Restent les deux premières sommes. On a vu que la série $\sum_0^\infty (p+1)\varepsilon(p)\Delta^2\Omega(p)$ converge. Or, les deux premières sommes équivalent ensemble à

$$K=\sum_{p=0}^{n}\frac{n+1-p}{n+1}(p+1)\varepsilon(p)\Delta^2\Omega(p)-\sum_{p=0}^{m}\frac{m+1-p}{m+1}(p+1)\varepsilon(p)\Delta^2\Omega(p),$$

c'est-à-dire à

$$\frac{\Sigma_0+\Sigma_1+\ldots+\Sigma_n}{n+1}-\frac{\Sigma_0+\Sigma_1+\ldots+\Sigma_m}{m+1}$$

où $\Sigma_j=\sum_0^j(p+1)\varepsilon(p)\Delta^2\Omega(p)$. Donc $K\to 0$ avec $m=\infty$. Donc, pour $m=\infty$, $\int_0^{2n}|\sigma'_n-\sigma'_m|\,dx$ tend vers zéro. Cela suffit à affirmer que $\Sigma A_n\Omega(n)$ est une série de Fourier [1]).

[1]) Zygmund, loc. cit., p. 85.

Sur un espace métrique séparable universel *)

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

Le premier exemple d'un espace métrique séparable U qui contient un ensemble isométrique avec tout espace métrique séparable a été donné par Paul Urysohn [1]). Or, MM. Banach et Mazur ont démontré [2]) que l'espace (C) de toutes les fonctions continues dans l'intervalle $(0\leqslant x\leqslant 1)$ avec la distance $r(f,g)$ définie par la formule

$$r(f,g)=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|f(t)-g(t)|$$

(qui, comme on sait, est un espace séparable) contient aussi un ensemble isométrique avec tout espace métrique séparable. La démonstration publiée par M. Banach fait usage de la théorie des fonctionnelles linéaires. Dans le § 1 de cette Note, je donne une démonstration directe et plus élémentaire de ladite propriété de l'espace (C). Dans le § 2, je fais une comparaison des propriétés des espaces U et (C).

§ 1. M étant un espace métrique séparable donné, soit $Q=(p_1,p_2,\ldots)$ un sous-ensemble dénombrable de M dense dans M.

ϱ désignant la distance dans M, posons:

$$\gamma_n(p)=\varrho(p,p_n)-\varrho(p,p_1)\qquad \text{pour } p\in Q \text{ et } n=1,2,\ldots \tag{1}$$

Vu que

$$-\varrho(p_1,p_n)\leqslant\varrho(p,p_n)-\varrho(p,p_1)\leqslant\varrho(p_1,p_n),$$

*) Cf. ma Note du 24 Avril 1940 parue dans les Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, **75**.

[1]) P. Urysohn, C. R. Paris **180**, p. 83 (séance du 16 mars 1925) et Bull. Sc. Math. 2e série, **51** (1927), p. 1-38.

[2]) S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne I (Warszawa 1932), p. 187.

on a, d'après (1)

(2) $$|\gamma_n(p)| \leqslant \varrho(p_1, p_n) \quad \text{pour } p \in Q \text{ et } n=1,2,\ldots$$

Soit

(3) $$x_n = \varphi_n(t) \quad \text{où } 0 \leqslant t \leqslant 1 \text{ et } n=1,2,\ldots$$

une „courbe" continue remplissant le cube à $\aleph_0$ dimensions $(0 \leqslant x_n \leqslant 1,\ n=1,2,\ldots)$ [3]).

D'après (2), il existe pour tout nombre naturel k un nombre réel t_k, où $0 \leqslant t_k \leqslant 1$, tel que

(4) $$\gamma_n(p_k) = \varrho(p_1, p_n)[2\varphi_n(t_k) - 1] \quad \text{pour } n=1,2,\ldots$$

Soit $T=(t_1, t_2, \ldots)$. Soit $\overline{T}=T+T'$ la fermeture de l'ensemble T. Posons

(5) $$f_n(t) = \varrho(p_1, p_n)[2\varphi_n(t) - 1] \quad \text{pour } t \in \overline{T} \text{ et } n=1,2,\ldots$$

La fonction $f_n(t)$ est évidemment continue dans l'ensemble fermé $\overline{T}$. On peut la définir dans l'intervalle $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ tout entier de façon qu'elle soit linéaire dans chaque intervalle contigu à $\overline{T}$ en posant en outre $f_n(t)=f_n(t')$ pour $0 \leqslant t < t'$, où t' est la borne inférieure de $\overline{T}$, et $f_n(t)=f(t'')$ pour $t'' < t \leqslant 1$, où t'' est la borne supérieure de T. La fonction $f_n(t)$ est évidemment continue dans l'intervalle entier $(0,1)$. C'est donc une fonction appartenant à l'espace (C).

Je dis que

(6) $$\varrho(p_i, p_k) = r(f_i, f_k) \quad \text{pour } i \text{ et } k \text{ naturels.}$$

En effet, d'après (4) et (5), on trouve

(7) $$\gamma_i(p_k) = f_i(t_k) \quad \text{pour } i \text{ et } k \text{ naturels,}$$

donc, d'après (1)

$$\varrho(p_i, p_k) = \gamma_i(p_k) - \gamma_k(p_k) = f_i(t_k) - f_k(t_k),$$

d'où

(8) $$\varrho(p_i, p_k) \leqslant r(f_i, f_k).$$

D'autre part, d'après (7) et (1), on trouve pour i, k et j naturels:

$$f_i(t_j) - f_k(t_j) = \gamma_i(p_j) - \gamma_k(p_j) = \varrho(p_j, p_i) - \varrho(p_j, p_k),$$

[3]) Comme on sait, on peut définir effectivement une telle „courbe".

donc (vu que $|\varrho(p_j, p_i) - \varrho(p_j, p_k)| \leqslant \varrho(p_i, p_k)$):

$$|f_i(t_j) - f_k(t_j)| \leqslant \varrho(p_i, p_k) \quad \text{pour } j=1,2,\ldots,$$

c'est-à-dire:

$$|f_i(t) - f_k(t)| \leqslant \varrho(p_i, p_k) \quad \text{pour } t \in T$$

et, les fonctions $f_i(t)$ étant continues,

(9) $$|f_i(t) - f_k(t)| \leqslant \varrho(p_i, p_k) \quad \text{pour } t \in \overline{T}.$$

Soit

(10) $$m_{i,k} = \max_{t \in \overline{T}} |f_i(t) - f_k(t)|.$$

D'après (9), on a donc

(11) $$m_{i,k} \leqslant \varrho(p_i, p_k).$$

Or, il résulte sans peine de la définition des fonctions $f_n(t)$ pour $(0 \leqslant t \leqslant 1) - \overline{T}$ que

$$m_{i,k} = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f_i(t) - f_k(t)| = r(f_i, f_k).$$

Les formules (8) et (11) entraînent donc la formule (6), qui se trouve ainsi établie.

Soit maintenant p un point quelconque de l'espace M. L'ensemble Q étant dense dans M, il existe une suite infinie de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots$ telle que

(12) $$p = \lim_{k=\infty} p_{n_k}.$$

Etant donné un nombre $\varepsilon > 0$ quelconque, il existe d'après (12) un indice μ tel que

$$\varrho(p_{n_i}, p_{n_k}) < \varepsilon \quad \text{pour } i > \mu \text{ et } k > \mu,$$

d'où selon (6)

$$r(f_{n_i}, f_{n_k}) < \varepsilon \quad \text{pour } i > \mu \text{ et } k > \mu.$$

La suite infinie des fonctions $f_{n_k}(t)$ où $k=1,2,\ldots$ converge donc uniformément dans l'intervalle $(0,1)$. Posons

(13) $$f^{(p)}(t) = \lim f_{n_k}(t) \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant 1:$$

c'est donc une fonction continue, d'où $f^{(p)}(t) \in (C)$.

Or, soit $m_1, m_2, \ldots$ une suite quelconque de nombres naturels telle que

$$p = \lim_{k=\infty} p_{m_k}.$$

Nous avons donc d'après (12):

$$\lim_{k=\infty} \varrho(p_{m_k}, p_{n_k}) = 0,$$

ce qui donne d'après (6):

$$\lim_{k=\infty} r(f_{m_k}, f_{n_k}) = 0,$$

donc d'après (13):

$$f^{(p)}(t) = \lim_{k=\infty} f_{m_k}(t) \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

La fonction $f^{(p)}(t)$ ne dépend ainsi que du point p de M (et non de la suite $\{p_{n_k}\}$).

Soient maintenant p et q deux points de M. Il existe donc une suite infinie $h_1, h_2, \ldots$ de nombres naturels telle que

$$q = \lim_{k=\infty} p_{h_k}, \tag{14}$$

d'où selon la définition de la fonction $f^{(q)}(t)$:

$$f^{(q)}(t) = \lim_{k=\infty} f_{h_k}(t) \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{15}$$

D'après (13) et (15), on trouve

$$f^{(p)}(t) - f^{(q)}(t) = \lim_{k=\infty} [f_{n_k}(t) - f_{h_k}(t)] \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

et la suite à droite est uniformément convergente dans $(0,1)$. D'après (12) et (14), il existe donc pour $\varepsilon > 0$ un indice k tel que

$$|f^{(p)}(t) - f^{(q)}(t) - [f_{n_k}(t) - f_{h_k}(t)]| < \varepsilon \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \tag{16}$$

et que

$$|\varrho(p_{n_k}, q_{h_k}) - \varrho(p,q)| < \varepsilon. \tag{17}$$

D'après (16), on trouve sans peine:

$$|r(f^{(p)}, f^{(q)}) - r(f_{n_k}, f_{h_k})| \leqslant \varepsilon, \tag{18}$$

et comme d'après (6)

$$\varrho(p_{n_k}, p_{h_k}) = r(f_{n_k}, f_{h_k}),$$

les formules (17) et (18) donnent

$$|r(f^{(p)}, f^{(q)}) - \varrho(p,q)| < 2\varepsilon,$$

d'où, ε étant un nombre positif quelconque:

$$r(f^{(p)}, f^{(p)}) = \varrho(p,q).$$

L'ensemble M est donc isométrique avec l'ensemble de fonctions $f^{(p)}$, où $p \in M$, de (C). Ainsi l'espace (C) jouit de la propriété qui était à établir.

Il est à remarquer que nous avons démontré en même temps qu'étant donné un espace métrique séparable M et une suite infinie d'éléments de M dont l'ensemble Q est dense dans M, on sait définir effectivement un ensemble de (C) isométrique avec M.

Voici une application de cette remarque. L'ensemble métrique séparable universel U de Urysohn contient, comme on sait, un ensemble dense dans U, formé d'une suite infinie d'éléments $p_1, p_2, \ldots$ dont la nature n'est pas précisée, mais les nombres $\varrho(p_i, p_k)$ sont bien déterminés par les indices i et k. On peut donc définir effectivement un ensemble (U_0) de (C) isométrique avec U [4].

§ 2. Etant donné deux points p et q d'un espace métrique M dans lequel ϱ est la distance, nous entendrons par le *milieu entre p et q* tout point s de M tel que

$$\varrho(p,s) = \varrho(q,s) = \tfrac{1}{2}\varrho(p,q).$$

Soient f_1 et f_2 deux éléments de (C) définis comme il suit:

$$f_1(x) = 0 \quad \text{et} \quad f_2(x) = 1 \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{19}$$

Cherchons le milieu entre f_1 et f_2. Si c'est la fonction f, on a

$$r(f, f_1) = r(f, f_2) = \tfrac{1}{2} r(f_1, f_2), \tag{20}$$

et comme d'après (19) $r(f_1, f_2) = 1$, on trouve, vu la définition de la distance r dans (C):

$$|f(x) - f_1(x)| \leqslant \tfrac{1}{2} \quad \text{et} \quad |f(x) - f_2(x)| \leqslant \tfrac{1}{2} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

donc, d'après (19):

$$f(x) \leqslant \tfrac{1}{2} \quad \text{et} \quad f(x) - 1 \geqslant -\tfrac{1}{2} \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

ce qui donne tout de suite

$$f(x) = \tfrac{1}{2} \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{21}$$

D'autre part, on vérifie sans peine que la fonction f définie par la formule (21) satisfait aux égalités (20). Donc, il existe dans (C) entre f_1 et f_2 un et un seul milieu, à savoir la fonction (21).

---

[4]) Cf. le problème posé par M. Fréchet dans son livre *Les espaces abstraits*, Paris 1928, qui écrit p. 100: „Il serait intéressant de déterminer complètement (U_0) et d'une façon simple". La question si l'on peut le faire d'une façon plus simple que la nôtre reste naturellement ouverte.

Or, soient, g_1 et g_2 deux éléments de (C) définis comme il suit:

(22) $$g_1(x)=0 \quad \text{et} \quad g_2(x)=x \qquad \text{pour } 0\leqslant x\leqslant 1.$$

Etant donné un nombre réel t tel que $0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2}$, désignons par f_t la fonction (de x):

$$f_t(x)=(\tfrac{1}{2}-t)\,x+t \qquad \text{pour } 0\leqslant x\leqslant 1.$$

On a évidemment $f_t\neq f_{t'}$, pour $0\leqslant t<t'\leqslant \frac{1}{2}$. Or, on a, pour $0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2}$ d'après (22):

$$|f_t(x)-g_1(x)| = |(\tfrac{1}{2}-t)x+t| \leqslant \tfrac{1}{2} \qquad \text{pour } 0\leqslant x\leqslant 1,$$
$$|g_2(x)-f_t(x)| = |(\tfrac{1}{2}+t)x-t| \leqslant \tfrac{1}{2} \qquad \text{pour } 0\leqslant x\leqslant 1,$$
$$f_t(1)-g_1(1) = \tfrac{1}{2} \quad \text{et} \quad g_2(1)-f_t(1) = \tfrac{1}{2},$$

donc

(23) $$r(f_t,g_1)=r(f_t,g_2)=\tfrac{1}{2}.$$

Comme d'après (22) $r(g_1,g_2)=1$, nous concluons d'après (23) que chacune des fonctions f_t (où $0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2}$) est un milieu entre g_1 et g_2 Par conséquent:

Il existe dans (C) des couples d'éléments à la distance 1 l'un de l'autre entre lesquels il n'y a qu'un seul milieu, et d'autre part, il existe dans (C) des couples d'éléments à la distance 1 l'un de l'autre entre lesquels il y a plusieurs milieux (même une infinité de puissance du continu des milieux différents) [5]).

On voit aisément qu'il n'existe aucune transformation isométrique de l'espace (C) en lui-même qui transforme les éléments g_1 et g_2 de (C) respectivement en f_1 et f_2 ou bien en f_2 et f_1 (puisqu'elle transformerait les milieux différents entre g_1 et g_2 en milieux différents entre f_1 et f_2, tandis, qu'il n'y a entre f_1 et f_2 qu'un seul milieu). Donc, *l'espace (C) n'est pas métriquement homogène au sens de P. Urysohn* [6]) et, par suite, il n'est pas isométrique avec l'espace U (qui est métriquement homogène).

[5]) En particulier, il en résulte sans peine que l'espace (C) ne jouit pas (même pour $s=3$) de la propriété fondamentale de l'espace U démontrée par P. Urysohn l. c., p. 16 (I).

[6]) Je l'ai démontré déjà dans ma Note de C. R. Soc. Sc. Varsovie **28** (1935), p. 19-20. D'après P. Urysohn un espace métrique M est dit *métriquement homogène* si A et B étant des ensembles finis et isométriques quelconques situés dans M, il existe une transformation isométrique de M en lui-même transformant A en B.

Etant donné deux points p et q d'un espace métrique M dans lequel ϱ est la distance, nous appelons *segment rectiligne* $\overline{pq}$ tout ensemble contenu dans M, contenant p et q et qui est isométrique avec l'intervalle $0\leqslant t\leqslant \varrho(p,q)$.

On voit aisément que, f_1 et f_2 étant deux éléments quelconques de (C), il existe dans (C) au moins un segment rectiligne $\overline{f_1f_2}$.

En effet, posons pour $0\leqslant t\leqslant r(f_1,f_2)$:

(24) $$g_t(x)=f_1(x)+\frac{t}{r(f_1,f_2)}[f_2(x)-f_1(x)] \qquad \text{pour } 0\leqslant x\leqslant 1.$$

On voit sans peine que

$$r(g_t,g_{t'})=t'-t \qquad \text{pour } 0\leqslant t<t'\leqslant r(f_1,f_2),$$

ce qui prouve que l'ensemble H de toutes les fonctions g_t où $0\leqslant t\leqslant r(f_1,f_2)$ est isométrique avec l'intervalle $0\leqslant t\leqslant r(f_1,f_2)$. Or, on a d'après (24) $g_0=f_1$ et $g_{r(f_1,f_2)}=f_2$. L'ensemble H est donc un segment rectiligne $\overline{f_1f_2}$.

On démontre sans peine qu'il existe pour les fonctions (19) un seul segment rectiligne $\overline{f_1f_2}$. Soit, en effet, Q un segment rectiligne entre f_1 et f_2. Etant donné un élément f de Q, il existe donc un nombre t de l'intervalle $0\leqslant t\leqslant r(f_1,f_2)=1$, tel que

$$r(f,f_1)=t \quad \text{et} \quad r(f,f_2)=1-t.$$

On a donc d'après (19):

$$|f(x)|\leqslant t \quad \text{et} \quad |f(x)-1|\leqslant 1-t \qquad \text{pour } 0\leqslant x\leqslant 1,$$

d'où

$$f(x)\leqslant t \quad \text{et} \quad 1-f(x)\leqslant 1-t \qquad \text{pour } 0\leqslant x\leqslant 1,$$

ce qui donne

$$f(x)=t \qquad \text{pour } 0\leqslant x\leqslant 1.$$

L'ensemble Q est donc formé de tous les éléments de (C) qui sont des constantes $\geqslant 0$ et $\leqslant 1$, et il n'existe pas d'autres segments rectilignes entre f_1 et f_2.

Or, je dis que g_1 et g_2 étant les fonctions définies par les formules (22), il existe plusieurs segments rectilignes entre g_1 et g_2. En effet, on voit sans peine que si f est un milieu entre g_1 et g_2, la somme $\overline{g_1f}+\overline{fg_2}$ est un segment rectiligne $\overline{g_1g_2}$. Tout segment rectiligne n'ayant qu'un seul milieu, on voit que si f_t et $f_{t'}$ sont deux milieux différents entre g_1 et g_2, les segments rectilignes $\overline{g_1f_t}+\overline{f_tg_2}$ et $\overline{g_1f_{t'}}+\overline{f_{t'}g_2}$ sont différents. Par conséquent:

Deux éléments différents de (C) peuvent être toujours réunis par un (au moins) segment rectiligne et, d'autre part, il existe des couples d'éléments de (C) qui peuvent être réunis par plusieurs (même par $2^{\aleph_0}$) segments rectilignes différents.

En particulier, il en résulte tout de suite que l'espace (C) est connexe et même localement connexe [7]).

[7]) Cf. la propriété analogue de l'espace U (P. Urysohn, l. c., p. 30, Corollaires I et II).

Sur les espaces métriques universels [1]).

Par

Wacław Sierpiński (Warszawa).

1. Étant donné un nombre cardinal $\mathfrak{m}$, appelons *espace métrique universel de puissance* $\mathfrak{m}$ tout espace métrique de puissance $\mathfrak{m}$ qui contient pour chaque espace métrique M de puissance $\mathfrak{m}$ un ensemble isométrique avec M (c. à d. *applicable* [2]) sur M).

Je vais démontrer les théorèmes suivants:

Théorème 1. *Si $\mathfrak{m}$ est un nombre cardinal $\geqslant 2^{\aleph_0}$ tel qu'il n'existe aucun nombre cardinal $\mathfrak{n}$ satisfaisant à l'inégalité $\mathfrak{n} < \mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{n}}$* [3]), *il existe un espace métrique universel de puissance $\mathfrak{m}$.*

Théorème 2. *Si $\mathfrak{m}$ est un nombre cardinal $< 2^{\aleph_0}$, il n'existe aucun espace métrique universel de puissance $\mathfrak{m}$.*

Le théorème **1** entraîne immédiatement ce

Théorème 3. *Si l'hypothèse de G. Cantor sur les alephs* ($2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ pour tout nombre ordinal α) *est vraie, il existe un espace métrique universel de chaque puissance $> \aleph_0$.*

Le théorème **1** pour $\mathfrak{m} = \aleph_1$ et le théorème **2** donnent tout de suite ce

Théorème 4. *L'hypothèse du continu* ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$) *est équivalente à l'existence d'un espace métrique universel de puissance $\aleph_1$.*

Il en résulte immédiatement ce

[1]) Cf. ma Note du 24 Avril 1940 parue sous le même titre dans Atti delle R. Accademia delle Scienze di Torino **75** (1940).

[2]) On appelle *application* une transformation biunivoque conservant les distances.

[3]) Cette hypothèse sur le nombre cardinal $\mathfrak{m}$ équivaut, comme l'a démontré M. A. Tarski (Fund. Math. **32**, p. 48), à l'hypothèse que $\sum_{\mathfrak{n}<\mathfrak{m}} 2^{\mathfrak{n}} = \mathfrak{m}$, la sommation s'étendant à tous les nombres cardinaux $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$.