinal* $\mathfrak{m}$, *des espaces métriques de puissance* $\mathfrak{m}$ *qui sont isométriques avec chacun de leurs sous-ensembles de puissance* $\mathfrak{m}$ (donc pour lesquels il n'existe aucun espace métrique de puissance $\mathfrak{m}$ dont le type de dimension métrique soit plus petit).

II. *Etant donné un nombre cardinal quelconque* $\mathfrak{m} > 1$, *il n'existe aucun espace métrique* E *de puissance* $\mathfrak{m}$ *tel que tout espace métrique de puissance* $\mathfrak{m}$ *contienne un ensemble isométrique avec* E (donc il n'existe aucun espace métrique de puissance $\mathfrak{m}$ dont le type de dimension métrique soit plus petit que tout autre type de dimension métrique de puissance $\mathfrak{m}$).

Soient en effet: $\mathfrak{m} > 1$ un nombre cardinal donné et a un nombre positif. Désignons par $M(a)$ l'espace métrique de puissance $\mathfrak{m}$ dans lequel toutes les distances entre deux points distincts sont égales à a. On voit sans peine que l'espace $M(a)$ satisfait au théorème I: pour avoir une application de $M(a)$ sur un sous-ensemble M_1 de $M(a)$ de puissance $\mathfrak{m}$, on peut prendre une transformation biunivoque arbitraire de $M(a)$ en M_1.

Soit d'autre part E un espace métrique quelconque de puissance $\mathfrak{m}$. Il est évident que l'espace E ne peut pas être à la fois isométrique avec un ensemble contenu dans $M(1)$ et avec un ensemble contenu dans $M(2)$, ce qui prouve le théorème II.

4. Appelons *métriquement saturé* tout espace métrique E pour lequel il n'existe aucun espace métrique de même puissance et dont le type de dimension métrique dépasse celui de E. On voit sans peine que tout espace métrique universel de puissance $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ est métriquement saturé. Or, il est aussi facile à démontrer que, réciproquement, tout espace métrique de puissance $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ qui est métriquement saturé, est un espace universel de puissance $\mathfrak{m}$.

Soit, en effet, E un espace métrique de puissance $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ qui est métriquement saturé. Supposons que E ne soit pas l'espace universel de puissance $\mathfrak{m}$. Il existe donc un espace métrique H de puissance $\mathfrak{m}$ qui n'est isométrique avec aucun ensemble de E, et nous pouvons évidemment admettre que les espaces E et H sont disjoints. Soient: ϱ_1 la distance dans E, ϱ_2 dans H, p_1 un point de E et p_2 un point de H. Posons $Q = E + H$. C'est encore un ensemble de puissance $\mathfrak{m}$. Nous définirons la distance ϱ dans Q comme il suit. Posons:

$$\varrho(p,q) = \begin{cases} \varrho_1(p,q) & \text{si } p \in E \text{ et } q \in E, \\ \varrho_2(p,q) & \text{si } p \in H \text{ et } q \in H, \\ \varrho_1(p,p_1) + \varrho_2(q,p_2) + 1 & \text{si } p \in E \text{ et } q \in H. \end{cases}$$

On vérifie sans peine que la fonction ϱ ainsi définie satisfait aux axiomes de la distance.

L'espace E est évidemment isométrique avec un ensemble de Q et l'espace H est isométrique avec un ensemble de Q. Donc, si l'espace Q était isométrique avec un ensemble de E, l'espace H serait aussi isométrique avec un ensemble de E, contrairement à la définition de H. L'espace Q n'est donc isométrique avec aucun ensemble de E. On a ainsi dim. métr. $E <$ dim. métr. Q, ce qui est impossible, E étant un espace métriquement saturé de puissance $\mathfrak{m}$. L'espace E est donc universel de puissance $\mathfrak{m}$, c. q. f. d.

Ainsi *la propriété des espaces métriques de puissance* $\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$ *d'être métriquement saturés est caractéristique pour les espaces métriques universels de puissance* $\mathfrak{m}$.

Vu le théorème **2**, nous en concluons aussi qu'il existe pour tout espace métrique infini M de puissance $<2^{\aleph_0}$ un espace métrique de même puissance dont le type de dimension métrique est supérieur à celui de M. On démontre également sans peine que, $M_1, M_2, \ldots$ étant une suite infinie d'espaces métriques dénombrables, il existe toujours un espace métrique dénombrable dont le type de dimension métrique est supérieur à celui de chacun des espaces $M_1, M_2, \ldots$ On en conclut qu'il existe une suite transfinie de type Ω d'espaces métriques dénombrables dont les dimensions métriques sont croissantes. Par contre, toute suite transfinie d'ensembles métriques dénombrables dont les dimensions métriques sont décroissantes est nécessairement dénombrable (mais peut être d'un type d'ordre quelconque $\alpha<\Omega$).

5. Soit X un ensemble donné quelconque de puissance $\mathfrak{m}$ (p. ex. l'ensemble de tous les nombres ordinaux $<\omega_\tau$). Soit Φ la famille de toutes les fonctions réelles bornées définies pour les éléments x de X. Etant donné deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ de la famille Φ, posons:

(38) $$\varrho_1(f,g)=\max_{x\in X}|f(x)-g(x)|.$$

On vérifie sans peine que la fonction ϱ_1 satisfait aux axiomes de la distance: elle établit donc une métrique dans l'espace Φ. Je dis que l'espace Φ contient, pour tout espace métrique M de puissance $\mathfrak{m}$, un sous-espace isométrique avec M.

Soit, en effet, M un espace métrique quelconque de puissance $\mathfrak{m}$. Soit $r(p,q)$ la distance dans M. Considérons un point p_0 de M. Comme $\overline{\overline{M}}=\mathfrak{m}$ et $\overline{\overline{X}}=\mathfrak{m}$, il existe une transformation biunivoque θ de l'ensemble X en M. Posons, pour tout élément p de M:

(39) $$f^{(p)}(x)=r\big(\theta(x),p\big)-r\big(\theta(x),p_0\big) \qquad \text{pour } x\in X.$$

Comme
$$|r(\theta(x),p)-r(\theta(x),p_0)|\leqslant r(p,p_0),$$
la fonction $f^{(p)}(x)$ est bornée (pour $x\in X$). On a donc $f^{(p)}\in\Phi$ pour $p\in M$.

Je dis qu'on a

(40) $$\varrho_1(f^{(p)},f^{(q)})=r(p,q) \qquad \text{pour } p\in M \text{ et } q\in N.$$

Soient, en effet, $p\in M$ et $q\in M$. D'après (39), on trouve:

(41) $$f^{(p)}(x)-f^{(q)}(x)=r\big(\theta(x),p\big)-r\big(\theta(x),q\big) \qquad \text{pour } x\in X,$$

d'où
$$|f^{(p)}(x)-f^{(q)}(x)|\leqslant r(p,q) \qquad \text{pour } x\in X,$$
donc, d'après (38):

(42) $$\varrho_1(f^{(p)},f^{(q)})\leqslant r(p,q).$$

D'autre part, θ étant une transformation biunivoque de l'ensemble X en M, il existe un élément $x^{(q)}$ de X tel que $\theta(x^{(q)})=q$, et (41) donne pour $x=x^{(q)}$:
$$f^{(p)}(x^{(q)})-f^{(q)}(x^{(q)})=r(q,p),$$
d'où selon (38):

(43) $$\varrho_1(f^{(p)},f^{(q)})\geqslant r(p,q).$$

Les formules (42) et (43) donnent la formule (40), qui se trouve ainsi établie.

L'ensemble M est ainsi isométrique avec l'ensemble de toutes les fonctions $f^{(p)}(x)$ où $p\in M$.

Si le nombre cardinal $\mathfrak{m}$ satisfait aux conditions du théorème **1**, nous pouvons prendre pour M un espace métrique universel de puissance $\mathfrak{m}$. Un espace isométrique avec un espace métrique universel de puissance $\mathfrak{m}$ étant encore universel de puissance $\mathfrak{m}$, le théorème **1** donne ainsi ce

Théorème 1^bis^. *Etant donné un nombre cardinal* $\mathfrak{m}\geqslant 2^{\aleph_0}$ *tel qu'il n'existe aucun nombre cardinal* $\mathfrak{n}$ *satisfaisant à l'inégalité* $\mathfrak{n}<\mathfrak{m}<2^{\mathfrak{n}}$, *il existe un espace métrique universel de puissance* $\mathfrak{m}$ *formé de fonctions réelles bornées définies sur un ensemble arbitraire* X *de puissance* $\mathfrak{m}$ *donné d'avance, espace métrisé d'après la formule* (38).

En particulier, pour $\mathfrak{m}=2^{\aleph_0}$, s'il n'existe aucun nombre cardinal $\mathfrak{n}$ tel que $\mathfrak{n}<2^{\aleph_0}<2^{\mathfrak{n}}$ (ce qui est une hypothèse peut-être plus faible que l'hypothèse du continu), nous pouvons prendre pour X un ensemble de nombres réels de puissance du continu et de mesure nulle dans l'intervalle $(0,1)$ et compléter la définition des fonctions définies sur X pour l'intervalle $(0,1)$, en les posant $=0$ en dehors de X. On a ainsi ce

Théorème 5^bis^. *Si* $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, *il existe un espace métrique universel de puissance du continu formé de fonctions mesurables bornées définies dans l'intervalle* $(0,1)$, *espace métrisé d'après la formule*

$$\varrho_1(f,g)=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-g(x)|. \tag{44}$$

Le théorème **5^bis^** peut être rapproché du théorème de MM. Banach et Mazur[5]), d'après lequel l'espace de toutes les fonctions continues définies sur l'intervalle fermé $0\leqslant x\leqslant 1$, métrisé d'après la formule (44), contient pour tout espace métrique séparable un sous-espace isométrique avec lui.

6. La démonstration du théorème **1** peut être appliquée, avec quelques modifications, à un théorème analogue concernant les espaces plus généraux que les espaces métriques, appelés *semi-métriques*, espaces qui ont été étudiés par MM. Chittenden[6]) et Menger[7]).

On appelle *semi-métrique* tout espace E où l'on a défini une fonction réelle (finie) $h(a,b)$ pour $a\epsilon E$ et $b\epsilon E$, telle que:

1⁰ $h(a,b)=h(b,a)>0$ si $a\neq b$,
2⁰ $h(a,b)=0$ si $a=b$

(l'inégalité du triangle n'étant pas exigée).

Le nombre $h(a,b)$ est appelé *écart* de a et b.

---

[5]) S. Banach: *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne I (Warszawa 1932), p. 187. Pour une démonstration élémentaire de ce théorème, voir W. Sierpiński, ce volume, p. 115 et suivantes.

[6]) E. W. Chittenden, *On the equivalence of ecart and voisinage*, Trans. Amer. Math. Soc. **18** (1917), p. 161-166. Cf. aussi les espaces $\mathcal{E}$ de M. Fréchet (voir son livre *Les espaces abstraits*, Paris 1928, p. 213-214).

[7]) K. Menger, Jahresb. deutsch. Math.-Ver. **40** (1931), p. 202; aussi Math. Ann. **100**, (1928) p. 115.

G et H étant deux espaces semi-métriques et g et h désignant les écarts correspondants, nous dirons qu'ils sont *congruents* s'il existe une transformation biunivoque θ de G en H telle que

$$g(a,b)=h\big(\theta(a),\theta(b)\big) \qquad \text{pour } a\epsilon G \text{ et } b\epsilon G.$$

Un espace semi-métrique sera dit *universel* de puissance $\mathfrak{m}$ s'il contient pour tout espace semi-métrique E de puissance $\mathfrak{m}$ un ensemble congruent avec E.

Je vais démontrer ce

Théorème 6. *Dans les théorèmes* **1** *à* **5** *le terme „métrique" peut être remplacé par le terme „semi-métrique".*

Démonstration. Soit $\mathfrak{m}=\aleph_\tau\geqslant 2^{\aleph_0}$ un nombre cardinal quelconque, et supposons qu'il n'existe aucun nombre cardinal $\mathfrak{n}$ tel que $\mathfrak{n}<\mathfrak{m}<2^{\mathfrak{n}}$.

Etant donné un nombre ordinal $\lambda<\omega_\tau$, désignons par Φ_λ l'ensemble de toutes les fonctions réelles (finies) de deux variables $f(\eta,\zeta)$ définies pour les couples de nombres ordinaux (η,ζ) où $\eta\leqslant\lambda$ et $\zeta\leqslant\lambda$, telles que $f(\eta,\zeta)=f(\zeta,\eta)\geqslant 0$ et que $f(\eta,\zeta)=0$ si $\eta=\zeta$ et dans ce cas seulement. Comme dans la démonstration du théorème **1**, nous concluons qu'il existe (pour $\lambda<\omega_\tau$) une suite transfinie de type $\omega_{\psi(\varphi_\lambda)}$ formée de toutes les fonctions de l'ensemble Φ_λ (pouvant d'ailleurs se répéter). Soit $\{f_\xi^\lambda\}_{\xi<\omega_{\psi(\varphi_\lambda)}}$ cette suite.

Nous définirons maintenant l'espace H comme il suit. H est l'ensemble de toutes les suites finies ou transfinies (6) de nombres ordinaux, où λ est un nombre ordinal (variable), $0<\lambda<\omega_\tau$, et $\alpha_\xi(\xi\leqslant\lambda)$ sont des nombres ordinaux assujettis aux formules (8) et (9). Tout à fait comme dans la démonstration du théorème **1**, on prouve que $\overline{\overline{H}}\leqslant\mathfrak{m}$.

On définit ensuite un écart dans l'espace H comme il suit. Soient

$$a=\{\alpha_\xi\}_{\xi\leqslant\mu} \quad \text{et} \quad b=\{\beta_\xi\}_{\xi\leqslant\nu}$$

deux suites quelconques de H.

Si $a=b$, posons:

$$h(a,b)=0.$$

Si la suite a est un segment de la suite b (c. à d. si $\mu<\nu$ et $\alpha_\xi=\beta_\xi$ pour $\xi\leqslant\mu$), posons:

$$h(a,b)=h(b,a)=f_{\beta_\nu}^{\nu}(\mu,\nu).$$

Enfin, si $a \neq b$ et si aucune des suites a et b n'est segment de l'autre, posons:

$$h(a,b)=1.$$

La fonction $h(a,b)$ est évidemment un écart dans H, qui devient ainsi un espace semi-métrique.

Soit maintenant G un espace semi-métrique quelconque de puissance $\mathfrak{m}$. Nous pouvons donc poser $G=\{p_\xi\}_{\xi<\omega_\tau}$. Soit $g(p_\eta, p_\zeta)$ l'écart dans G. Posons:

$$f(\eta,\zeta)=g(p_\eta,p_\zeta) \qquad \text{pour } \eta<\omega_\tau \text{ et } \zeta<\omega_\tau: \tag{45}$$

c'est donc un écart dans l'ensemble de tous les nombres ordinaux $<\omega_\tau$.

Nous définirons maintenant une suite transfinie $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda<\omega_\tau}$ de nombres ordinaux $<\omega_\tau$ comme il suit. Soit λ un nombre ordinal donné, $1\leqslant\lambda<\omega_\tau$. D'après la définition de l'ensemble Φ_λ et vu que Φ_λ est formé de fonctions f_ξ^λ où $\xi<\omega_{\psi(\varphi_\lambda)}$, il existe un nombre ordinal $\alpha_\lambda<\omega_{\psi(\varphi_\lambda)}$ tel qu'on a les formules (34). On aura donc pour tout nombre ordinal $\lambda<\omega_\tau$ les formules (8) et (9). La suite (finie ou transfinie) $\{\alpha_\xi\}_{\xi\leqslant\lambda}$ est donc, pour tout $\lambda<\omega_\tau$, un point de H: désignons-le par q_λ et posons $Q=\{q_\lambda\}_{\lambda<\omega_\tau}$.

Soient maintenant μ et $\nu>\mu$ deux nombres ordinaux $<\omega_\tau$. On a donc $q_\mu=\{\alpha_\xi\}_{\xi\leqslant\mu}$ et $q_\nu=\{\alpha_\xi\}_{\xi\leqslant\nu}$. D'après la définition de la fonction h, on a donc $h(q_\mu,q_\nu)=f^\nu_{\alpha_\nu}(\mu,\nu)$, donc, d'après (34) (vu que $\mu<\nu$):

$$h(q_\mu,q_\nu)=f(\mu,\nu),$$

donc, d'après (45):

$$h(q_\mu,q_\nu)=g(p_\mu,p_\nu) \qquad \text{pour } \mu<\nu<\omega_\tau,$$

ce qui prouve que les ensembles Q et G sont congruents.

L'espace semi-métrique H est par conséquent un espace universel de puissance $\mathfrak{m}$, et il est ainsi établi qu'on peut remplacer dans le théorème **1** le mot „métrique" par le mot „semi-métrique". Pour démontrer qu'on peut le faire aussi dans le théorème **2**, il ne faut que répéter la démonstration du théorème **2**, en y remplaçant partout le mot „distance" par „écart". Or, les théorèmes **3**, **4** et **5** modifiés résultent tout de suite des théorèmes **1** et **2** modifiés.

Le théorème **6** est ainsi démontré.

Axiom of choice for finite sets.

By

Andrzej Mostowski (Kraków)

Accordingly to N. Lusin two cardinal numbers $\mathfrak{m}$ and $\mathfrak{n}$ may serve to a characterisation of every case in which we are using the axiom of choice. If we apply this axiom to the class $\boldsymbol{K}$ of (mutually disjoint) sets, then $\mathfrak{m}$ denotes the cardinal number of $\boldsymbol{K}$ and $\mathfrak{n}$ is the least cardinal number surpassing the cardinal numbers of all elements of $\boldsymbol{K}$[1]).

In the present paper I shall study particular cases of the axiom of choice which arise by giving $\mathfrak{n}$ a finite value, whereas $\mathfrak{m}$ is left arbitrary. The problem will consist on the study of mutual dependence or independence between these particular cases of the axiom.

In order to formulate this problem more precisely I shall consider the following proposition:

[n] *For every class $\boldsymbol{K}$ of sets with n elements there is a function $\Phi_{\boldsymbol{K}}$ (the „choice-function" for $\boldsymbol{K}$) defined for all X from $\boldsymbol{K}$ and such that $\Phi_{\boldsymbol{K}}(X)\in X$*[2]).

$Z=\{n_1,n_2,\ldots,n_k\}$ being any finite set of positive integers, we denote by [Z] the logical product of k propositions $[n_1],[n_2],\ldots,[n_k]$.

Our problem is now this: n being a positive integer and Z a finite set of such integers, what are the necessary and sufficient conditions under which the implication $[Z]\rightarrow[n]$ holds true?

---

[1]) See W. Sierpiński, *Zarys teorji mnogości* (*An outline of set-theory*, polish), 3d edition, 1928, p. 112.

[2]) This proposition may be called „the principle of choice for sets of power n". It is equivalent with the following proposition („the axiom of choice for sets of power n"): *For every class $\boldsymbol{K}$ of disjoint sets with n elements there is a set Y such that the product $X\cdot Y$ has exactly one element for any $X\in\boldsymbol{K}$.*

Proof of equivalency is exactly the same as proof of equivalency of the principle of choice and the axiom of choice in general case. See e. g. W. Sierpiński, loc. cit., p. 141.